ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-DOUZIÈME — ANNÉE 1955

(91e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS 1955

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

KRAUS REPRINT
Nendeln/Liechtenstein
1971

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

ΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-DOUZIÈME — ANNÉE 1955

(91e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS 1955

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

KRAUS REPRINT
Nendeln/Liechtenstein
1971

Reprinted by permission of the original publishers

KRAUS REPRINT
A Division of
KRAUS-THOMSON ORGANIZATION LIMITED
Nendeln/Liechtenstein
1971

Printed in Germany
Lessingdruckerei Wiesbaden

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SOIXANTE-DOUZIÈME

	Pages.
Contribution à l'étude des fonctions hypergéométriques de deux variables, par M. *Vincent Ou Tchen-Yang*	1
Étude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité. Application à un ensemble fermé d'entiers algébriques, par MM. *J. Dufresnoy* et *Ch. Pisot*	69
La quasi-analyticité généralisée sur un intervalle borné, par M. *Paul Malliavin*	93
Définition de l'opérateur H de Schrödinger pour l'atome d'hydrogène, par M. *Jean Colmez*	111
Sur quelques aspects globaux du théorème de Picard, par M. *James A. Jenkins*	151
Note sur l'article précédent, par M. *Daniel Dugué*	162
Sur les fonctions holomorphes dont les dérivées admettent une valeur exceptionnelle, par M. *King-Lai Hiong*	165
Sur les points singuliers des séries de Dirichlet d'une classe de Cramer, par M. *Maurice Blambert*	199
Sur certaines classes de fonctions indéfiniment dérivables, par M. *Pierre Lalaguë*	237
Lois de groupes et analyseurs, par M. *Michel Lazard*	299
Longueurs extrémales et géométrie globale, par M. *Joseph Hersch*	401

ADMINISTRATION :

Directeur : M. PAUL MONTEL,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Trésorier : Mlle P. GAUTHIER-VILLARS.

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES DE DEUX VARIABLES

PAR M. VINCENT OU TCHEN-YANG.

INTRODUCTION.

Des quatre fonctions hypergéométriques de deux variables F_1, F_2, F_3, F_4 de P. Appell (1), la première est la généralisation la plus parfaite de la fonction hypergéométrique d'une variable. Elle est la seule des quatre qui admette comme expression analytique, outre son développement taylorien et sa représentation eulérienne par une intégrale double, une intégrale eulérienne simple. E. Picard (2), à qui on doit cette expression de F_1, a, de plus, étendu à F_1 le problème de Riemann et la méthode, de Riemann également, permettant de calculer le groupe de monodromie.

Le présent travail cherche à étendre de même la méthode géométrique de Schwarz, celle de Riemann étant analytique. Les exposants de la fonction hypergéométrique d'une variable $F(x)$ étant supposés réels, les fonctions de

(1) P. APPELL, *Séries hypergéométriques de plusieurs variables* (*Mémor. Sc. Math.*, fasc. III, 1925, p. 3 et suiv.).

(2) E. PICARD, *Extensions aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 2e série, t. 10, 1881, p. 303-322); *Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant de séries hypergéométriques de deux variables* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 3e série, t. 2, 1885, p. 357-384).

Schwarz, rapports de deux branches fondamentales de $F(x)$, représentent le demi-plan supérieur sur un triangle d'arcs de cercle que ces exposants déterminent à une transformation homographique près; les côtés circulaires du triangle déterminent à leur tour, par symétries successives, le groupe de monodromie correspondant; la conservation d'une forme d'Hermite par ce groupe de monodromie résulte ensuite du fait géométrique qu'on peut toujours trouver un cercle, réel ou imaginaire, orthogonal à trois cercles donnés.

L'extension de ces résultats au cas de deux variables indépendantes n'est pas immédiate. L'intuition géométrique du plan de Cauchy tombant en défaut, c'est dans l'espace projectif à deux dimensions complexes, donc à quatre dimensions réelles, que nous sommes conduits à nous placer. Là où l'on a uniformément, dans le cas des fonctions de Schwarz, des cercles, nous devons introduire, dans le cas présent, tantôt des chaînes planaires, à deux dimensions réelles, transformées homographiques du sous-espace réel, tantôt des hypersurfaces hermitiennes, à trois dimensions réelles. Les unes et les autres posent divers problèmes tant topologiques que proprement géométriques. L'examen de ces problèmes nous mettra sur la voie de l'extension en vue.

La fonction $F_1(x, y)$ étant multiforme, l'étude précise de ses diverses branches dans l'espace des variables x et y nécessite l'introduction d'hypersurfaces simples, semblables aux coupures de la théorie des fonctions hypergéométriques d'une variable, portant sur elles les six variétés linéaires à deux dimensions réelles que forment les points singuliers de $F_1(x, y)$. Me servant pour cela de quatre hypercônes hermitiens, j'obtiens ainsi un demi-domaine fondamental, simplement connexe et symétrique de son complémentaire, grâce auquel je fais disparaître toute équivoque sur les déterminations de $F_1(x, y)$ et les substitutions de son groupe de monodromie. Je mets ainsi en évidence une propriété de structure de ce dernier : les cinq substitutions fondamentales qui l'engendrent ne peuvent être données arbitrairement : elles vérifient un certain nombre de relations de permutabilité.

Les exposants $F_1(x, y)$ étant supposés réels, je regarde trois branches fondamentales de $F_1(x, y)$ comme les coordonnées homogènes d'un point dans un autre espace projectif à deux dimensions complexes (c'est une manière commode de considérer leurs rapports mutuels, généralisations des fonctions de Schwarz). Chaque substitution fondamentale du groupe de monodromie détermine dans cet espace une transformation homographique, produit de deux symétries successives par rapport à deux chaînes planaires. Je ramène ainsi le calcul du groupe de monodromie à l'étude géométrique d'un cycle de chaînes planaires. Les relations de permutabilité permettent de limiter à quatre le nombre de ces chaînes.

Nous montrerons ensuite : 1° qu'un cycle de quatre chaînes planaires dont deux consécutives ont en commun une chaîne linéaire dépend de quatre paramètres réels que laisse invariants toute transformation homographique;

2° qu'il existe une hypersurface hermitienne, et en général une seule, orthogonale aux quatre chaines planaires. Nous obtiendrons ainsi le groupe de monodromie de $F_1(x, y)$ et la forme d'Hermite qu'il conserve, forme dont nous déterminerons la nature, elliptique ou hyperbolique.

Ces derniers résultats ont fait l'objet d'une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (3).

CHAPITRE I.

Variétés singulières.

1. Données analytiques. — 1° La fonction hypergéométrique de deux variables $F_1(x, y)$ de P. Appell (4) peut être représentée par l'intégrale eulérienne

$$z = \int u^{\alpha}(u-1)^{\beta}(u-x)^{\gamma}(u-y)^{\delta}\,du \tag{1}$$

étendue à certaines lignes fermées. Elle vérifie le système d'équations aux dérivées partielles (p, q, r, s, t désignant les dérivées partielles de z du premier et du second ordre)

$$\left\{\begin{aligned} &x(x-1)r - y(y-1)s \\ &\quad = [(\alpha+\beta+2\gamma+2\delta)x - 2\delta y - (\alpha+\gamma-\delta)]p - \gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta-1)z, \\ &x(x-1)s + y(y-1)t \\ &\quad = [\gamma x - (\alpha+\beta+\gamma+2\delta)y - (\alpha+\gamma+\delta)]q - \delta(\alpha+\beta+\gamma+\delta-1)z, \\ &(y-x)s = \delta p - \gamma q, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

la troisième équation, vérifiée par toute fonction de la forme

$$\int (u-x)^{\gamma}(u-y)^{\delta} f(u)\,du,$$

étant une conséquence des deux premières.

On démontre sans peine l'*intégrabilité complète* du système (2), quelles que soient les valeurs des constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Un tel système possède des propriétés qui l'apparentent aux équations différentielles ordinaires. Ses solutions dépendent de constantes arbitraires et sont déterminées par des valeurs initiales. Le nombre des constantes arbitraires, qu'on peut appeler *ordre* du système, est celui des quantités dont les valeurs initiales déterminent chaque

(3) V. Ou Tchen-Yang, *Sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables* (*C. R. Acad. Sc.*, 234, 1952, p. 1524-1526).

(4) P. Appell, *Séries hypergéométriques de plusieurs variables* (*Mémor. Sc. Math.*, fasc. III, 1925, p. 3 et suiv.).

solution. Dans le cas du système (2), on peut se donner arbitrairement en un point les valeurs de z, p, q : l'ordre du système (2) est égal à 3.

2° Les équations (2) sont *linéaires* : elles donnent r, s, t comme fonctions linéaires et homogènes de z, p, q, les coefficients étant des fonctions rationnelles de x et de y. Il s'ensuit que, z_1, z_2, z_3 étant trois solutions linéairement indépendantes, la combinaison

$$C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3$$

est encore une solution, quelles que soient les constantes C_1, C_2, C_3. Montrons que, réciproquement, toute solution peut se mettre sous cette forme.

Soient, en effet, d'une manière générale,

$$(3)\qquad \begin{cases} r = R_1(x,y)p + R_2(x,y)q + R_3(x,y)z, \\ s = S_1(x,y)p + S_2(x,y)q + S_3(x,y)z, \\ t = T_1(x,y)p + T_2(x,y)q + T_3(x,y)z, \end{cases}$$

trois équations linéaires, à coefficients rationnels, complètement intégrables. Les conditions d'intégrabilité $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{\partial s}{\partial x}$, $\dfrac{\partial s}{\partial y} = \dfrac{\partial t}{\partial x}$ entraînent, en particulier, comme on s'en rend aisément compte,

$$(4)\qquad \frac{\partial(R_1 + S_2)}{\partial y} = \frac{\partial(S_1 + T_2)}{\partial x}.$$

Or, p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3 désignant les dérivées premières de z_1, z_2, z_3, posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}.$$

En dérivant Δ par rapport à x et à y, on a, compte tenu de (3),

$$(5)\qquad \frac{\partial \Delta}{\partial x} = (R_1 + S_2)\Delta, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial y} = (S_1 + T_2)\Delta.$$

La relation (4) assure l'intégrabilité complète du système (5). Celui-ci s'intègre alors immédiatement et donne

$$(6)\qquad \Delta = \Delta_0 e^{\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (R_1 + S_2)\,dx + (S_1 + T_2)\,dy}.$$

Si l'on appelle *points singuliers* du système (3) les points singuliers de ses coefficients, la formule (6) montre que Δ ne s'annule jamais en un point ordinaire, à moins de s'évanouir identiquement. Dès lors, en tout point ordinaire, on peut disposer des constantes C_1, C_2, C_3 pour faire prendre à la solution $C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3$ et à ses dérivées premières trois valeurs arbitrairement données. On obtiendra ainsi toutes les solutions.

3° Les points singuliers du système (3) sont les seuls points singuliers possibles de ses solutions. Cette propriété fondamentale découle des démonstrations classiques par lesquelles on établit l'existence même de ces solutions. Tirons-en tout de suite les conséquences suivantes :

$z(x, y)$ étant une solution de (3) déterminée par sa valeur et celle de ses dérivées premières en un point ordinaire (x_0, y_0), soit (x_1, y_1) un autre point ordinaire. La valeur de $z(x_1, y_1)$ dépend du chemin continu par lequel on va du point (x_0, y_0) au point (x_1, y_1) sans passer par aucun point singulier; mais deux chemins semblables qu'on peut ramener l'un à l'autre par variation continue, sans passer par aucun point singulier, donnent la même valeur $z(x_1, y_1)$.

Les points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) peuvent, en particulier, se confondre. Un tel chemin qu'on peut qualifier de *fermé*, ne ramène pas nécessairement z à sa valeur initiale; il fait alors passer d'une détermination de z à une autre. Étant données trois solutions fondamentales z_1, z_2, z_3, le parcours d'un chemin fermé conduit ainsi à trois autres solutions Z_1, Z_2, Z_3, combinaisons linéaires, d'après 2°, de z_1, z_2, z_3. On peut donc écrire

$$(7) \qquad \begin{cases} Z_1 = C_{11} z_1 + C_{12} z_2 + C_{13} z_3, \\ Z_2 = C_{21} z_1 + C_{22} z_2 + C_{23} z_3, \\ Z_3 = C_{31} z_1 + C_{32} z_2 + C_{33} z_3. \end{cases}$$

Les substitutions linéaires qui correspondent ainsi aux divers chemins fermés forment ce qu'on appelle le *groupe de monodromie*.

2. Espace des variables et espace des fonctions. — Deux espaces projectifs à deux dimensions complexes vont nous occuper successivement. Le premier, l'espace des variables, est celui où sont représentées les variables indépendantes x, y : ses deux plans coordonnés sont les plans de Cauchy dont x et y sont respectivement les affixes complexes. A cet espace nous en adjoindrons un autre, celui des fonctions, dans lequel nous regarderons comme coordonnées homogènes trois solutions fondamentales du système (2).

Nous n'envisagerons tout d'abord que le premier.

3. Nature de l'espace utilisé. — L'espace projectif à deux dimensions complexes n'est pas l'espace projectif à quatre dimensions réelles : il en diffère par le fait qu'on y groupe les quatre variables réelles u_1, v_1, u_2, v_2 en deux couples en posant

$$(8) \qquad x = u_1 + iv_1, \qquad y = u_2 + iv_2.$$

Une certaine dissymétrie en résulte pour les quatre variables réelles. Si, par exemple, on appelle plan l'ensemble des points dont les coordonnées réelles vérifient deux équations réelles du premier degré, il y aura lieu de distinguer.

parmi les plans, ceux pour lesquels ces deux équations peuvent être remplacées par une seule en variables complexes

$$Ax + By + C = 0,$$

A, B, C étant des nombres complexes. Ce sont ce que nous appellerons, d'après M. H. Cartan, les *plans analytiques*. Le plan $c_1 = c_2 = 0$, par exemple, n'est pas analytique.

Une autre conséquence du remplacement des quatre coordonnées réelles par deux complexes concerne les points à l'infini. Ceux-ci, en effet, se distinguent les uns des autres, non par les valeurs des rapports $u_1 : c_1 : u_2 : c_2$ comme dans l'espace projectif à quatre dimensions réelles, mais par celles d'un seul rapport complexe

$$x : y = (u_1 + ic_1) : (u_2 + ic_2).$$

Il y a ainsi à l'infini une infinité double, et non triple, de points.

Pour définir rigoureusement les points à l'infini, utilisons les coordonnées homogènes en posant

$$x = \frac{X}{T}, \qquad y = \frac{Y}{T}. \tag{9}$$

X, Y, T sont trois nombres complexes, jamais nuls simultanément, dont les rapports mutuels déterminent la position d'un point; un point pour lequel on a $T = 0$ sera, par définition, à l'infini. Toute équation homogène et du premier degré en X, Y, T étant regardée comme définissant un plan analytique, l'ensemble des points à l'infini est un plan analytique.

Une *transformation homographique* de l'espace projectif à deux dimensions complexes est une substitution linéaire de la forme

$$\begin{cases} X' = a_1 X + b_1 Y + c_1 T, \\ Y' = a_2 X + b_2 Y + c_2 T, \\ T' = a_3 X + b_3 Y + c_3 T. \end{cases} \tag{10}$$

Elle fait correspondre à tout plan analytique, y compris celui de l'infini, un autre plan analytique.

4. Plans analytiques singuliers. — Un système d'équations linéaires aux dérivées partielles complètement intégrable, tel le système (2) ou, plus généralement, le système (3), présente, par rapport aux équations différentielles linéaires ordinaires, la nouveauté suivante : ses points singuliers, au lieu d'être des points isolés, forment des continus, variétés algébriques, chacune d'elles vérifiant une équation algébrique irréductible. On obtient ces *variétés singulières* en égalant à zéro chacun des polynomes irréductibles qui figurent au dénominateur dans les fonctions rationnelles R_1, R_2, R_3, S_1, ..., T_3; il y aura autant de variétés singulières que de tels polynomes, variétés auxquelles il convient d'ajouter, quand il le faut, le plan analytique de l'infini.

Sans nous étendre sur ce qu'on doit entendre par un point ordinaire ou singulier à l'infini, bornons-nous à remarquer que, pour notre but actuel, qui est de réduire les uns aux autres, par variation continue, les divers chemins fermés générateurs du groupe de monodromie, nous pouvons compter *a priori* le plan analytique de l'infini parmi les variétés singulières, nous interdisant, par conséquent, de le traverser : les résultats ainsi obtenus vaudront, il est clair, quel que soit le comportement à l'infini du système (2) ou (3).

Les variétés singulières du système (2) se déterminent immédiatement. Pour résoudre ce système par rapport à r, s, t, on n'a qu'à tirer s de la troisième équation; on porte ensuite l'expression de s ainsi obtenue dans les deux premières équations, qui permettent alors de calculer r et t. On voit que les seuls points singuliers du système (2) à distance finie sont ceux dont les coordonnées annulent un des cinq polynomes du premier degré :

$$x, \quad x-1, \quad y, \quad y-1, \quad y-x.$$

On a ainsi cinq plans analytiques, six avec celui de l'infini.

Avec les coordonnées homogènes, nous écrirons leurs six équations

$$(11) \qquad \begin{cases} X=0, & Y=0, & T=0, \\ Y=T, & T=X, & X=Y. \end{cases}$$

Deux plans analytiques n'ayant, à moins de se confondre, qu'un seul point commun, les six plans singuliers se trouvent situés les uns par rapport aux autres d'une manière particulière : les trois plans $X=0$, $Y=0$, $X=Y$, par exemple, passent par le même point $X=Y=0$. Il y a quatre points de la sorte, à savoir

$$(12) \qquad \begin{cases} X=Y=0, & X=T=0, \\ Y=T=0, & X=Y=T, \end{cases}$$

Cette seule propriété suffit à caractériser projectivement les six plans. En effet, étant donné dans l'espace à deux dimensions complexes quatre points A, B, C, D, linéairement indépendants trois à trois, deux de ces points déterminent un plan analytique; il y aura six plans ainsi déterminés : AB, AC, AD, BC, BD, CD. Pour ramener ces plans aux plans (11), il suffit d'une transformation homographique faisant correspondre aux points A, B, C, D les points (12), ce qui est possible effectivement. En effet, *il existe une transformation homographique, et une seule, faisant correspondre à quatre points donnés, linéairement indépendants trois à trois, quatre autres semblables également donnés.* La démonstration classique de ce théorème pour les variables réelles reste valable pour les variables complexes.

5. Hypercônes hermitiens. — Les six plans analytiques singuliers, avec la propriété projective particulière que nous venons de leur reconnaître, jouent, pour le système (2), le même rôle que les trois points singuliers 0, 1, ∞, pour

une équation différentielle de Gauss. Les solutions de celle-ci n'étant pas uniformes, on aborde leur étude en traçant, dans le plan de Cauchy, des coupures appropriées. Le plus simple est de prendre l'axe réel que les trois points o, 1, ∞ divisent en trois segments; tout chemin fermé ne passant par aucun point singulier traverse ces segments un certain nombre de fois dans un ordre déterminé; ce nombre et cet ordre le qualifient alors complètement.

Les valeurs particulières, o, 1, ∞, des points singuliers ne restreignent pas la généralité de la méthode : on passe au cas général par une simple transformation homographique, l'axe réel devenant une circonférence.

Guidés par cet exemple classique, cherchons de même, dans l'espace à deux dimensions complexes, des hypersurfaces simples, à trois dimensions réelles, portant sur elles les six plans singuliers. Prenons l'hypersurface qu'on obtient en ne donnant à γ, par exemple, que des valeurs réelles. Son équation en coordonnées homogènes consiste à égaler le rapport Y:T à son conjugué; on peut l'écrire

$$Y\,T - \overline{T}\,Y = 0,$$

ou mieux, pour avoir au premier membre une forme d'Hermite,

$$i(\overline{Y}\,T - \overline{T}\,Y) = 0. \tag{13}$$

Nous appellerons *hypersurface hermitienne* l'ensemble des points dont les coordonnées homogènes annulent une forme d'Hermite. L'hypersurface (13), qui est hermitienne, porte sur elle trois des six plans singuliers, à savoir :

$$Y = 0, \qquad T = 0, \qquad Y = T, \tag{14}$$

propriété qui la détermine réciproquement. Soit, en effet, H(X, Y, T) une forme d'Hermite définissant une hypersurface hermitienne. Pour s'annuler avec Y, quelles que soient les valeurs de X et de T, elle ne doit contenir que des termes pourvus du facteur Y ou $\overline{Y}$. En raisonnant de même avec le plan T = o, les termes en $\overline{Y}\,T$ et en $\overline{T}\,Y$ étant alors les seuls restants, on a

$$H = h\,\overline{Y}\,T + \overline{h}\,\overline{T}\,Y. \tag{15}$$

En faisant ensuite Y = T, H = o, on trouve

$$h = -\overline{h} = ki \qquad (k \text{ réel})$$

ce qui ramène (15) à (13).

Les trois plans singuliers (14) ne sont pas les seuls plans analytiques de l'hypersurface (13) : tous les plans de la forme

$$Y = \lambda T \qquad (\lambda \text{ réel})$$

lui appartiennent également. Une hypersurface hermitienne engendrée ainsi par une infinité simple de plans analytiques issus d'un point fixe peut être appelée un *hypercône hermitien;* le point fixe sera son *sommet. Tout hypercône hermitien est déterminé par trois quelconques de ses plans analytiques générateurs.*

Le sommet de l'hypercône (13) n'est autre que le point $Y = T = 0$, un des quatre points triplement singuliers du système (2). Les trois autres de ces points sont les sommets de trois autres hypercônes obtenus de la même manière. Nous avons ainsi quatre hypercônes hermitiens; nous écrirons leurs équations, suivant l'ordre des quatre points (12),

$$(16)\qquad \begin{cases} i(\bar{Y}T - \bar{T}Y) = 0, \quad i(\bar{T}X - \bar{X}T) = 0, \quad i(\bar{X}Y - \bar{Y}X) = 0, \\ i(\bar{Y}T - \bar{T}Y) + i(\bar{T}X - \bar{X}T) + i(\bar{X}Y - \bar{Y}X) = 0. \end{cases}$$

On vérifie sans peine la dernière de ces équations : l'hypersurface qu'elle représente porte bien sur elle les plans $Y = T$, $T = X$, $X = Y$.

Les quatre hypercônes (16) ont en commun l'ensemble des points réels, ensemble que l'on désigne par le nom de *sous-espace réel*, ou de *chaîne planaire réelle* en appelant *chaînes planaires* les variétés, à deux dimensions réelles, transformées homographiques du sous-espace réel. *Une chaîne planaire est déterminée par quatre de ses points, linéairement indépendants trois à trois.* En effet, quatre points semblables étant donnés, une transformation homographique les ramène à quatre points réels; la chaîne réelle est bien la seule chaîne planaire qui passe par ces derniers points.

Un hypercône hermitien étant donné, prenons sur trois de ses plans analytiques générateurs trois points respectifs linéairement indépendants. Ces points formant avec le sommet quatre points linéairement indépendants trois à trois, *la chaîne planaire qu'ils déterminent ainsi appartient tout entière à l'hypercône hermitien.* Cette propriété résulte, par simple transformation homographique, de ce que nous savons des hypercônes (16).

Chacune des chaînes planaires ainsi obtenues possède en outre la propriété suivante, également évidente : un plan analytique passant par le sommet de l'hypercône hermitien n'ayant avec elle, en général, aucun autre point commun que ce sommet, tout plan analytique générateur, par contre, la rencontre suivant une *chaîne linéaire*, transformée homographique d'une droite réelle.

Cette dernière remarque permet de construire un hypercône hermitien ou, ce qui revient au même, les plans analytiques qui l'engendrent, connaissant son sommet et une chaîne planaire, passant par ce sommet, lui appartenant entièrement. On trouve ainsi, par exemple, les plans analytiques générateurs du dernier des hypercônes (16) : ils ont pour équation

$$Y - T = \lambda(X - T) \qquad (\lambda \text{ réel}).$$

6. Les quatorze régions. — Les quatre hypercônes (16) partagent l'espace en quatorze régions, obtenues en remplaçant les signes $=$ des équations (16) par les signes $<$ ou $>$. On doit évidemment exclure deux des seize combinaisons

possibles, car on ne peut avoir ni

$$i(\bar{Y}T-\bar{T}Y)<0, \qquad i(\bar{T}X-\bar{X}T)<0, \qquad i(\bar{X}Y-\bar{Y}X)<0,$$
$$i(\bar{Y}T-\bar{T}Y)+i(\bar{T}X-\bar{X}T)+i(\bar{X}Y-\bar{Y}X)>0;$$

ni la combinaison entièrement opposée.

Pour étudier rigoureusement ce partage de l'espace, il est plus simple de reprendre les coordonnées x, y de la formule (8). Grâce aux variables réelles u_1, v_1, u_2, v_2, les équations (16) deviennent, à l'ordre près,

$$(17) \qquad v_1=0, \qquad v_2=0, \qquad u_2v_1-u_1v_2=0, \qquad (u_2-1)v_1-(u_1-1)v_2=0.$$

En posant

$$(18) \qquad w_1=u_2v_1-u_1v_2, \qquad w_2=(u_2-1)v_1-(u_1-1)v_2,$$

on a

$$(19) \qquad w_1-w_2=v_1-v_2.$$

Il est clair que, pour $v_1>0$, $v_2<0$,

$$w_1<0 \quad \text{entraîne} \quad w_2<0;$$
$$w_2>0 \quad \text{entraîne} \quad w_1>0;$$

et que, pour $v_1<0$, $v_2>0$,

$$w_1>0 \quad \text{entraîne} \quad w_2>0;$$
$$w_2<0 \quad \text{entraîne} \quad w_1<0.$$

De même, pour $w_1>0$, $w_2<0$,

$$v_1<0 \quad \text{entraîne} \quad v_2<0;$$
$$v_2>0 \quad \text{entraîne} \quad v_1>0;$$

pour $w_1<0$, $w_2>0$,

$$v_1>0 \quad \text{entraîne} \quad v_2>0;$$
$$v_2<0 \quad \text{entraîne} \quad v_1<0.$$

Dès lors, des quatorze régions considérées, les unes, définies par quatre inégalités, seront limitées par quatre hyperfaces; les autres n'en auront que trois.

On a ainsi six régions à quatre hyperfaces, à savoir :

1. $v_1>0$, $v_2>0$, $w_1>0$, $w_2>0$;
2. $v_1<0$, $v_2<0$, $w_1<0$, $w_2<0$;
3. $v_1<0$, $v_2<0$, $w_1>0$, $w_2>0$;
4. $v_1>0$, $v_2>0$, $w_1<0$, $w_2<0$;
5. $v_1>0$, $v_2<0$, $w_1>0$, $w_2<0$;
6. $v_1<0$, $v_2>0$, $w_1<0$, $w_2>0$;

et huit régions à trois hyperfaces :

7. $v_1 > 0, \quad v_2 < 0, \quad w_2 > 0;$
8. $v_1 < 0, \quad v_2 > 0, \quad w_2 < 0;$
9. $v_1 > 0, \quad v_2 < 0, \quad w_1 < 0;$
10. $v_1 < 0, \quad v_2 > 0, \quad w_1 > 0;$
11. $v_1 > 0, \quad w_1 < 0, \quad w_2 > 0;$
12. $v_1 < 0, \quad w_1 > 0, \quad w_2 < 0;$
13. $v_2 < 0, \quad w_1 < 0, \quad w_2 > 0;$
14. $v_2 > 0, \quad w_1 > 0, \quad w_2 < 0.$

Il n'est pas difficile de trouver, dans un espace à moins de dimensions, une image de ce partage en régions. Considérons, en effet, dans l'espace à trois dimensions réelles, un tétraèdre régulier ABCD; menons de son centre O, perpendiculairement aux droites OA, OB, OC, OD, quatre plans P, Q, R, S. Ceux-ci, ayant le point O en commun, ne sont linéairement indépendants que trois à trois; il existera une relation linéaire entre les premiers membres de leurs équations, relation qu'on peut supposer avoir exactement la forme (19). Il en résultera, par les plans P, Q, R, S, un partage de l'espace à trois dimensions réelles en quatorze régions, image fidèle de notre partage de l'espace à deux dimensions complexes.

La projection stéréographique d'une sphère de centre O, fera passer de cette image à une autre plus simple encore. Elle fait correspondre, en effet, aux plans P, Q, R, S, quatre cercles d'un même plan de Cauchy. Nous avons ainsi l'image suivante :

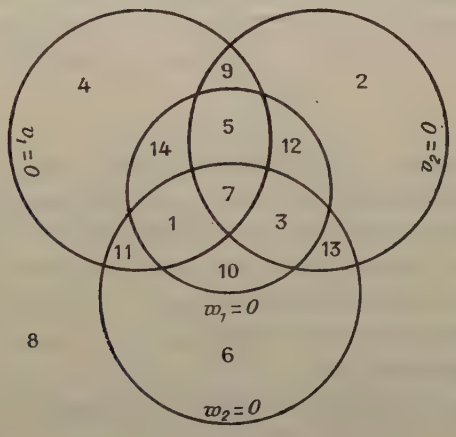

Fig. 1.

Les quatre cercles représentant les quatre hypercônes, les six quadrilatères et les huit triangles d'arcs de cercle représentent respectivement les quatorze régions. *La chaîne réelle, qui est une hyperarête commune à ces régions, n'est pas*

représentée; c'est pourquoi notre image n'est pas topologiquement parfaite. Les autres hyperarêtes sont des demi-plans : la région 1, par exemple, a pour hyperarêtes, outre la chaîne réelle, quatre demi-plans dont trois, à savoir

$$x=0,\quad \rho_2>0;\qquad y=1,\quad \rho_1>0;\qquad x=y,\quad \rho_1=\rho_2>0,$$

sont seuls à distance finie. Les douze moitiés ainsi obtenues des six plans singuliers trouvent leurs images dans les douze points d'intersection des cercles utilisés.

7. Nature topologique des régions. — Un domaine à plus de deux dimensions réelles est dit *connexe* lorsqu'on peut joindre deux quelconques de ses points par un chemin continu; il sera *simplement connexe* si deux chemins quelconques se ramènent l'un à l'autre par variation continue, sans sortir du domaine.

Chacune de nos quatorze régions et chacune de leurs hyperfaces sont simplement connexes.

Pour le voir, remarquons la situation particulière dans laquelle se trouvent les quatorze régions, ainsi que leurs hyperfaces, par rapport à la chaîne réelle : les inégalités et les équations qui les définissent ne cessent point d'être vérifiées lorsqu'on multiplie ρ_1 et ρ_2 par un même nombre positif. Ajoutons que la multiplication de ces mêmes variables par un nombre négatif fait passer des sept régions de numéro impair à celles de numéro pair et *vice versa*.

Dès lors, il est clair que les régions et les hyperfaces seront simplement connexes ou non en même temps que leurs sections par un sous-espace de la forme $\rho_1=\text{const.}$, soit, pour fixer les idées, $\rho_1=1$.

Ce sous-espace n'ayant que trois dimensions réelles, on le représentera sans difficulté, à l'aide de trois axes rectangulaires portant respectivement les valeurs de u_1, de u_2 et de ρ_2. Les surfaces d'équations

$$\rho_2=0,\qquad u_2=u_1\rho_2,\qquad u_2-1=(u_1-1)\rho_2,$$

qui sont un plan et deux paraboloïdes hyperboliques, le partagent en sept régions. Tout plan horizontal, de cote ρ_2, coupe, en effet, les paraboloïdes suivant deux droites parallèles qui ne se confondent que pour $\rho_2=1$. On aura donc trois régions au-dessous du plan u_1Ou_2, une intérieure aux deux paraboloïdes et deux extérieures. Au-dessus du plan u_1Ou_2, la partie intérieure aux paraboloïdes se divise en deux par la droite $\rho_2=1$, $u_2=u_1$, ce qui fera, avec deux extérieures, quatre régions.

Ces sept régions, ainsi que leurs faces tant planes que paraboloïdales, sont bien simplement connexes, ce qui établit la proposition en vue.

8. Réduction des chemins généraux. — Tout chemin continu ne traversant ni les six plans singuliers ni la chaîne réelle se caractérise par les régions par lesquelles il passe successivement : deux chemins continus passant par les

mêmes régions se ramènent l'un à l'autre par variation continue, les plans singuliers et la chaîne réelle restant interdits. En effet, deux régions consécutives quelconques sont séparées l'une de l'autre par une hyperface déterminée; il s'ensuit que les deux chemins continus entrent dans une région et en sortent par les mêmes hyperfaces; dès lors, grâce au théorème du paragraphe précédent, on peut ramener les chemins l'un à l'autre, de région en région.

Pour abréger, qualifions de *généraux* les chemins continus qui ne traversent ni les plans singuliers ni la chaîne réelle; les chemins *spéciaux* seront ceux qui, sans traverser les plans singuliers, contiennent des points réels.

La réduction des chemins généraux peut être obtenue par l'emploi de l'image du paragraphe 6 : les douze points d'intersection étant interdits, les lignes continues du plan de l'image représentent les chemins généraux; *les mêmes suites de régions caractérisent ceux-ci et celles-là.* A deux lignes réductibles l'une à l'autre sur le plan de Cauchy correspondront, dans l'espace à deux dimensions complexes, deux chemins réductibles. Par contre, les chemins spéciaux n'étant pas représentés, il peut correspondre à deux lignes irréductibles de l'image deux chemins généraux qu'on ramène l'un à l'autre par variation continue, moyennant certains chemins spéciaux intermédiaires.

Montrons, en effet, que *deux chemins tels que* (1, 7, 5, 9, 2) *et* (1, 10, 6, 8, 2), *qui ont pour images deux lignes irréductibles, sont réductibles l'un à l'autre, les plans singuliers étant seuls interdits.*

Considérons le plan non analytique obtenu en égalant u_1, u_2 à deux constantes, la première inférieure à 0 et la deuxième supérieure à 1, soit, pour fixer les idées, $u_1 = -1$, $u_2 = 2$. Ce plan ne rencontre les plans singuliers en aucun point à distance finie; il rencontre les quatre hypercônes suivant quatre droites. Chaque point du plan étant déterminé par les valeurs de v_1, v_2, les quatre droites ont pour équations

$$v_1 = 0, \qquad v_2 = 0, \qquad v_2 = -2v_1, \qquad v_2 = -\frac{1}{2}v_1.$$

Ces droites partagent le plan en huit parties. Celles des quatorze régions auxquelles ces parties appartiennent respectivement se déterminent sans diffi-

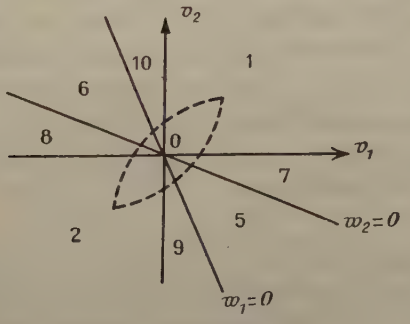

Fig. 2.

culté : le premier quadrant du plan appartient à la région 1, les quantités v_1, v_2, w_1, w_2 étant évidemment positives; en franchissant ensuite la demi-droite $v_2 = 0$, $v_1 > 0$, on passe à la région 7, v_2 ayant seul changé de signe; on continuera ainsi de suite. On aura ainsi la figure 2 ci-dessus.

En ramenant dans le plan les chemins (1, 7, 5, 9, 2) et (1, 10, 6, 8, 2), il est clair qu'on peut, sans sortir du plan, les réduire l'un à l'autre.

On exprime le même résultat en disant que *le chemin fermé* (1, 7, 5, 9, 2, 8, 6, 10, 1) *se réduit, par variation continue, à un point ordinaire.*

9. Demi-domaine fondamental. — Sept des quatorze régions résultent des sept autres par simple changement de signe des variables v_1 et v_2. On peut toujours les choisir de manière à obtenir, par leur réunion, un domaine simplement connexe. Partons, par exemple, de la région 7, à trois hyperfaces; joignons-lui les trois régions à quatre hyperfaces qui lui sont contiguës, 1, 3 et 5, puis les trois régions à trois hyperfaces, contiguës respectivement à celles-ci, qui n'ont avec 7 aucune hyperarête commune autre que la chaîne réelle : 11, 13, 9. Ces sept régions forment ensemble un domaine dont la connexion simple résulte de celle, évidente, de son image :

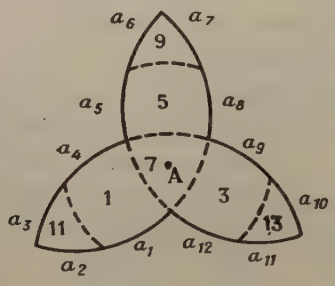

Fig. 3,

Symétrique de son complémentaire par rapport à la chaîne réelle, ce domaine, véritable généralisation du demi-plan supérieur de la théorie des fonctions de Schwarz, peut être appelé *demi-domaine fondamental*; nous le désignerons par (Δ). Considérons l'hypersurface qui le limite; les douze moitiés des plans singuliers, jointes à la chaîne réelle, la divisent en douze hyperfaces que nous désignerons par a_i ($i = 1, 2, \ldots, 12$). Un point fixe A étant choisi dans la région 7, tout chemin général fermé, partant de A et y revenant, franchit ces hyperfaces un certain nombre de fois dans un certain ordre; on pourra le désigner par un symbole de la forme

$$a_i^{\pm} a_j^{\pm} a_k^{\pm} a_l^{\pm} \ldots a_p^{\pm} a_n^{\pm},$$

le franchissement d'une hyperface étant marqué du signe + s'il fait sortir de (Δ), et du signe — s'il y fait entrer. Le même symbole désignera la substi-

tution correspondante du groupe de monodromie. On voit que les substitutions $a_1^+a_2^-$, $a_2^+a_3^-$, ..., $a_{12}^+a_1^-$ engendrent toutes les autres.

Pour un chemin spécial, on peut toujours le ramener, par variation continue, à un chemin général voisin.

On a évidemment

$$(a_1^+a_2^-)(a_2^+a_3^-)\dots(a_{12}^+a_1^-)=1;$$

mais il existe d'autres relations entre les substitutions $a_i^+a_{i+1}^-$. Le chemin (1, 7, 5, 9, 2, 8, 6, 10, 1) du paragraphe précédent se désigne, en effet, par le symbole $a_7^+a_1^-$. On a donc

$$a_7^+a_1^-=a_1^+a_7^-=1.$$

On a de même

$$a_8^+a_2^-=a_2^+a_8^-=1.$$

Il en résulte

$$a_7^+a_8^-=a_1^+a_7^-a_7^+a_8^-a_8^+a_2^-=a_1^+a_2^-.$$

Six des douze substitutions $a_1^+a_2^-$, $a_2^+a_3^-$, ..., $a_{12}^+a_1^-$ reproduisent ainsi les six autres. On en conclut que *cinq substitutions fondamentales*,

$$a_1^+a_2^-,\quad a_2^+a_3^-,\quad a_3^+a_4^-,\quad a_4^+a_5^-,\quad a_5^+a_6^-,$$

suffisent à engendrer le groupe de monodromie.

10. Équations différentielles de Fuchs. — Soit $z(x,y)$ une solution du système (2); en y faisant

$$x=\xi(t),\qquad y=\eta(t),\tag{20}$$

où ξ, η sont deux fonctions rationnelles, on obtient une fonction de t, solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels.

En effet, en posant

$$\frac{d\xi}{dt}=\xi',\qquad \frac{d^2\xi}{dt^2}=\xi'',\qquad \frac{d^3\xi}{dt^3}=\xi''',$$

$$\frac{d\eta}{dt}=\eta',\qquad \frac{d^2\eta}{dt^2}=\eta'',\qquad \frac{d^3\eta}{dt^3}=\eta''',$$

nous avons

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{dz}{dt}=p\xi'+q\eta',\\
&\frac{d^2z}{dt^2}=r\xi'^2+2s\xi'\eta'+t\eta'^2+p\xi''+q\eta'',\\
&\frac{d^3z}{dt^3}=\frac{\partial^3z}{\partial x^3}\xi'^3+3\frac{\partial^3z}{\partial x^2\,\partial y}\xi'^2\eta'+3\frac{\partial^3z}{\partial x\,\partial y^2}\xi'\eta'^2+\frac{\partial^3z}{\partial y^3}\eta'^3\\
&\qquad\qquad+3[r\xi'\xi''+s(\eta'\xi''+\xi'\eta'')+t\eta'\eta'']+p\xi'''+q\eta'''.
\end{aligned}\right.\tag{21}$$

Le système (2) permet de calculer, en fonctions linéaires de z, p, q, les dérivées r, s, t, $\frac{\partial^3z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3z}{\partial x^2\,\partial y}$, $\frac{\partial^3z}{\partial x\,\partial y^2}$, $\frac{\partial^3z}{\partial y^3}$. En portant ces valeurs dans les rela-

tions (21), on obtiendra, par élimination de p et q,

$$\frac{d^3z}{dt^3} + f_1(t)\frac{d^2z}{dt^2} + f_2(t)\frac{dz}{dt} + f_3(t)z = 0, \tag{22}$$

les fonctions $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ étant rationnelles.

On sait que Fuchs ([5]) distingue, parmi les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels, celles dont les solutions admettent la propriété suivante : *chacune de ces solutions, rendue uniforme par des coupures convenables, possède en chacun des points singuliers une valeur limite déterminée, finie ou infinie.* Le « théorème de Fuchs » donne la forme caractéristique de ces équations. Pour l'équation (22), ses diverses solutions s'expriment simplement à l'aide d'intégrales eulériennes, obtenues en portant dans (1) les valeurs (20); ses points singuliers correspondent aux valeurs de t pour lesquelles deux des quatre facteurs sous le signe $\int$ viennent à se confondre. En chacun de ces points, les intégrales eulériennes possèdent bien, d'après un calcul simple, rendu classique par la théorie des fonctions hypergéométriques d'une variable, des valeurs limites déterminées. L'équation (22) appartient donc à la classe de Fuchs.

Mais il y a plus. Les formules (20) font correspondre à toute ligne fermée du plan t, qui ne passe par aucun point singulier, un chemin fermé de l'espace à deux dimensions complexes; il en résulte que les solutions de (22) se transforment les unes dans les autres par les mêmes substitutions que celles de (2); *le groupe de monodromie de* (2) *contiendra celui de* (22) *comme sous-groupe.*

On peut toujours choisir les fonctions rationnelles $\xi(t)$, $\eta(t)$ de manière à rendre identiques les deux groupes de monodromie. Pour l'établir rigoureusement, nous nous bornerons au cas où la surface représentée paramétriquement par les équations (20) se réduit à un plan analytique *réel* :

$$y = ax + b, \tag{23}$$

les constantes a et b étant réelles.

Un plan de la forme (23) rencontre la chaîne réelle suivant une droite réelle; celle-ci porte sur elle les points singuliers de l'équation de Fuchs correspondante, points d'intersection du plan (23) avec les six plans singuliers. Les chemins fermés du plan (23), générateurs du groupe de monodromie de l'équation de Fuchs, traversent nécessairement cette droite réelle et sont, par conséquent, des chemins spéciaux. Les substitutions correspondantes se détermineront sans difficulté, comme nous allons le voir, grâce au demi-domaine fondamental (Δ).

([5]) L. Fuchs, *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit Veränderlichen Coefficienten* (*Journal de Crelle*, t. 66, p. 121 et suiv.).

11. Les sept espèces de plans analytiques réels. — Laisons d'abord de côté les plans analytiques réels qui passent par un des points (12) et qui engendrent, comme nous l'avons vu, les hypercônes (16). Tout autre plan analytique réel ne rencontre ces hypercônes que sur la chaîne réelle, suivant la droite réelle correspondante. Celle-ci le partage donc en deux moitiés dont chacune appartient tout entière à une seule des quatorze régions. Ces moitiés étant symétriques l'une de l'autre par rapport à la chaîne réelle, il en sera de même de leurs régions respectives. Aux sept groupes de deux régions ainsi obtenus correspondront sept espèces de plan analytiques réels : (1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8), (9, 10), (11, 12), (13, 14).

Le demi-domaine fondamental (Δ) ayant été choisi comme nous l'avons fait, les plans (7, 8) apparaissent comme les plus simples : *les points singuliers de l'équation de Fuchs se suivent alors, sur la droite réelle, dans le même ordre que les plans singuliers sur l'hypersurface, frontière de* (Δ). Reportons-nous, en effet, à l'équation (23) qui s'écrit, avec les variables u_1, v_1, u_2, v_2,

$$u_2 + iv_2 = a(u_1 + iv_1) + b,$$

d'où

$$u_2 = au_1 + b, \qquad v_2 = av_1,$$

et, par conséquent,

$$w_1 = (au_1 + b)v_1 - u_1(av_1) = bv_1,$$
$$w_2 = (au_1 + b - 1)v_1 - (u_1 - 1)(av_1) = (a + b - 1)v_1.$$

On voit que les plans (7, 8) répondent aux valeurs suivantes de a et de b :

$$a < 0, \qquad b > 0, \qquad a + b - 1 > 0. \tag{24}$$

Chaque point d'un plan (7, 8) pouvant être déterminé par les valeurs des coordonnées u_1, v_1, l'axe Ou_1 représente la droite réelle correspondante. Les cinq points singuliers à distance finie de l'équation de Fuchs ont pour affixes

$$x = 0, \quad 1, \quad \frac{b}{1-a}, \quad \frac{1-b}{a}, \quad \frac{-b}{a};$$

et l'on a, d'après (24),

$$1 < \frac{b}{1-a} < \frac{1-b}{a} < \frac{-b}{a},$$

ce qui conduit à la figure suivante :

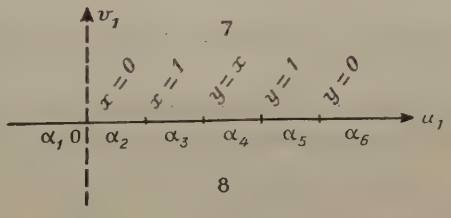

Fig. 4.

L'ordre des points singuliers est bien ici celui de la figure 3.

Désignons par $\alpha_i (i = 1, 2, \ldots, 6)$, les six segments de l'axe réel ainsi obtenus; les cinq substitutions

$$\alpha_1^+ \alpha_2^-, \qquad \alpha_2^+ \alpha_3^-, \qquad \alpha_3^+ \alpha_4^-, \qquad \alpha_4^+ \alpha_5^-, \qquad \alpha_5^+ \alpha_6^-$$

engendreront le groupe de monodromie de l'équation de Fuchs. Pour les évaluer, regardons le plan (7, 8) comme limite du plan

$$y = ax + b + i\varepsilon, \tag{25}$$

ε désignant un nombre positif petit. Ce dernier plan rencontre les quatre hypercônes suivant quatre droites : nous avons, d'après (25),

$$v_2 = aw_1 + \varepsilon, \qquad w_1 = bv_1 - \varepsilon u_1, \qquad w_2 = (a + b - 1)v_1 - \varepsilon(u_1 - 1);$$

les quatre droites auront pour équations

$$v_1 = 0, \qquad v_1 = \frac{-\varepsilon}{a}, \qquad v_1 = \frac{\varepsilon}{b} u_1, \qquad v_1 = \frac{\varepsilon}{a + b - 1}(u_1 - 1),$$

partageant ainsi le plan (25) en dix régions comme le montre la figure 5 :

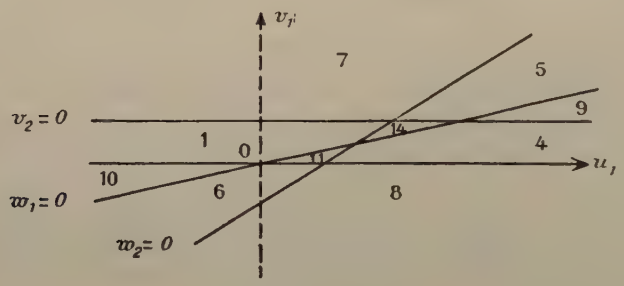

Fig. 5.

Les cinq points d'intersection, à distance finie, de ces droites donnant à la limite les cinq points singuliers de la figure 4, le chemin spécial $\alpha_1^+ \alpha_2^-$, par exemple, résulte, par passage à la limite, du chemin général (7, 1, 10, 6, 11, 1, 7), ce qui n'est autre que $a_1^+ a_2^-$. On aura ainsi

$$\alpha_1^+ \alpha_2^- = a_1^+ a_2^-, \qquad \alpha_2^+ \alpha_3^- = a_2^+ a_3^-, \qquad \ldots, \qquad \alpha_5^+ \alpha_6^- = a_5^+ a_6^-. \tag{26}$$

L'identité des deux groupes de monodromie est alors évidente.

12. Relations de permutabilité. — On examine de même les autres espèces de plans réels. Considérons en particulier les plans (5, 6) pour lesquels nous avons

$$a < 0, \qquad b > 0, \qquad a + b - 1 < 0.$$

Nous calculerons de deux manières différentes les substitutions fondamentales de l'équation de Fuchs correspondante : à l'équation (25), nous adjoindrons

celle obtenue en remplaçant ε par — ε. Nous obtenons ainsi par le même raisonnement que plus haut, les deux figures suivantes :

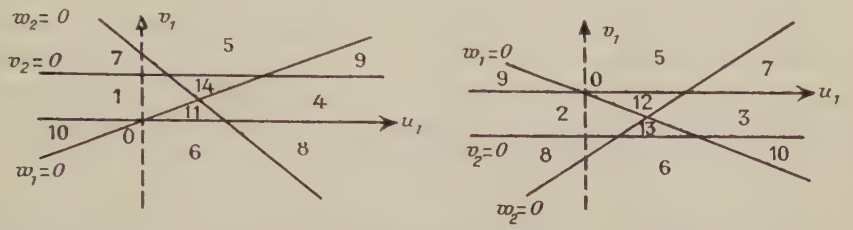

Fig. 6.

Utilisons d'abord la première de ces figures. Les cinq chemins généraux qui donnent à la limite les chemins spéciaux générateurs du groupe de monodromie de l'équation de Fuchs sont (5, 7, 1, 10, 6, 11, 1, 7, 5), (5, 7, 1, 14, 5), (5, 14, 1, 11, 4, 14, 5), (5, 14, 4, 11, 6, 8, 4, 14, 5), (5, 14, 4, 9, 5), ce qui conduit aux substitutions suivantes :

$$a_1^+a_2^-,\quad a_1^+a_3^-,\quad a_5^+a_4^-a_3^+a_3^-,\quad a_5^+a_3^-a_2^+a_3^-,\quad a_5^+a_6^-.$$

La deuxième figure donne de même

$$a_1^+a_2^-,\quad a_2^+a_3^-a_1^+a_2^-,\quad a_2^+a_4^-a_3^+a_2^-,\quad a_2^+a_3^-,\quad a_3^+a_6^-.$$

Il en résultera, par simple identification,

$$(27)\qquad a_4^+a_5^- = a_2^+a_3^-a_4^+a_2^-,\qquad a_5^+a_3^-a_2^+a_3^- = a_2^+a_3^-,$$

$$(28)\qquad a_5^+a_4^-a_3^+a_3^- = a_2^+a_4^-a_3^+a_2^-.$$

On vérifie que la relation (28) est une conséquence des deux relations (27). Celles-ci s'écrivent

$$a_4^+a_5^- = (a_2^+a_3^-)(a_3^+a_4^-)(a_4^+a_5^-)(a_4^+a_3^-)(a_3^+a_2^-),$$
$$(a_5^+a_4^-)(a_4^+a_3^-)(a_2^+a_3^-)(a_3^+a_4^-)(a_4^+a_5^-) = a_2^+a_3^-;$$

ou encore

$$(29)\qquad (a_2^+a_3^-)(a_3^+a_4^-)(a_4^+a_3^-) = (a_3^+a_3^-)(a_2^+a_3^-)(a_3^+a_4^-) = (a_3^+a_4^-)(a_4^+a_3^-)(a_2^+a_3^-).$$

Dans la figure 6, la droite $w_2 = 0$ rencontre $v_2 = 0$ en un point d'abscisse positive; mais il peut arriver, sans qu'on sorte de l'espèce (5, 6), que ce point de rencontre soit d'abscisse négative. Dans ce dernier cas, la méthode d'identification employée donnera, pour le point singulier $x = 0$,

$$(a_3^+a_4^-)(a_1^+a_2^-)(a_4^+a_5^-) = a_1^+a_2^-.$$

On aura de même

$$a_5^+a_6^- = (a_2^+a_3^-)(a_5^+a_6^-)(a_3^+a_2^-).$$

Nous avons ainsi

$$(30)\qquad \begin{cases} (a_1^+a_2^-)(a_4^+a_5^-) = (a_4^+a_5^-)(a_1^+a_2^-), \\ (a_2^+a_3^-)(a_5^+a_6^-) = (a_5^+a_6^-)(a_2^+a_3^-). \end{cases}$$

Nous appellerons *relations de permutabilité* les relations (29), (30) et d'autres semblables. *Pour les obtenir, nous n'avons utilisé jusqu'ici que les variétés singulières.* Nous retrouverons ces relations au chapitre suivant, avec de nouvelles précisions, en faisant intervenir les constantes α, β, γ, δ.

En terminant ce premier chapitre, faisons remarquer que, en passant d'un plan (7, 8) à un plan (5, 6), une seule des six substitutions fondamentales de l'équation de Fuchs est changée; c'est celle relative au point singulier $y=x$: la substitution $a_3^+ a_4^-$ devient, d'après (28),

$$(a_3^+ a_4^-)(a_3^- a_4^+)(a_4^+ a_3^-) = (a_2^+ a_3^-)(a_3^+ a_4^-)(a_3^- a_2^+).$$

Cette dernière substitution sera de même seule changée lorsqu'on passera de (5, 6) à (9, 10) : elle deviendra

$$(a_6^+ a_5^-)(a_5^+ a_4^-)(a_5^+ a_4^-)(a_4^+ a_5^-)(a_5^+ a_6^-) = (a_1^+ a_2^-)(a_2^+ a_3^-)(a_3^+ a_4^-)(a_3^+ a_2^-)(a_2^+ a_1^-).$$

On examinera de même le passage de (7, 8), soit à (1, 2) et à (11, 12), soit à (3, 4) et à (13, 14). On aura ainsi épuisé l'examen des sept espèces.

Pour les plans réels qui passent par un des points (12) et que nous avons laissés de côté, on les obtiendra comme cas limites, intermédiaires de deux espèces voisines.

CHAPITRE II.

Les douze intégrales.

1. Chemins d'intégration de l'intégrale (1). — Nous avons indiqué au chapitre I (§ 1) les deux définitions équivalentes de la fonction hypergéométrique de deux variables considérée, à savoir l'intégrale (1), *étendue à certaines lignes fermées*, et le système (2) qu'elle vérifie. La nature de ces lignes fermées se détermine de la manière suivante :

Considérant le plan de Cauchy dont la variable u est l'affixe complexe, nous nous bornerons aux lignes fermées de ce plan qui ne passent par aucun des points

$$u=0,\quad 1,\quad x,\quad y,\quad \infty,$$

points singuliers de la fonction

$$G(u)=u^\alpha(u-1)^\beta(u-x)^\gamma(u-y)^\delta. \tag{31}$$

Soit (C) une telle ligne fermée; peut-on la choisir de telle manière que l'intégrale $\int_{(C)} G(u)\,du$, considérée comme fonction de x et de y, satisfasse au système (2)?

Posons, pour abréger,

$$\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}=\int_{(C)} G(u)\,du=\int_{(C)} u^\alpha(u-1)^\beta(u-x)^\gamma(u-y)^\delta\,du;$$

les dérivées successives de cette intégrale par rapport à x, y auront pour expressions, à des facteurs constants près, des symboles analogues où, au lieu de γ, δ, on aura $\gamma-1$, $\delta-1$, $\gamma-2$, $\delta-2$, ...

Nous avons donc à porter, dans le système (2), les valeurs suivantes :

$$(32)\qquad \begin{cases} z=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}, \\ p=-\gamma\{\alpha,\beta,\gamma-1,\delta\}, \qquad q=-\delta\{\alpha,\beta,\gamma,\delta-1\}, \\ r=\gamma(\gamma-1)\{\alpha,\beta,\gamma-2,\delta\}, \qquad s=\gamma\delta\{\alpha,\beta,\gamma-1,\delta-1\}, \\ t=\delta(\delta-1)\{\alpha,\beta,\gamma,\delta-2\}. \end{cases}$$

Prenons par exemple la première équation du système (2) que nous écrirons $A(z)=0$ en posant

$$\begin{aligned} A(z)=&x(x-1)r+y(y-1)s \\ &-[(\alpha+\beta+2\gamma+\delta)x+\delta y-(\alpha+\gamma+\delta)]p+\gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)z. \end{aligned}$$

En y portant les valeurs (32), nous faisons entrer les coefficients de r, de s et de p sous les signes $\int$, et nous tenons compte des identités

$$\begin{aligned} x&=u-(u-x), \qquad x-1=(u-1)-(u-x), \\ y&=u-(u-y), \qquad y-1=(u-1)-(u-y), \\ &1=u-(u-1). \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi, après simplification, et quelle que soit la ligne (C),

$$\begin{aligned} A(\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\})=&\gamma(\alpha+1)\{\alpha,\beta+1,\gamma-1,\delta\}+\gamma(\beta+1)\{\alpha+1,\beta,\gamma-1,\delta\} \\ &+\gamma(\gamma-1)\{\alpha+1,\beta+1,\gamma-2,\delta\}+\gamma\delta\{\alpha+1,\beta+1,\gamma-1,\delta-1\} \\ =&\gamma[u^{\alpha+1}(u-1)^{\beta+1}(u-x)^{\gamma-1}(u-y)^{\delta}]_{(C)}. \end{aligned}$$

Ce dernier membre est donc à égaler à zéro.

Nous avons une autre condition, semblable à celle-ci, pour la deuxième équation du système (2). Quant à la troisième équation, elle est une conséquence des deux premières; elle est d'ailleurs satisfaite, comme nous l'avons vu, quel que soit (C).

La condition nécessaire et suffisante pour que $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ soit une solution de (2) est donc qu'on ait

$$\gamma[u^{\alpha+1}(u-1)^{\beta+1}(u-x)^{\gamma-1}(u-y)^{\delta}]_{(C)}=\delta[u^{\alpha+1}(u-1)^{\beta+1}(u-x)^{\gamma}(u-y)^{\delta-1}]_{(C)}=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\gamma[G(u)]_{(C)}=\delta[G(u)]_{(C)}=0,$$

ou encore, γ et δ n'étant pas nuls,

$$[G(u)]_{(C)}=0.$$

Le parcours de (C) *doit ainsi ramener la fonction* $G(u)$ *à sa valeur initiale.* Tels doivent être les chemins d'intégration de l'intégrale (1).

2. Intégrales élémentaires. — On peut construire divers chemins d'intégration remplissant cette condition. Les plus simples sont les doubles circuits, employés par Pochhammer ([6]), encadrant chacun deux points singuliers comme l'indique la figure :

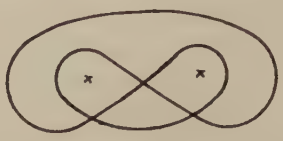

Fig. 7.

Pour les utiliser avec précision, soient A, B deux points fixes du plan u; traçons dans ce plan cinq coupures joignant le point A aux cinq points 0, 1, x, y, ∞. Soient I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 les valeurs de l'intégrale $\int G(u)\,du$ étendue à une ligne fermée, partant de B et y revenant, franchissant une seule des cinq coupures dans le sens de — à + (*fig.* 8), la valeur initiale de $G(u)$ au point B étant supposée donnée.

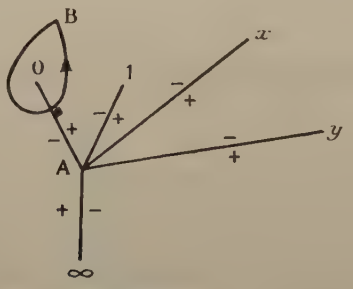

Fig. 8.

Les nombres 1, 2, 3, 4, 5 désignant ainsi les cinq circuits simples, nous désignerons par $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{5}$ les mêmes circuits parcourus en sens inverse. Les divers chemins d'intégration résultent de simples compositions de ces circuits; les doubles circuits de Pochhammer correspondent à celles de la forme $\bar{2}\,1\,2\,\bar{1}$, $\bar{3}\,1\,3\,1$, etc. Désignons par $I(2\,1\,2\,\bar{1})$, $I(3\,1\,3\,1)$, ... les intégrales ainsi obtenues.

Prenons la première, par exemple, de ces intégrales. Les deux points singuliers encadrés étant 0 et 1, posons

$$[0,\,1] = I(\bar{2}\,1\,2\,\bar{1}). \tag{33}$$

([6]) L. Pochhammer, *Ueber ein integral mit doppeltem Umlauf* (*Math. Ann.*, t. 35, 1890, p. 470 et suiv.).

Pour l'évaluer en fonction de I_1 et de I_2, remarquons que, d'une manière générale, λ *et* μ *désignant deux chemins fermés quelconques, et* $\lambda\mu$ *le chemin qui résulte de leur assemblage le second après le premier, on a*

$$I(\lambda\mu) = I(\lambda) + \varepsilon_\lambda I(\mu),$$

où ε_λ *est le facteur par lequel la fonction* $G(u)$ *se trouve multipliée par le parcours de* λ.

Il en résulte en particulier que l'intégrale $I(\bar{1})$, par exemple, n'est pas égale a $-I_1$, mais à $-\varepsilon_1^{-1} I_1$. On a, en effet,

$$I(\bar{1}\,1) = I(\bar{1}) + \varepsilon_1^{-1} I_1 = 0.$$

L'application à l'intégrale (33) donne ensuite

$$(34) \qquad [0,\,1] = -\varepsilon_2^{-1} I_2 + \varepsilon_2^{-1} I_1 + \varepsilon_2^{-1}\varepsilon_1 I_2 - I_1 = -\varepsilon_2^{-1}(1-\varepsilon_1) I_2 - (1-\varepsilon_2^{-1}) I_1.$$

Les cinq multiplicateurs ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, ε_5 ont les valeurs suivantes, évidentes :

$$(35) \qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = e^{2\pi i\alpha}, \quad \varepsilon_2 = e^{2\pi i\beta}, \quad \varepsilon_3 = e^{2\pi i\gamma}, \quad \varepsilon_4 = e^{2\pi i\delta}, \\ \varepsilon_5 = \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_3^{-1}\varepsilon_4^{-1} = e^{-2\pi i(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}. \end{cases}$$

Un cas classique est celui où les constances α, β, γ, δ sont telles qu'on puisse intégrer $G(u)$ jusqu'aux points singuliers. L'intégrale $[0,\,1]$ se réduit alors, à un facteur constant près, à $\int_0^1 G(u)\,du$. En effet,

$$[0,\,1] = \int_0^1 + \varepsilon_2^{-1}\int_1^0 + \varepsilon_2^{-1}\varepsilon_1\int_0^1 + \varepsilon_1\int_1^0,$$

d'où

$$[0,\,1] = (1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2^{-1})\int_0^1 G(u)\,du.$$

Cette relation, valable dans ce cas, nous conduit, dans le cas général où nous nous sommes placés, à remplacer l'intégrale $[0,\,1]$ par

$$(36) \qquad (0,\,1) = \frac{[0,\,1]}{(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2^{-1})}.$$

En posant de même

$$[1,\,0] = I(\bar{1}\,2\,1\,\bar{2}), \qquad (1,\,0) = \frac{[1,\,0]}{(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_1^{-1})},$$

nous avons, d'après (34),

$$(37) \qquad (0,\,1) = \frac{I_2}{1-\varepsilon_2} - \frac{I_1}{1-\varepsilon_1}, \qquad (1,\,0) = \frac{I_1}{1-\varepsilon_1} - \frac{I_2}{1-\varepsilon_2},$$

d'où, en particulier,

$$(1,\,0) = -(0,\,1),$$

ce qui constitue l'avantage de l'intégrale $(0, 1)$ sur $[0, 1]$, car $[1, 0]$ n'est pas égale à $-[0, 1]$.

A chaque paire de points singuliers, on peut ainsi faire correspondre une intégrale telle que (36), provenant d'un double circuit de Pochhammer. On aura en tout dix intégrales $(0, 1)$, $(0, x)$, $\ldots$, (y, ∞), solutions du système (2), intégrales que nous pouvons qualifier d'*élémentaires* : il n'est pas de chemin d'intégration plus simple qui conduise à une intégrale de $G(u)$ solution de (2), les intégrales I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, par exemple, n'étant pas solutions de (2).

Le système (2) étant d'ordre 3, il y aura, des dix intégrales élémentaires, trois au plus linéairement indépendantes. Des relations qui doivent lier les dix intégrales, les unes telles que

$$(0, 1) + (1, x) = (0, x),$$

découlent des formules (37) et de leurs analogues. Les autres relations proviennent d'une relation évidente qui existe entre les intégrales I_i elles-mêmes. Cette dernière dépend naturellement du système de coupures utilisé; dans le cas de la figure 8, elle s'écrit simplement, le chemin 1 2 3 4 5 étant évidemment réductible,

$$I(1\,2\,3\,4\,5) = 0,$$

donc

$$I_1 + \varepsilon_1 I_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 I_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 I_4 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 I_5 = 0. \tag{38}$$

Déduisons-en, par exemple, la relation linéaire qui doit exister entre les quatre intégrales $(0, \infty)$, $(1, \infty)$, (x, ∞), (y, ∞). Nous avons, d'après les expressions de celles-ci, de la forme (37),

$$I_1 = \frac{1-\varepsilon_1}{1-\varepsilon_5} I_5 - (1-\varepsilon_1)(0, \infty), \qquad I_2 = \frac{1-\varepsilon_2}{1-\varepsilon_5} I_5 - (1-\varepsilon_2)(1, \infty), \ldots.$$

En portant ces valeurs dans (38), nous obtenons, compte tenu de (35),

$$(1-\varepsilon_1)(0, \infty) + \varepsilon_1(1-\varepsilon_2)(1, \infty) + \varepsilon_1\varepsilon_2(1-\varepsilon_3)(x, \infty) + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(1-\varepsilon_4)(y, \infty) = 0. \tag{39}$$

Pour avoir entre les dix intégrales sept relations linéairement indépendantes, il suffira d'adjoindre à cette relation (39) les six suivantes, évidemment indépendantes :

$$\begin{aligned}
&(0, 1) + (1, x) = (0, x),\\
&(0, x) + (x, y) = (0, y),\\
&(1, x) + (x, y) = (1, y),\\
&(0, y) + (y, \infty) = (0, \infty),\\
&(1, y) + (y, \infty) = (1, \infty),\\
&(x, y) + (y, \infty) = (x, \infty).
\end{aligned}$$

3. Solutions propres des substitutions fondamentales. — Notre système de coupures n'est pas caractérisé par le seul ordre dans lequel se succèdent les

cinq coupures. Pour des valeurs *déterminées* de x et de y, deux figures telles que

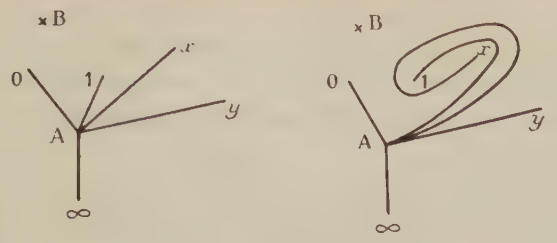

Fig 9

ne sont pas topologiquement réductibles l'une à l'autre.

Par contre, x et y étant supposées variables, on passe de la première figure à la deuxième en faisant faire à x un tour complet positif autour du point 1.

Les diverses déterminations d'une intégrale élémentaire correspondront donc aux divers systèmes de coupure ainsi obtenus. Pour passer d'une détermination à une autre, il est utile de décomposer en deux l'opération qui fait passer, par exemple, du premier système de coupures de la figure précédente au second. Désignons par ω_x l'opération élémentaire qui consiste à remplacer la coupure Ax par APx, et par ω_x celle qui remplace Ax par AQx : APx est un arc qui forme avec Ax une courbe fermée enveloppant la coupure qui *suit* Ax (et laissant à son extérieur les autres coupures et le point B); AQx, par contre, forme avec Ax une courbe fermée enveloppant la coupure qui *précède* Ax :

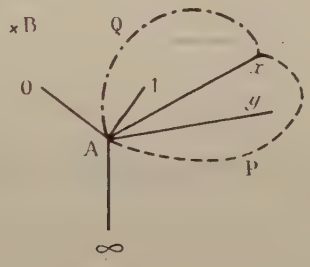

Fig. 10.

Les deux opérations ω_x et ω_x sont inverses l'une de l'autre : après l'opération ω_x, par exemple, la coupure A 1 qui précédait Ax devient celle qui suit Ax; l'opération ω_x ramène alors à la position primitive; on voit ainsi qu'on a $\omega_x\omega_x = 1$. On a de même $\omega_x\omega_x = 1$.

On définit de même quatre autres opérations analogues ω_0, ω_1, ω_y, ω_z. Ces cinq opérations élémentaires nous suffiront pour étudier les divers systèmes de coupures : on passe d'un système à un autre par un produit de ces opérations, chacune d'elles pouvant être élevée à une puissance entière positive ou

négative. On passe, par exemple, du premier système de la figure 9 au second par l'opération $\omega_1\omega_x$, et inversement, du second au premier, par $\bar{\omega}_x\bar{\omega}_1$.

Il est à remarquer que, par chacune de ces opérations, une seule des cinq intégrales I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 est changée et que c'est celle qui correspond, non à la coupure changée, mais à la suivante, celle qu'enveloppe la courbe fermée dont nous parlions. Prenons, par exemple, l'opération ω_0, qui consiste à remplacer AO par APO :

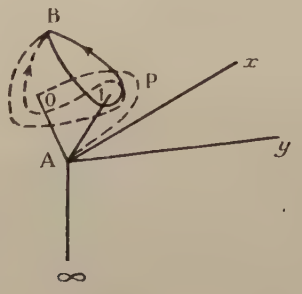

Fig. 11.

Les intégrales I_3, I_4, I_5 ne changent évidemment pas; I_1 non plus : le circuit simple 1 du système de coupures primitif reste utilisable dans le nouveau système. Le circuit simple 2, par contre, doit être remplacé par un autre, tracé en ligne pointillée dans la figure 11, et qui est un chemin $1\,2\,\bar{1}$; la nouvelle I_2 a donc pour valeur

$$I'_2 = I(1\,2\,\bar{1}) = I_1 + \varepsilon_1 I_2 - \varepsilon_2 I_1 = \varepsilon_1 I_2 + (1-\varepsilon_2) I_1,$$

d'où

$$\frac{I'_2}{1-\varepsilon_2} = \frac{I_2}{1-\varepsilon_2} - (1-\varepsilon_1)(0,1). \tag{40}$$

Il en résulte qu'en particulier l'intégrale $(0, 1)$ devient

$$(0,1)' = \frac{I'_2}{1-\varepsilon_2} - \frac{I'_1}{1-\varepsilon_1} = \frac{I_2}{1-\varepsilon_2} - (1-\varepsilon_2)(0,1) - \frac{I_1}{1-\varepsilon_1} = (0,1) - (1-\varepsilon_1)(0,1),$$

donc

$$(0,1)' = \varepsilon_1 (0,1).$$

En appliquant ensuite l'opération ω_1, on aura

$$(0,1)'' = \varepsilon_2 (0,1)' = \varepsilon_1 \varepsilon_2 (0,1).$$

Ainsi par l'opération $\omega_0\omega_1$, *l'intégrale* $(0, 1)$ *se reproduit multipliée par le facteur* $\varepsilon_1\varepsilon_2$.

Il est clair qu'on peut en dire autant des opérations $\omega_1\omega_x$, $\omega_x\omega_y$, $\omega_y\omega_\infty$, $\omega_\infty\omega_0$ et des intégrales $(1, x)$, (x, y), (y, ∞), $(0, \infty)$. Pour une intégrale telle

que (o, x), les deux coupures correspondantes AO et Ax, à la différence du cas précédent, ne se suivent pas; un tour positif fait par x autour du point O s'obtient par l'opération $\omega_x\omega_0\omega_x\omega_x$. Comme l'opération ω_x, ainsi que l'opération ω_x après $\omega_x\omega_0\omega_x$, ne modifie que I_2, l'intégrale (o, x) se reproduit toujours, multipliée par $\varepsilon_1\varepsilon_3$.

Les dix intégrales élémentaires possèdent ainsi la propriété suivante :

chacune d'elles se reproduit, multipliée par un facteur déterminé, lorsqu'un des deux points singuliers correspondants, supposé mobile, fait un tour autour de l'autre.

Prenons d'abord les six intégrales

$$(41) \qquad (o, 1), \quad (o, x), \quad (o, y), \quad (1, x), \quad (1, y), \quad (x, y).$$

Pour chacune d'elles, le tour de l'un des deux points singuliers autour de l'autre devient, dans l'espace à deux dimensions complexes du chapitre I, un tour fait par le point (x, y) autour d'un des six plans singuliers (11), ce qui engendre, comme nous l'avons vu, une de ces substitutions du groupe de monodromie du système (2) que nous avons qualifiées de fondamentales. Chacune des six intégrales (41) est donc une *solution propre* de la subtitution fondamentale correspondante, et nous connaissons, d'après ce qui précède, la *valeur propre* à laquelle elle appartient.

Ce raisonnement demande, il est vrai, une précision en ce qui concerne l'intégrale (o, 1). Le plus simple est de passer aux coordonnées homogènes : en désignant l'intégrale (1) par $F(x, y)$, on a

$$(42) \qquad F\left(\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}\right) = \int u^\alpha (u-1)^\beta \left(u - \frac{X}{T}\right)^\gamma \left(u - \frac{Y}{T}\right)^\delta du$$

$$= T^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1} \int v^\alpha (v-T)^\beta (v-X)^\gamma (v-Y)^\delta dv$$

en posant $v = Tu$. L'intégrale (1) se ramène ainsi à l'intégrale

$$(43) \qquad \int v^\alpha (v-T)^\beta (v-X)^\gamma (v-Y)^\delta dv,$$

où figure, à la place du point 1, le point singulier mobile T. Le tour que celui-ci fait autour de o correspond alors, évidemment, à un tour, dans l'espace à deux dimensions complexes, autour du plan $T = o$.

4. Autres solutions propres. — Reprenons, pour fixer les idées, l'intégrale (1, x) et la substitution fondamentale correspondante $S_{1,x}$ qui résulte de l'opération $\omega_1\omega_x$. Cette opération ne modifiant, comme nous l'avons vu, que I_2 et I_3, les intégrales (o, y), (y, ∞), (o, ∞) demeurent intactes et sont pour $S_{1,x}$ des solutions propres appartenant à la valeur propre 1. Comme on a

$$(o, y) + (y, \infty) = (o, \infty),$$

deux aux plus de ces solutions sont linéairement indépendantes; montrons qu'elles le sont effectivement :

La formule (40) et ses analogues montrent, en effet, que toute combinaison linéaire d'intégrales élémentaires devient une autre par chacune des substitutions fondamentales, et par conséquent par le groupe de monodromie lui-même. Si donc on laisse de côté le cas exceptionnel où le système (2), d'ordre 3, serait réductible à des systèmes d'ordre inférieur, trois des dix intégrales élémentaires doivent être linéairement indépendantes. Dès lors, si (o, y) et (y, ∞), par exemple, n'étaient pas linéairement indépendants, la relation qui les lierait constituerait, avec les sept relations du paragraphe 2, huit relations linéairement indépendantes, ce qui est impossible.

La valeur propre 1 de la substitution $S_{1,y}$ est donc *double :* les solutions propres qui lui appartiennent dépendent linéairement de deux constantes arbitraires.

Cette dernière propriété appartient à l'ensemble des substitutions fondamentales : *chacune d'elles admet deux valeurs propres, l'une simple et l'autre double*. Nous trouverons d'ailleurs dans la suite d'autres substitutions douées de cette propriété.

5. Retour au demi-domaine fondamental (Δ). — Partant des intégrales élémentaires, nous sommes arrivés aux substitutions fondamentales dont elles donnent les solutions propres. Inversement, on peut, comme nous allons le faire, partir du demi-domaine fondamental (Δ) du chapitre I et des substitutions fondamentales qui s'y rapportent et essayer de retrouver les intégrales élémentaires comme solutions propres de ces substitutions.

Il s'agit, en somme, de confronter deux procédés utilisés indépendamment l'un de l'autre jusqu'ici. Pour désigner avec précision les substitutions fondamentales, nous avons eu recours, successivement, d'une part au demi-domaine (Δ), et d'autre part à un système de coupures tracé dans le plan u, tel celui de la figure 8. Dans les deux cas, chacune des substitutions fondamentales résulte d'un tour autour d'un plan singulier dans l'espace à deux dimensions complexes; mais deux chemins qui contournent un même plan singulier ne se réduisent pas nécessairement l'un à l'autre; un examen plus détaillé est donc nécessaire.

Le demi-domaine (Δ) ayant été choisi comme nous l'avons fait, les six substitutions fondamentales $a_1^- a_2$, $a_2^- a_3$, ..., $a_3^+ a_6^-$, $a_6^- a_1$ déterminent, à des facteurs constants près, neuf solutions que voici :

D'abord leurs six solutions propres respectives à valeur propre simple :

$$z_{0xy}, \quad z_{1xy}, \quad z_{xxy}, \quad z_{1yy}, \quad z_{0y}, \quad z_{01}.$$

Ensuite, *il existe une solution propre, à valeur propre double, commune aux substitutions* $a_6^+ a_1^-$, $a_1^+ a_2^-$, $a_2^+ a_3^-$, *qui sont les trois substitutions fondamentales autour*

du point triplement singulier $X = T = 0$, solution que nous désignerons par z_{yx}. Cette propriété sera établie dans un instant.

Il en est de même des points triples $X = Y = T$, $Y = T = 0$; nous désignerons par z_{0x} la solution propre à valeur propre double commune aux substitutions $a_2^+ a_3^-$, $a_4^+ a_5^-$, $a_1^+ a_3^-$, et par z_{xy} celle commune aux substitutions $a_1^+ a_5^-$, $a_3^+ a_6^-$, $a_6^+ a_1^-$.

Par contre, pour le point triple $X = Y = 0$, *il n'existe pas de solution propre, à valeur propre double, commune aux substitutions* $a_1^+ a_2^-$, $a_3^+ a_4^-$, $a_5^+ a_6^-$. La dissymétrie ainsi introduite entre les quatre points triples caractérise notre choix du demi-domaine (Δ).

Pour identifier ces solutions à des intégrales élémentaires, reprenons le système de coupures de la figure 8 en y marquant cette fois l'axe réel :

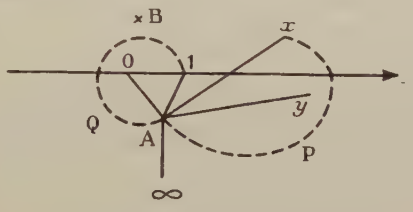

Fig. 12.

Pour obtenir les substitutions $a_1^+ a_2^-$, $a_2^+ a_3^-$, ..., $a_6^+ a_1^-$, utilisons les résultats du chapitre I (§ 11) : en posant

$$y = ax + b, \tag{23}$$

où les nombres réels a et b vérifient les inégalités

$$a < 0, \quad b > 0, \quad a + b - 1 > 0, \tag{24}$$

on obtient les substitutions en question en faisant tourner x autour des points

$$0, \quad 1, \quad \frac{b}{1-a}, \quad \frac{1-b}{a}, \quad \frac{-b}{a}, \quad \infty.$$

Le plan analytique réel (23) étant un plan (7, 8), la région 7, qui appartient à (Δ), correspond aux valeurs de x de partie imaginaire positive, ce qui donne à y, d'après (24), une partie imaginaire négative. Pour partir d'un point intérieur à (Δ), nous avons donc eu raison, dans la figure 12, de placer x au demi-plan supérieur et y à l'inférieur.

Cela étant, cherchons successivement les neuf solutions en vue :

1° z_{0x} et z_{1x}. — Quand x s'approche de 0 sans sortir du demi-plan supérieur, y s'approche d'un point de l'axe réel distinct de 0; le tour fait par x autour de 0 donne ainsi simplement l'intégrale $(0, x)$ comme solution propre à valeur

propre simple de la substitution correspondante, ce qui identifie z_{0x} à $(0, x)$, à un facteur constant près. Il en est de même de z_{1x} et de $(1, x)$. On peut donc poser

$$z_{0x} = (0, x), \qquad z_{1x} = (1, x).$$

2° z_{xy}. — Quand x s'approche du point $\frac{b}{1-a}$ de l'axe réel, y s'approche du même point; l'abscisse de ce point étant supérieure à 1 d'après (24), z_{xy} s'identifie à (x, y) :

$$z_{xy} = (x, y).$$

3° z_{01}. — Pour avoir la substitution $a_6^- a_1$, on peut passer aux coordonnées homogènes et, au lieu de faire tourner x autour de l'infini, regarder le point 1 comme mobile et le faire tourner autour de 0. Plus exactement, remplaçons les lettres 1, x, y de la figure 12 par T, X, Y. X étant supposé fixe, Y est fonction de T seul :

$$Y = aX + bT.$$

Quand T s'approche de 0 le long de l'axe réel, X et Y restent distants de l'origine; le tour fait par T autour de 0 conduit ainsi à l'intégrale $(0, 1)$; on peut donc poser

$$z_{01} = (0, 1).$$

4° $z_{y\infty}$. — Le système de coupure de la figure 12 met en évidence que l'intégrale (y, ∞) ne change pas de valeur lorsqu'on fait tourner, soit x autour de 0 ou de 1, soit T autour de 0, opérations qui donnent, comme nous venons de le voir, les substitutions $a_1^+ a_2^-$, $a_2^+ a_3^-$, $a_6^+ a_1^-$. Ces substitutions admettent donc, comme nous l'avons annoncé, une solution propre commune et qui n'est autre que (y, ∞), à un facteur constant près; on peut donc poser

$$z_{y\infty} = (y, \infty).$$

Pour chacune des trois substitutions, cette solution propre appartient à la valeur propre 1, qui est bien double d'après le paragraphe précédent

5° z_{1y} et $z_{0\infty}$. — Pour obtenir de même les substitutions $a_4^+ a_5^-$ et $a_5^+ a_6^-$, d'autres systèmes de coupures sont nécessaires. Remplaçons d'abord la coupure Ax par APx (*fig.* 12), ce qui change I_4 en I'_4 ;

$$\frac{I'_4}{1-\varepsilon_4} = \frac{I_4}{1-\varepsilon_4} - (1-\varepsilon_3)(x, y).$$

Le point y peut alors s'approcher de 1 sans sortir du demi-plan inférieur; z_{1y} s'identifie ainsi à $(1, y)'$ et z_0 à $(0, \infty)'$. On aura

$$z_{1y} = (1, y)' = (1, y) - (1-\varepsilon_3)(x, y),$$
$$z_{0\infty} = (0, \infty)' = (0, \infty).$$

6° z_{0y} et z_{xc}. — Remplaçons *ensuite* la coupure A 1 par AQ 1 (*fig.* 12); on aura

$$\frac{I_1''}{1-\varepsilon_1} = \frac{I_1'}{1-\varepsilon_1} - (1-\varepsilon_2^{-1})(0,1)',$$

$$z_{0y} = (0,y)'' = (0,y)' + (1-\varepsilon_2^{-1})(0,1)' = (0,y) - (1-\varepsilon_3)(x,y) + (1-\varepsilon_2^{-1})(0,1),$$

$$z_{x\infty} = (x,\infty)'' = (x,\infty)' = (x,\infty).$$

Conclusion : *Des neuf solutions envisagées, les deux seules qui ne soient pas identiques aux intégrales élémentaires correspondantes sont* z_{1y} *et* z_{0y}; *elles ont pour valeurs*

$$(44) \qquad \begin{cases} z_{1y} = (1,y) - (1-\varepsilon_3)(x,y), \\ z_{0y} = (0,y) - (1-\varepsilon_3)(x,y) + (1-\varepsilon_2^{-1})(0,1). \end{cases}$$

6. Relations de permutabilité. — Les six intégrales z_{0x}, z_{1x}, z_{xy}, z_{1y}, z_{0y}, z_{01}, solutions propres à valeur propre simple des six substitutions correspondantes

$$(45) \qquad \begin{cases} S_{0x} = a_1^+ a_2^-, & S_{1x} = a_2^+ a_3^-, & S_{xy} = a_3^+ a_4^-, \\ S_{1y} = a_4^+ a_5^-, & S_{0y} = a_5^+ a_6^-, & S_{01} = a_6^+ a_1^-. \end{cases}$$

sont des solutions propres à valeur propre double des mêmes substitutions prises dans un ordre différent. Un système de coupures approprié met en évidence cette propriété. Prenons, par exemple, les deux substitutions S_{0x} et S_{1y} auxquelles correspondent les solutions z_{0x} et z_{1y}. Un système de coupures tel que le suivant :

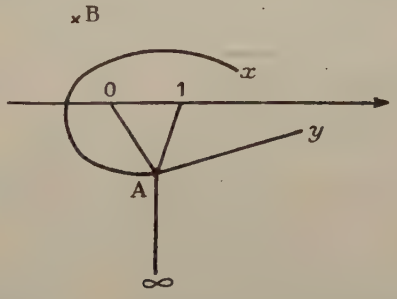

Fig. 13.

définit les mêmes solutions z_{0x} et z_{1y} qu'au paragraphe précédent, à des facteurs constants près; on voit ainsi que z_{0x} ne change pas lorsque y tourne autour de 1, ni z_{1y} lorsque x tourne autour de 0. Chacune des deux substitutions S_{0x}, S_{1y} admet ainsi comme solution propre à valeur propre double la solution propre à valeur propre simple de l'autre, *ce qui assure leur permutabilité*. On a, en effet, en z_{0x} et z_{1y} deux solutions propres, linéairement indépendantes, communes à S_{0x} et à S_{1y}. Une troisième solution propre commune s'obtient ensuite de la manière suivante : toute combinaison linéaire de z_{1y} et de z_{xc} est propre

pour S_{0x}, et toute combinaison linéaire de z_{0x} et de z_{xx}, pour S_{1y}; comme il existe une relation linéaire entre les quatre solutions z_{1y}, z_{yx}, z_{0x}, z_{xx}, on peut l'écrire

$$az_{1y} + bz_{yx} = cz_{0x} + dz_{xx},$$

mettant ainsi en évidence une solution propre, à valeur propre double, commune aux deux substitutions. Celles-ci ont ainsi en commun trois solutions propres linéairement indépendantes, ce qui suffit, comme on sait, pour qu'elles soient permutables.

On retrouve ainsi les relations de permutabilité du chapitre I, celles du type (30) :

$$(46)\quad \begin{cases} S_{0x}S_{1y} = S_{1y}S_{0x} & \text{ou} \quad (a_1^+a_2^-)(a_4^+a_3^-) = (a_4^+a_3^-)(a_1^+a_2^-), \\ S_{1x}S_{0y} = S_{0y}S_{1x} & \text{ou} \quad (a_2^+a_5^-)(a_3^+a_6^-) = (a_3^+a_6^-)(a_2^+a_5^-), \\ S_{xy}S_{01} = S_{01}S_{xy} & \text{ou} \quad (a_3^+a_4^-)(a_6^+a_1^-) = (a_6^+a_1^-)(a_3^+a_4^-). \end{cases}$$

7. Autres relations de permutabilité. — On obtient de même, avec un calcul beaucoup plus long, les relations de permutabilité du type (29). Prenons, par exemple, les substitutions S_{01}, S_{0x}, S_{1x} qui ont respectivement pour solution propre à valeur propre simple z_{01}, z_{0x}, z_{1x}, et qui ont en commun, comme nous l'avons vu, la solution propre à valeur propre double z_{yx}. Comme deuxième solution propre à valeur propre double, on peut prendre z_{xx} pour S_{01}, z_{0x} pour S_{1x} et, pour S_{0x}, soit

$$z_{1y} = (1, y) - (1 - \varepsilon_3)(x, y),$$

soit une combinaison linéaire de z_{1y} et de z_{yx} ne se réduisant pas à z_{yx}, telle que

$$(1, \infty)' = (1, \infty) - (1 - \varepsilon_3)(x, \infty);$$

c'est cette dernière que nous prendrons.

On a ainsi les solutions propres suivantes :

	Valeur propre simple.	Valeur propre double.
S_{01}	$(0, 1)$	(x, ∞), (y, ∞)
S_{0x}	$(0, x)$	$(1, \infty)'$, (y, ∞)
S_{1x}	$(1, x)$	$(0, \infty)$, (y, ∞)

Les relations linéaires qui font passer des solutions d'une ligne à celles d'une autre se déterminent sans difficulté, grâce à (39). Les voici :

1° Passage des solutions propres de S_{01} à celles de S_{0x} :

$$(1 - \varepsilon_1\varepsilon_3)(0, 1) = (1 - \varepsilon_3)(0, x) - (1 - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)(1, \infty)' - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3^2(1 - \varepsilon_4)(y, \infty),$$
$$(1 - \varepsilon_1\varepsilon_3)(x, \infty) = -(1 - \varepsilon_1)(0, x) - \varepsilon_3(1 - \varepsilon_2)(1, \infty)' - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(1 - \varepsilon_4)(y, \infty);$$

2° Passage des solutions propres de S_{0x} à celles de S_{1x} :

$$\varepsilon_1(1 - \varepsilon_2\varepsilon_3)(0, x) = \varepsilon_1(1 - \varepsilon_2)(1, x) + (1 - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)(0, \infty) + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(1 - \varepsilon_4)(y, \infty),$$
$$\varepsilon_1(1 - \varepsilon_2\varepsilon_3)(1, \infty)' = \varepsilon_1(1 - \varepsilon_3)(1, x) - \varepsilon_3(1 - \varepsilon_1)(0, \infty) - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3^2(1 - \varepsilon_4)(y, \infty);$$

3° Passage des solutions propres de S_{1x} à celles de S_{01} :

$$(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)(1, x) = -(1-\varepsilon_1)(0, 1) - (1-\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)(x, \infty) - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(1-\varepsilon_4)(y, \infty),$$
$$(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)(0, \infty) = \varepsilon_1(1-\varepsilon_2)(0, 1) - \varepsilon_1\varepsilon_2(1-\varepsilon_3)(x, \infty) - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(1-\varepsilon_4)(y, \infty).$$

Ces formules nous suffisent pour calculer les transformées des solutions $(0, 1)$ et (x, ∞) par la substitution $S_{0x}S_{1x}$, compte tenu des valeurs propres de S_{0x} qui sont ε_1 ε_3 et 1, et de celles de S_{1x} qui sont ε_2 ε_3 et 1. Le résultat remarquable en est que *par la substitution* $S_{0x}S_{1x}$, $(0, 1)$ *se transforme en* $\varepsilon_3(0, 1)$, *et* (x, ∞) *en*

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(x, \infty) - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(1-\varepsilon_4)(y, \infty).$$

Il en résulte que les substitutions S_{01} et $S_{0x}S_{1x}$ possèdent en commun, outre les solutions propres $(0, 1)$ et (y, ∞), une solution propre de la forme

$$(x, \infty) + \lambda(y, \infty),$$

où λ est une constante. Cette solution se transforme en effet, par $S_{0x}S_{1x}$, en

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(x, \infty) - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(1-\varepsilon_4)(y, \infty) + \lambda(y, \infty);$$

elle se reproduira multipliée par ε_1 ε_2 ε_3 si l'on a

$$-\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(1-\varepsilon_4) + \lambda = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\lambda,$$

ce qui donne, dans l'hypothèse générale ε_1 ε_2 $\varepsilon_3 \neq 1$,

$$\lambda = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(1-\varepsilon_4):(1-\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3).$$

On a ainsi trois solutions propres, linéairement indépendantes, communes à S_{01} et à $S_{0x}S_{1x}$, avec les valeurs propres suivantes (7) :

	$(0, 1)$.	$(1-\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)(x, \infty)$ $+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(1-\varepsilon_4)(y, \infty)$.	(y, ∞).
S_{01}	$\varepsilon_1\varepsilon_2$	1	1
$S_{0x}S_{1x}$	ε_3	$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$	1

Les substitutions S_{01} et $S_{0x}S_{1x}$ sont donc permutables, ce qui donne

$$S_{01}S_{0x}S_{1x} = S_{0x}S_{1x}S_{01}.$$

8. Équations de Pochhammer. — On peut adjoindre à cette dernière relation d'autres semblables obtenues de la même manière; on aura ainsi

$$(47)\quad \begin{cases} S_{y\infty} = S_{01}S_{0x}S_{1x} = S_{0x}S_{1x}S_{01} = S_{1x}S_{01}S_{0x}, \\ S_{0\infty} = S_{1x}S_{xy}S_{1y} = S_{xy}S_{1y}S_{1x} = S_{1y}S_{1x}S_{xy}, \\ S_{x\infty} = S_{1y}S_{0y}S_{01} = S_{0y}S_{01}S_{1y} = S_{01}S_{1y}S_{0y}, \end{cases}$$

en désignant par $S_{y\infty}$, $S_{0\infty}$, $S_{x\infty}$ les substitutions-produits qui en résultent, substitutions qui ont chacune, comme les substitutions qui les composent, *une*

(7) Au facteur ε_3 près pour celles de S_{01}, d'après la formule (42).

valeur propre simple et une valeur propre double. En effet, les trois solutions propres du paragraphe précédent, communes aux substitutions S_{01} et $S_{0x}\,S_{1x}$, restent propres pour le produit $S_{y\infty}$ de celles-ci, les valeurs propres se multipliant simplement, ce qui donne à $S_{y\infty}$ la valeur propre double $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3$ et la valeur propre simple 1.

La solution propre à valeur propre simple de $S_{y\infty}$ n'est autre que $z_{y\infty}$; celles de $S_{0\infty}$ et de $S_{x\infty}$ sont de même $z_{0\infty}$ et $z_{x\infty}$.

On rencontre les substitutions (47) quand on considère certaines équations de Fuchs qui sont des cas limites de celles du chapitre I (§ 10 et suiv.). Reprenant le plan analytique (23), faisons tendre, par exemple, a vers zéro, ce qui conduit au plan $y=b$, avec $b>1$, d'après (24). La fonction

$$\int u^{\alpha}(u-1)^{\beta}(u-x)^{\gamma}(u-ax-b)^{\delta}\,du$$

tend vers

$$\int u^{\alpha}(u-1)^{\beta}(u-x)^{\gamma}(u-b)^{\delta}\,du; \tag{48}$$

des six points singuliers

$$0,\quad 1,\quad \frac{b}{1-a},\quad \frac{1-b}{a},\quad \frac{-b}{a},\quad \infty,$$

les trois derniers vont se confondre dans le seul point ∞; le produit des trois substitutions fondamentales correspondantes donnera la substitution fondamentale limite relative à ∞.

Les quatre substitutions fondamentales provenant des quatre points singuliers 0, 1, b, ∞ de (48) sont donc, par conséquent, S_{0x}, S_{1x}, S_{xy}, $S_{x\infty}$; chacune d'elles possède, d'après ce qui précède, deux valeurs propres, une simple et une double, propriété caractéristique d'une classe d'équations de Fuchs que Pochhammer [8] a étudiée : l'équation de Fuchs qui résulte ainsi du système (2) moyennant la relation $y=b$ est une équation de Pochhammer.

Il en sera ainsi lorsqu'on considère, au lieu du plan $y=b$, un plan analytique réel quelconque passant par un des points triplement singuliers (12).

9. Compléments et conclusion. — Il nous reste à mettre en évidence les rôles symétriques des cinq indices 0, 1, x, y, ∞. Comme nous venons de le voir, les solutions propres z_{yx}, $z_{0\infty}$, $z_{x\infty}$, qui proviennent de valeurs propres doubles des substitutions (45), correspondent aux valeurs propres simples de S_{yx}, S_{0x}, $S_{x\infty}$. Réciproquement, les six autres solutions, à valeur propre simple, peuvent être déterminées comme solutions propres à valeur propre double. Ainsi z_{01} qui est propre pour S_{yx} d'après le paragraphe 7, et de même pour S_{xx}, est propre en

[8] L. Pochhammer, *Ueber hypergeometrische Functionen n-ter ordnung* (*Journal de Crelle*, t. 71, 1869, p. 316 et suiv.).

même temps pour la substitution S_{xy} avec laquelle S_{01} est permutable (deux substitutions permutables étant données, toute solution propre à valeur propre simple de l'une est aussi propre pour l'autre); il existe donc une solution propre, à valeur propre double, commune à S_{xy}, $S_{x\infty}$, $S_{y\infty}$ et qui n'est autre que z_{01}. Les solutions propres z_{1x} et z_{1y} sont de même communes respectivement à S_{0y}, $S_{0\infty}$, $S_{y\infty}$ et à S_{0x}, $S_{0\infty}$, $S_{x\infty}$.

On vérifie d'ailleurs sans difficulté, compte tenu de (45), les relations suivantes, analogues à (47) :

$$(49)\qquad \begin{cases} S_{y\infty}S_{xy}S_{x\infty} = S_{xy}S_{x\infty}S_{y\infty} = S_{x\infty}S_{y\infty}S_{xy} = S_{01}, \\ S_{0\infty}S_{0y}S_{y\infty} = S_{0y}S_{y\infty}S_{0\infty} = S_{y\infty}S_{0\infty}S_{0y} = S_{1x}, \\ S_{x\infty}S_{0x}S_{0\infty} = S_{0x}S_{0\infty}S_{x\infty} = S_{0\infty}S_{x\infty}S_{0x} = S_{1y}. \end{cases}$$

Pour z_{0x}, z_{xy}, z_{0y}, elles sont communes respectivement à S_{1y}, $S_{y\infty}$, à S_{01}, $S_{0\infty}$ et à S_{1x}, $S_{x\infty}$.

Les trois substitutions S_{0x}, S_{xy}, S_{0y}, comme nous l'avons déjà remarqué, n'ont pas, en général, de solution propre en commun. Deux quelconques d'entre elles ayant toujours en commun une solution propre à valeur propre double, soient respectivement z'_{1x}, z''_{1x}, z'''_{1x} celles communes à S_{xy}, S_{0y} à S_{0y}, S_{0x} et à S_{0x}, S_{xy}. On les calcule en fonction d'intégrales élémentaires en choisissant convenablement, comme nous avons eu déjà l'occasion de le faire, certains systèmes de coupures intermédiaires, détails dans lesquels nous n'entrerons pas. On trouve ainsi

$$(50)\qquad \begin{cases} z'_{1\infty} = (1, \infty), \\ z''_{1\infty} = (1, \infty) - (1 - \varepsilon_2)(x, \infty), \\ z'''_{1\infty} = (1, \infty) - (1 - \varepsilon_1^{-1})(0, \infty). \end{cases}$$

Prenons, par exemple, $z''_{1\infty}$, solution propre commune à S_{0x} et à S_{0y}. Sans être propre pour S_{xy}, elle l'est pour une certaine transformée de S_{xy}. Posons, en effet,

$$(51)\qquad \Sigma_{xy} = S_{1y}^{-1}S_{xy}S_{1y} = S_{1x}S_{xy}S_{1x}^{-1},$$

l'égalité des deux derniers membres résultant simplement de (47). On a, compte tenu de (45),

$$\begin{aligned} S_{0y}^{-1}\Sigma_{xy}S_{0y} &= (a_6^+a_5^-)(a_5^+a_4^-)(a_3^+a_4^-)(a_4^+a_5^-)(a_5^+a_6^-) \\ &= (a_6^+a_5^-)(a_5^+a_4^-)(a_5^+a_2^-)(a_2^+a_1^-)(a_1^+a_6^-) \\ &= (a_6^+a_5^-)(a_5^+a_4^-)(a_1^+a_6^-)(a_3^+a_2^-)(a_2^+a_1^-) \\ &= (a_1^+a_6^-)(a_6^+a_5^-)(a_5^+a_4^-)(a_3^+a_2^-)(a_2^+a_1^-) \\ &= (a_1^+a_2^-)(a_2^+a_3^-)(a_3^+a_4^-)(a_3^+a_2^-)(a_2^+a_1^-) \\ &= S_{0x}\Sigma_{xy}S_{0x}^{-1}, \end{aligned}$$

d'où

$$\Sigma_{xy}S_{0y}S_{0x} = S_{0y}S_{0x}\Sigma_{xy}.$$

La solution z''_{1x}, étant propre pour S_{0x} et pour S_{0y}, est aussi propre pour $S_{0y}S_{0x}$.

Cette dernière substitution n'a plus, dans le cas général auquel nous nous bornerons, de valeur propre double; toutes ses solutions propres le seront en même temps pour Σ_{xy} avec laquelle elle est permutable; il en sera ainsi, en particulier, de z''_{1x}.

En posant

$$(52)\qquad \begin{cases} \Sigma_{0x} = S_{1x}^{-1} S_{0x} S_{1x} = S_{01} S_{0x} S_{01}^{-1}, \\ \Sigma_{0y} = S_{01}^{-1} S_{0y} S_{01} = S_{1y} S_{0y} S_{1y}^{-1}, \end{cases}$$

on démontre de même d'autres relations de permutabilité; on arrive ainsi aux substitutions suivantes

$$(53)\qquad \begin{cases} S'_{1\infty} = \Sigma_{0x} S_{xy} S_{0y} = S_{xy} S_{0y} \Sigma_{0x} = S_{0y} \Sigma_{0x} S_{xy}, \\ S''_{1\infty} = S_{0x} \Sigma_{xy} S_{0y} = \Sigma_{xy} S_{0y} S_{0x} = S_{0y} S_{0x} \Sigma_{xy}, \\ S'''_{1\infty} = S_{0x} S_{xy} \Sigma_{0y} = S_{xy} \Sigma_{0y} S_{0x} = \Sigma_{0y} S_{0x} S_{xy}. \end{cases}$$

Ces substitutions, que nous adjoindrons aux substitutions (45) et (47), possèdent chacune, comme celles-ci, une valeur propre simple et une valeur propre double; leurs solutions propres à valeur propre simple ne sont autre que z'_{1x}, z''_{1x}, z'''_{1x}.

On vérifie enfin

$$(54)\qquad \begin{cases} S_{y\infty} S_{1y} S''_{1\infty} = S_{1y} S''_{1\infty} S_{y\infty} = S''_{1\infty} S_{y\infty} S_{1y} = S_{0x}, \\ S'''_{1\infty} S_{1y} S_{y\infty} = S_{1y} S_{y\infty} S'''_{1\infty} = S_{y\infty} S'''_{1\infty} S_{1y} = S_{0x}, \end{cases}$$

ainsi que les relations analogues pour S_{xy} et S_{0y}, ce qui donne, avec (47), (49) et (53), quinze groupes de trois relations décomposant en trois chacune des douze substitutions (45), (47) et (53).

Ces relations, qui proviennent de relations de permutabilité du type (29), contiennent toutes celles du type (30). La première ligne, par exemple, de (47) donne immédiatement

$$S_{y\infty} S_{01} = S_{01} S_{y\infty}, \qquad S_{y\infty} S_{0x} = S_{0x} S_{y\infty}, \qquad S_{y\infty} S_{1x} = S_{1x} S_{y\infty}.$$

On résume les résultats ainsi obtenus en disant que *deux substitutions sans indice commun sont permutables, les seules exceptions à cette règle étant*

$$S'_{1\infty} \text{ et } S_{0x}; \qquad S''_{1\infty} \text{ et } S_{xy}; \qquad S'''_{1\infty} \text{ et } S_{0y}.$$

Pour conclure, faisons remarquer que les cinq indices 0, 1, x, y, ∞, dont nous venons de rendre les rôles aussi symétriques que possible, gardent une certaine dissymétrie inévitable caractéristique, comme nous l'avons vu, du demi-domaine (Δ). La combinaison $1\,\infty$ donne trois substitutions au lieu d'une, ce qui fait correspondre, aux *dix* combinaisons de deux indices, *douze* substitutions, et *douze* intégrales, solutions propres à valeur propre simple des substitutions correspondantes.

Les mêmes intégrales donnent les solutions propres à valeur propre double des substitutions d'indices différents. Il en résulte, en particulier, que *des*

douze solutions considérées, trois quelconques qui ne prennent ensemble que trois indices distincts sont liés linéairement, les seules exceptions à cette règle étant

$$z_{0xy},\quad z_{xyy},\quad z_{0y};\qquad z'_{1x},\quad z_{11},\quad z_{yz};\qquad z''_{1x},\quad z_{01},\quad z_{0z};\qquad z'''_{1x},\quad z_{1yz},\quad z_{xyz}.$$

CHAPITRE III.

Points caractéristiques.

1. Solutions propres et vecteurs propres. — Soient données trois solutions fondamentales z_1, z_2, z_3. Chaque substitution S du groupe de monodromie remplace ces solutions par trois autres :

$$C_{i1}z_1 + C_{i2}z_2 + C_{i3}z_3 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

qui sont trois autres de leurs déterminations. Elle fait correspondre à un système de valeurs prises par z_1, z_2, z_3 en un point, un autre système de valeurs prises au même point par les mêmes solutions, système qui résulte du premier par la matrice $\|C_{ik}\|$. Lorsqu'on regarde les valeurs de z_1, z_2, z_3 comme coordonnées d'un vecteur dans un espace à trois dimensions complexes, on aura ainsi en S une transformation de vecteur en vecteur.

Les vecteurs propres de S, qu'il ne faut pas confondre avec ses solutions propres, se rattachent à celles-ci de la manière suivante :

Bornons-nous au cas, qui seul nous intéressera, où il existe trois solutions propres linéairement indépendantes, que les valeurs propres correspondantes soient distinctes ou non. Z_1, Z_2, Z_3 désignant ces solutions, combinaires linéaires des solutions fondamentales, on peut écrire

$$Z_i = \sum_k \alpha_{ik} z_k,$$

d'où, le déterminant $|\alpha_{ik}|$ n'étant pas nul,

$$z_i = \sum_k \beta_{ik} Z_k. \tag{55}$$

Les solutions Z_1, Z_2, Z_3 étant propres, on a

$$\sum_{j,k} \alpha_{ij} C_{jk} z_k = s_i \sum_k \alpha_{ik} z_k = s_i Z_i,$$

en désignant par s_i les valeurs correspondantes. Il en résulte

$$\sum_{i,j,k} \beta_{hi}\alpha_{ij} C_{jk} z_k = \sum_k C_{hk} z_k = \sum_{k,i} C_{hk}\beta_{ki} Z_i = \sum_i \beta_{hi} s_i Z_i,$$

ce qui donne, grâce à l'indépendance linéaire de Z_1, Z_2, Z_3,

$$\sum_k C_{hk}\beta_{kl} = \beta_{hl}s_l.$$

On voit que *les vecteurs* $(\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i})$ *sont propres et appartiennent aux mêmes valeurs propres que* Z_i.

Donnons-nous maintenant deux substitutions du groupe de monodromie S et S', *permutables*, ayant chacune trois solutions propres linéairement indépendantes : Z_i; Z'_i. *Montrons que l'indépendance linéaire des solutions propres* Z_1 *et* Z'_1, *supposées à valeur propre simple, entraîne celle des vecteurs propres correspondants.*

En effet, les substitutions S et S' étant permutables, toute solution propre à valeur propre simple de l'une est aussi propre pour l'autre; elles ont donc en commun les solutions propres Z_1 et Z'_1. Soit Z pour S, et Z' pour S', une troisième solution propre linéairement indépendante de Z_1, Z'_1. La solution Z, par exemple, est à valeur propre simple ou, au contraire, double. Dans la première hypothèse, elle est propre aussi bien pour S' que pour S. Dans la deuxième hypothèse, elle ne peut appartenir qu'à la valeur propre de Z'_1, Z_1 étant à valeur propre simple.

On raisonne de même ponr Z'.

Il reste le cas où les solutions Z et Z', à valeur propre double l'une et l'autre, appartiennent la première à la valeur propre de Z'_1 et la deuxième à celle de Z_1. La relation linéaire qui existe entre les quatre solutions Z, Z', Z_1, Z'_1 peut alors s'écrire

$$aZ + bZ'_1 = cZ' + dZ_1,$$

où les coefficients *a* et *c* ne sont pas nuls et où l'on a au premier membre une solution propre de S et au second membre une solution propre de S'.

Il existe ainsi dans tous les cas, outre les solutions Z et Z', une troisième solution propre commune à S et à S', linéairement indépendante, solution que nous désignerons par Z''. Dès lors, les relations

$$z_l = \beta_{l1}Z_1 + \beta'_{l1}Z'_1 + \beta''_l Z''$$

donnent trois vecteurs propres, linéairement indépendants, communs à S et à S' : (β_{i1}), (β'_{i1}), (β''_i). Les solutions Z_1 et Z'_1 étant à valeur propre simple la première pour S et la deuxième pour S', les vecteurs correspondants ne sont autres que (β_{i1}) et (β'_{i1}), ce qui prouve leur indépendance linéaire.

2. Espace des fonctions. — Comme nous l'avons vu dans l'introduction, nous cherchons à étendre, aux solutions du système (2), certaines propriétés des fonctions de Schwarz, rapports de deux solutions fondamentales d'une équation différentielle de Gauss. Ce sont donc, non les solutions z_1, z_2, z_3, mais les rapports mutuels de ces solutions qui nous intéresseront. Nous avons regardé z_1,

z_2, z_3 comme composantes d'un vecteur ; *nous les regarderons désormais comme coordonnées homogènes d'un point dans un espace projectif à deux dimensions complexes :* c'est l'espace des fonctions, l'espace des variables étant celui du chapitre I.

A tout point de l'espace des variables, les solutions z_i font correspondre, dans l'espace des fonctions, autant de points qu'elles admettent de déterminations différentes, points qui se déduisent les uns des autres par les substitutions du groupe de monodromie, *transformations homographiques* de l'espace à deux dimensions complexes.

On appelle *points caractéristiques* d'une homographie les points laissés fixes par celle-ci. Les vecteurs propres des substitutions deviennent ainsi les points caractéristiques des homographies, points qui ne sont pas toujours isolés : lorsque deux points (β_{i1}) et (β_{i2}), caractéristiques d'une même substitution, appartiennent à la même valeur propre, tout point de la forme $(\beta_{i1} + \lambda\beta_{i2})$ est, en effet, caractéristique; à toute valeur propre double correspondra un *plan analytique caractéristique*, tous les points de ce dernier étant caractéristiques.

L'application aux douze substitutions du chapitre II donne à chacune d'elles un plan caractéristique, en plus d'un point caractéristique isolé par lequel il ne passe pas. Soient P_{0x}, P_{1x}, ... ; Π_{0x}, Π_{1x}, ... les douze points et les douze plans analytiques ainsi obtenus. Deux substitutions sans indice commun étant permutables, sauf les cas exceptionnels indiqués au chapitre II (§ 9), il en résulte que *le plan caractéristique de l'une passe par le point caractéristique de l'autre.* Prenons, en effet, par exemple, les subtitutions $S_{0\infty}$ et S_{1x}. Comme conséquence de leur permutabilité, tout point caractéristique à valeur propre simple de l'une est aussi caractéristique de l'autre ; elles ont donc en commun les points caractéristiques P_{0x} et P_{1x}, points qui sont distincts d'après le paragraphe précédent, les solutions $z_{0\infty}$ et z_{1x} étant linéairement indépendantes. Le point $P_{0\infty}$, ne pouvant pas ainsi se placer en P_{1x}, ne peut être caractéristique de S_{1x} que contenu par Π_{1x}. Le point P_{1x} est de même contenu par $\Pi_{0\infty}$.

Un plan analytique étant déterminé par deux de ses points, on voit que ni les douze points ni les douze plans ne peuvent être donnés arbitrairement et que, de plus, on peut déduire ceux-ci de ceux-là et inversement. Six des plans, à savoir Π_{1x}, Π_{1y}, Π_{01}, $\Pi_{y\infty}$, $\Pi_{0\infty}$, $\Pi_{x\infty}$, passent chacun par trois des points : Π_{1x} par P_{0y}, $P_{0\infty}$, $P_{y\infty}$; Π_{1y} par P_{0x}, $P_{0\infty}$, $P_{x\infty}$; etc. Les trois plans Π_{0x}, Π_{xy}, Π_{0y} passent chacun, par contre, par quatre points : Π_{0x} par P_{1y}, $P''_{1\infty}$, $P'''_{1\infty}$, $P_{y\infty}$; etc. Les trois plans $\Pi'_{1\infty}$, $\Pi''_{1\infty}$, $\Pi'''_{1\infty}$ passent chacun enfin, par deux points : $\Pi'_{1\infty}$ par P_{xy}, P_{0y}; etc.

Ces points et ces plans sont, en général, complexes ; voici pourtant, dans l'espace à deux dimensions réelles, une *image* de ce qui a lieu dans l'espace à deux dimensions complexes (*fig.* 14).

Nous n'avons marqué d'indices que les points dans cette figure ; les indices des droites qui représentent les plans analytiques se déterminent par la règle

suivante : chacune de ces droites ne doit avoir aucun indice commun avec les points qu'elle porte, que ces points soient au nombre de deux, de trois ou de quatre. La droite $P_{01}P_{0x}P_{1x}$, par exemple, ne peut prendre aucun des indices 0, 1, x : elle représente le plan Π_{yz}.

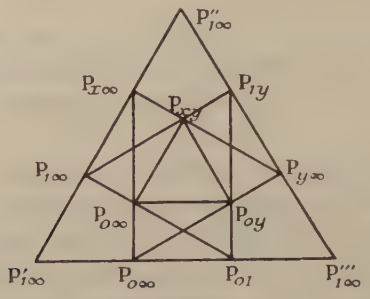

Fig. 14.

3. Rôle des constantes α, β, γ, δ. — La détermination du groupe de monodromie du système (2) se ramène à celle des points et plans caractéristiques des substitutions fondamentales considérées, dont nous connaissons, en effet, les valeurs propres. La détermination effective de ces points et plans fera l'objet du chapitre suivant. Terminons le présent chapitre par la remarque suivante :

Les rapports mutuels des solutions entrant seuls en jeu comme nous l'avons vu, ce sont moins les valeurs propres que leurs rapports mutuels qui nous serviront. Comme chacune des douze substitutions possède deux valeurs propres, une simple et une double, il y aura un seul rapport de valeurs propres pour chaque substitution, c'est le quotient, pour fixer les idées, de la valeur propre simple par la valeur propre double. L'analyse du chapitre II donne les valeurs des *quotients propres* ainsi obtenus : *les chiffres* 1, 2, 3, 4, 5 *des formules* (35) *correspondant aux indices* 0, 1, x, y, ∞, *la substitution du* $i^{\text{ième}}$ *et du* $k^{\text{ième}}$ *indices a pour quotient propre* $\varepsilon_i\varepsilon_k$. Le quotient propre de S_{0x} est ainsi égal à $\varepsilon_4\varepsilon_3$, et celui de $S_{y\infty}$, à $\varepsilon_4\varepsilon_5 = \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_3^{-1}$.

Les substitutions S'_{1x}, S''_{1x}, S'''_{1x} ayant le même quotient propre $\varepsilon_2\varepsilon_3$, il y a bien en tout dix quotients différents.

Ces quotients propres ne dépendent des constantes α, β, γ, δ qu'indirectement, par l'intermédiaire des formules (35) : ils ne sont pas changés lorsqu'on remplace ces constantes par d'autres qui en diffèrent par des nombres entiers. Le même remplacement conserve, plus généralement, comme nous le verrons au chapitre suivant, le groupe de monodromie.

D'autres problèmes, par contre, mettent directement en cause α, β, γ, δ. Cherchons, par exemple, au voisinage d'un point singulier, les rapports limites des solutions, problème que nous préciserons de la manière suivante :

Les solutions z_1, z_2, z_3 étant des fonctions uniformes dans le demi-domaine

(Δ), nous conviendrons d'aborder les points singuliers par l'intérieur de (Δ), le cas d'un point singulier complexe est le plus simple dans ces conditions : deux chemins continus, intérieurs à (Δ), partant d'un même point A (*fig.* 3) et aboutissant au même point singulier se ramènent alors l'un à l'autre, sans sortir de (Δ), par variation continue : l'image topologique du chapitre I nous le prouve clairement. Il n'en est pas de même d'un point singulier réel que cette image, comme nous l'avons remarqué, ne représente pas; il faudra alors préciser davantage le chemin d'accès, en recourant, par exemple, aux plans analytiques réels (chap. I, § 11 et suiv.). Examinons successivement les deux cas :

1° *Le point singulier est complexe.* — Soit $x=0$, pour fixer les idées, le plan singulier auquel il appartient. Considérons alors la substitution S_{0x} et remplaçons dans les relations (55) Z_1 par z_{0x}, Z_2 et Z_3 par deux solutions propres à valeur propre double de S_{0x}, linéairement indépendantes, pour lesquelles nous pouvons prendre, par exemple, z_{1y} et z_{yx} :

$$z_i=\beta_{i1}z_{0x}+\beta_{i2}z_{1y}+\beta_{i3}z_{yx}. \tag{56}$$

Chacune de ces solutions est le produit d'une fonction, holomorphe et sans zéro dans le voisinage du point considéré, par un facteur de la forme x^λ; les nombres λ ainsi obtenus sont les *exposants* au sens de Fuchs. Pour déterminer λ, prenons d'abord (9)

$$z_{0x}=(0,x)=\int_{(s)}u^\alpha(u-1)^\beta(u-x)^\gamma(u-y)^\delta\,du,$$

où (s) désigne un double circuit de Pochhammer autour de zéro et de x. De ce double circuit, qui dépend de x, on passe à un autre semblable, mais fixe, par le changement de variable $u=xu_1$:

$$z_{0x}=x^{\alpha+\gamma+1}\int_{(s_1)}u_1^\alpha(xu_1-1)^\beta(u_1-1)^\gamma(xu_1-y)^\delta\,du_1.$$

L'intégrale de cette dernière formule étant évidemment holomorphe et non nulle pour $x=0$, il en résulte $\lambda=\alpha+\gamma+1$.

Pour les solutions z_{1y} et z_{yx}, on a de même, simplement, $\lambda=0$.

C'est la différence de ces exposants qui nous intéressera, différence qui a pour valeur $\alpha+\gamma+1$. Les constantes α, β, γ, δ étant supposées réelles, la solution z_{0x} l'emportera sur z_{1y} et z_{yx}, dans le voisinage de $x=0$, si l'on a $\alpha+\gamma+1<0$; les relations (56) donnent alors au point (z_i) la position limite (β_{i1}), ce qui n'est autre, d'après les paragraphes précédents, que P_{0x}, point

(9) Nous négligeons le facteur constant de l'expression de $(0,x)$, facteur qui n'a ici aucune importance.

caractéristique de S_{0x}. Le même raisonnement placera cette position limite en un point du plan caractéristique Π_{0x} si l'on $\alpha+\gamma+1>0$.

Ainsi, *le point* (z_i) *a pour limite, soit le point* P_{0x}, *soit un point du plan* Π_{0x}, *suivant qu'on a* $\alpha+\gamma+1<0$ *ou* >0.

On à des résultats analogues lorsqu'on considére, au lieu de $x=0$, les cinq autres plans singuliers.

2° *Le point singulier est réel.* — Les plans analytiques réels passant par ce point n'étant pas tous de la même espèce, nous nous bornerons à l'espèce (7, 8) : on passera aux autres espèces sans difficulté, compte tenu de la remarque finale du chapitre I.

Un plan (7, 8) rencontre la chaîne réelle suivant une droite réelle qui porte sur elle, comme nous l'avons vu, six points singuliers, générateurs des six substitutions fondamentales (45). Il n'y a ici rien à changer au raisonnement du 1° : en abordant un de ces six points par la moitié supérieure du plan (7, 8), on obtiendra, comme position limite du point (z_i), soit le point caractéristique de la substitution correspondante, soit un point de son plan caractéristique, suivant la valeur de la différence d'exposants de ses solutions propres.

Reprenant maintenant les formules (23) et (24) définissant le plan (7, 8), faisons tendre a vers zéro comme au chapitre II (§ 8). Trois des six points se confondant alors à la limite, on atteindra ainsi le point triplement singulier $Y=T=0$. La position limite du point (z_i) dépend ici, comme on devait s'y attendre, de la substitution $S_{x\infty}$. Les solutions propres de celle-ci ayant pour différence d'exposants

$$-\alpha-\beta-\delta-1,$$

le point (z_i) aura pour limite, soit le point $P_{x\infty}$, soit un point du plan $\Pi_{x\infty}$, *suivant qu'on a* $\alpha+\beta+\delta+1>0$ *ou* <0.

Les six plans singuliers et les quatre points triplement singuliers donnent ainsi lieu à dix différences d'exposants :

$$(57)\qquad \begin{cases} \alpha+\beta+1, & \alpha+\gamma+1, & \ldots, & \gamma+\delta+1, \\ -\alpha-\beta-\gamma-1, & \ldots, & -\beta-\gamma-\delta-1, \end{cases}$$

que les dix quotients propres ne déterminent, évidemment, qu'à des nombres entiers près. Les signes de ces différences ne sont pas indépendants : on vérifie, par exemple, que les différences

$$\alpha+\beta+1, \quad \alpha+\gamma+1, \quad \beta+\gamma+1, \quad -\alpha-\beta-\gamma-1$$

ne peuvent être négatives toutes les quatre, ni les différences

$$\alpha+\beta+1, \quad \gamma+\delta+1, \quad -\alpha-\beta-\gamma-1, \quad -\alpha-\beta-\delta-1.$$

CHAPITRE IV.

Cycles de chaines.

1. Chaines fondamentales. — Nous maintiendrons l'hypothèse, essentielle pour la suite, que les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont réelles. Une conséquence immédiate est que les coefficients du système (2) sont des fonctions rationnelles réelles, prenant des valeurs réelles pour toutes valeurs réelles des variables x et y. Dès lors, étant donnés sur la chaîne réelle de l'espace des variables un domaine (d), à deux dimensions réelles, ne contenant aucun point singulier, et un point (x_0, y_0) de (d), toute solution de (2) qui prend en (x_0, y_0), ainsi que ses dérivées du premier ordre, des valeurs initiales réelles, restera réelle dans (d) comme il résulte du théorème classique d'existence.

Soient $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, trois solutions ainsi obtenues linéairement indépendantes, indépendance assurée par la condition

$$\begin{vmatrix} \zeta_{10} & \zeta_{20} & \zeta_{30} \\ \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial \zeta_3}{\partial x}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial y}\right)_0 & \left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial y}\right)_0 & \left(\frac{\partial \zeta_3}{\partial y}\right)_0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Les solutions (z_i) du chapitre précédent étant des combinaisons linéaires de ζ_i, on peut écrire

$$z_i = a_{i1}\zeta_1 + a_{i2}\zeta_2 + a_{i3}\zeta_3.$$

Les solutions ζ_i restant réelles dans (d), il en résulte que le point (z_i) appartient à la chaîne planaire, transformée du sous-espace réel par l'homographie $\| a_{ik} \|$.

Ainsi, *lorsque le point* (x, y) *décrit le domaine* (d), *le point* (z_i) *décrit un domaine appartenant à une chaîne planaire.*

Cette chaîne planaire n'est bien déterminée que si les fonctions z_i le sont dans (d). Partant toujours du demi-domaine (Δ) où ces fonctions sont uniformes, il faudra préciser le chemin par lequel on aborde les points de (d), points frontières de (Δ). Les plans analytiques réels utilisés dans un problème semblable au chapitre III (§ 3) peuvent rendre ici les mêmes services.

Nous bornant toujours aux plans (7, 8), considérons les points réels qui leur appartiennent. Un plan (7, 8) ayant pour équation

$$y = ax + b,$$

où les nombres réels a et b vérifient les conditions

$$(24) \qquad a < 0, \qquad b > 0, \qquad a + b - 1 > 0,$$

la droite réelle suivant laquelle il rencontre la chaîne réelle a pour équation

$$u_2 = au_1 + b,$$

u_1, u_2 désignant les parties réelles de x, y. Les conditions (24), interprétées géométriquement, permettent de caractériser cette droite : de coefficient angulaire négatif, elle rencontre, de plus, la droite $u_1 = 1$ en un point d'ordonnée supérieure à 1. Il est clair qu'elle traverse six, et six seules, des douze régions dans lesquelles les droites singulières

$$u_1 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_1 = u_2, \quad u_2 = 1, \quad u_2 = 0$$

partagent la chaîne réelle : ce sont celles pour lesquelles les deux coordonnées ne sont pas inférieures à 1 en même temps :

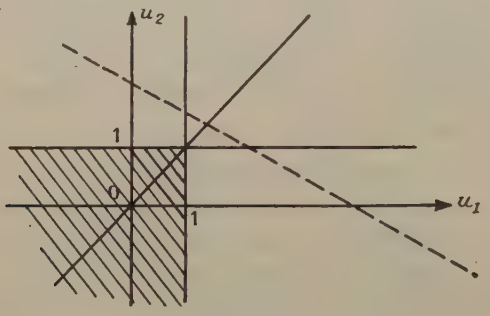

Fig. 15.

Chacune de ces régions est un domaine (d) dans lequel les fonctions z_i se déterminent sans équivoque grâce aux plans (7, 8); il lui correspond donc, dans l'espace des fonctions, une chaîne planaire bien déterminée. Nous qualifierons de *fondamentales* les six chaînes planaires ainsi obtenues.

A d'autres espèces de plans analytiques réels correspondent d'autres chaînes fondamentales.

2. Symétries. — Une chaîne planaire (C) étant donnée par les équations paramétriques

(58) $$z_i = a_{i1} r_1 + a_{i2} r_2 + a_{i3} r_3,$$

où r_1, r_2, r_3 sont des paramètres *réels*, on appelle *symétrie par rapport à* (C) la transformation ponctuelle qui fait correspondre à un point M, de coordonnées homogènes

(59) $$z_i = a_{i1} \gamma_1 + a_{i2} \gamma_2 + a_{i3} \gamma_3,$$

le point M′ de coordonnées homogènes

60) $$z'_i = a_{i1} \bar{\gamma}_1 + a_{i2} \bar{\gamma}_2 + a_{i3} \bar{\gamma}_3,$$

les quantités complexes γ_i et $\bar{\gamma}_i$ étant conjuguées.

La transformation homographique $\|a_{ik}\|^{-1}$ qui ramène la chaîne (C) à la chaîne réelle ramène la symétrie considérée à une symétrie ordinaire par rapport à un sous-espace à deux dimensions réelles.

Comme il résulte des formules (59) et (60), les coordonnées z_i' sont des fonctions linéaires, non des coordonnées z_i, mais de leurs quantités conjuguées, ce qui fait qu'une symétrie n'est pas une homographie et que, par contre, le produit de deux symétries successives en est une. Montrons que, réciproquement, *toute homographie résulte, et d'une infinité de manières, d'un nombre pair de symétries.*

Une homographie pouvant avoir un, deux, trois ou une infinité de points caractéristiques, bornons-nous au cas où il existe trois points caractéristiques linéairement indépendants. Un changement de coordonnées préalable ayant ramené ces points aux points (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), l'homographie prendra la forme

$$Z_1 : Z_2 : Z_3 = \lambda_1 z_1 : \lambda_2 z_2 : \lambda_3 z_3.$$

Examinons d'abord deux cas particuliers :

1° *Cas des λ_i unimodulaires* :

$$\lambda_1 = e^{2i\alpha_1}, \qquad \lambda_2 = e^{2i\alpha_2}, \qquad \lambda_3 = e^{2i\alpha_3},$$

α_1, α_2, α_3 désignant trois nombres réels.

Considérons dans ce cas les chaînes planaires de la forme

$$z_k = e^{i\omega_k} r_k,$$

les ω_k étant réels. Les symétries correspondantes substituent au point $z_k = e^{i\omega_k}\gamma_k$ le point

$$z_k' = e^{i\omega_k}\overline{\gamma}_k = e^{2i\omega_k}\overline{z}_k,$$

ce qui donne pour deux symétries successives

$$z_k'' = e^{2i\omega_k'} z_k' = e^{2i(\omega_k' - \omega_k)} z_k.$$

Deux chaînes de la forme considérée pour lesquelles on a

$$\omega_k' - \omega_k = \alpha_k \qquad (k = 1, 2, 3),$$

donnent donc deux symétries dont l'homographie considérée est le produit. Il est clair qu'on peut choisir arbitrairement une de ces chaînes.

2° *Cas des λ_i réels et positifs.* — Ces λ_i ne sont toujours donnés qu'à un facteur commun près; on peut donc poser $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$. Dès lors, il existe trois nombres positifs a^2, b^2, c^2 tels qu'on ait

$$\lambda_1 = \frac{a^2}{c^2}, \qquad \lambda_2 = \frac{b^2}{a^2}, \qquad \lambda_3 = \frac{c^2}{b^2},$$

ce qui décompose l'homographie donnée dans les trois suivantes, plus simples :

$$Z_1 : Z_2 : Z_3 = a^2 z_1 : \frac{1}{a^2} z_2 : z_3,$$

$$Z_1 : Z_2 : Z_3 = z_1 : b^2 z_2 : \frac{1}{b^2} z_3,$$

$$Z_1 : Z_2 : Z_3 = \frac{1}{c^2} z_1 : z_2 : c^2 z_3.$$

Chacune de ces dernières se décompose à son tour en deux symétries comme nous allons le démontrer. En effet, prenons par exemple la première de ces homographies. Soit τ un nombre réel; considérons la chaîne

$$z_1 = \tau(r_1 + ir_2), \qquad z_2 = \frac{1}{\tau}(r_1 - ir_2), \qquad z_3 = r_3$$

et la symétrie correspondante. Le point

$$z_1 = \tau(\gamma_1 + i\gamma_2), \qquad z_2 = \frac{1}{\tau}(\gamma_1 - i\gamma_2), \qquad z_3 = \gamma_3$$

aura pour symétrique le point

$$z'_1 = \tau(\overline{\gamma}_1 + i\overline{\gamma}_2) = \tau^2 \overline{z}_2, \qquad z'_2 = \frac{1}{\tau}(\overline{\gamma}_1 - i\overline{\gamma}_2) = \frac{1}{\tau^2}\overline{z}_1, \qquad z'_3 = \overline{\gamma}_3 = \overline{z}_3.$$

Une deuxième symétrie provenant d'une chaîne semblable donnera ensuite le point

$$z''_1 = \tau'^2 z'_2 = \frac{\tau'^2}{\tau^2} z_1, \qquad z''_2 = \frac{1}{\tau'^2} z'_1 = \frac{\tau^2}{\tau'^2} z_2, \qquad z''_3 = z'_3 = z_3,$$

ce qui coïncidera avec le point (Z_1, Z_2, Z_3) si l'on prend

$$\tau'^2 = a^2 \tau^2.$$

3° Le cas général résulte toujours, évidemment, des deux précédents; notre proposition se trouve ainsi justifiée.

3. Intersection de deux chaînes planaires. — Étant données deux chaînes planaires (C), (C') et l'homographie (S) qui résulte des deux symétries correspondantes, tout point commun à (C) et à (C'), que ces symétries laissent évidemment fixe, est, par cela même, point caractéristique de (S). Voyons si, ou dans quelle mesure, on obtiendra ainsi tous les points caractéristiques.

Soient

$$z_i = \sum a_{ik} r_k, \qquad z'_i = \sum a'_{ik} r'_k$$

les équations paramétriques respectives des deux chaînes. La recherche de leurs points d'intersection se ramène à celle de valeurs réelles r_k, r'_k telles

qu'on ait, avec un facteur complexe λ,

$$\sum a_{ik} r_k = \lambda \sum a'_{ik} r'_k. \tag{61}$$

Les déterminants $|a_{ik}|$, $|a'_{ik}|$ ne sont pas nuls. On peut dès lors résoudre les équations (61) par rapport aux r_k par exemple :

$$r_i = \lambda \sum a_{ih}^{-1} a'_{hk} r'_k,$$

ce qui donne, par séparation des parties réelles et imaginaires,

$$r_i = \sum \left[\mathrm{R}(\lambda)\mathrm{R}\left(\sum a_{ih}^{-1} a'_{hk} \right) - \mathrm{I}(\lambda)\mathrm{I}\left(\sum a_{ih}^{-1} a'_{hk} \right) \right] r'_k, \tag{62}$$

$$0 = \sum \left[\mathrm{R}(\lambda)\mathrm{I}\left(\sum a_{ih}^{-1} a'_{hk} \right) + \mathrm{I}(\lambda)\mathrm{R}\left(\sum a_{ih}^{-1} a'_{hk} \right) \right] r'_k. \tag{63}$$

En donnant à i les valeurs 1, 2, 3, nous avons en (63) trois équations linéaires et homogènes entre les paramètres r'_k, lesquels ne doivent pas être nuls en même temps; il en résulte

$$\left| \mathrm{R}(\lambda)\mathrm{I}\left(\sum a_{ih}^{-1} a'_{hk} \right) + \mathrm{I}(\lambda)\mathrm{R}\left(\sum a_{ih}^{-1} a'_{hk} \right) \right| = 0, \tag{64}$$

où le premier membre désigne le déterminant des équations (63).

Cette relation (64), homogène et du troisième degré en $\mathrm{R}(\lambda)$ et $\mathrm{I}(\lambda)$ a de plus tous ses coefficients réels : elle admettra, pour le rapport $\mathrm{R}(\lambda) : \mathrm{I}(\lambda)$, trois racines, distinctes ou non, réelles ou complexes conjuguées. A chaque racine réelle correspondra, grâce aux équations (62) et (63), un point d'intersection au moins.

Les racines complexes ne conviennent pas, le rapport $\mathrm{R}(\lambda) : \mathrm{I}(\lambda)$, où $\mathrm{R}(\lambda)$ et $\mathrm{I}(\lambda)$ sont les parties réelle et imaginaire de λ, étant nécessairement réel.

On peut simplifier les équations (63) en remarquant que les chaînes ne changent pas lorsqu'on multiplie tous les a_{ik} ou tous les a'_{ik} par un nombre complexe quelconque, nombre qu'on peut toujours choisir tel que le déterminant $\left| \mathrm{R}\left(\sum a_{ih}^{-1} a'_{hk} \right) \right|$ diffère de zéro. En effet, toutes les fois que ce déterminant serait nul, il existerait une racine de (64) de la forme $\mathrm{R}(\lambda) = 0$, donc une valeur de λ imaginaire pure, éventualité qu'on peut écarter, il est clair, par un choix convenable du nombre complexe en question.

Dans ces conditions, posons

$$b_{ik} = \mathrm{R}\left(\sum a_{ih}^{-1} a'_{hk} \right), \qquad c_{ik} = \mathrm{I}\left(\sum a_{ih}^{-1} a'_{hk} \right),$$

ce qui permet d'écrire (63)

$$\mathrm{R}(\lambda) \sum c_{ik} r'_k + \mathrm{I}(\lambda) \sum b_{ik} r'_k = 0;$$

nous en déduirons, le déterminant $|b_{ik}|$ n'étant pas nul,

$$\sum b_{ik}^{-1} c_{hk} r'_k = \frac{-\mathrm{I}(\lambda)}{\mathrm{R}(\lambda)} r'_i.$$

Ainsi, *les solutions de* (63) *ne sont autres que les vecteurs propres de la matrice*

$$\| b_{ik} \|^{-1} . \| c_{ik} \| :$$

les r'_k *de chacune de ces solutions sont les composantes du vecteur propre appartenant à la valeur propre correspondante* $\frac{-\mathrm{I}(\lambda)}{\mathrm{R}(\lambda)}$.

On peut dès lors appliquer à λ et aux r'_k les discussions classiques relatives aux valeurs et aux vecteurs propres. Il en résulte, en particulier, qu'à des racines réelles distinctes de (64) correspondent un nombre égal de points d'intersection linéairement indépendants.

4. Solutions formelles. — Que les points d'intersection de (C) et de (C') ne constituent pas toujours l'ensemble des points caractéristiques de (S), c'est ce qu'on peut déduire du raisonnement suivant :

Dans le cas où l'équation (64) possède des racines complexes, nécessairement conjuguées, considérons les solutions *formelles* des équations (62) et (63), c'est-à-dire les systèmes de valeurs r_k, r'_k, complexes et conjugués, que ces équations déterminent lorsqu'on y remplace le rapport $\mathrm{R}(\lambda) : \mathrm{I}(\lambda)$ par les racines en question. En portant ces valeurs dans (61), nous obtiendrons deux points qui n'appartiennent, évidemment, ni à (C), ni à (C'), mais qui sont symétriques l'un de l'autre par rapport à chacune de ces deux chaînes. Dès lors, une première symétrie, par exemple par rapport à (C), remplace le premier point par le second qu'une symétrie par rapport à (C') ramène ensuite au premier; on voit ainsi qu'*à deux racines complexes conjuguées de* (64) *correspondent deux points caractéristiques de* (S), *solutions formelles de* (63), points que les deux chaînes ne portent pas.

Il est clair d'ailleurs, réciproquement, que tout point caractérisque de (S), à moins d'être laissé fixe par chacune des deux symétries, doit avoir le même symétrique par rapport à (C) et à (C'). Les équations (63) et les racines de (64), tant réelles que complexes conjuguées, donnent ainsi tous les points caractéristiques.

5. Angles des deux chaînes. — Pour déterminer de même les valeurs propres de (S) ou plus exactement leurs rapports mutuels, bornons-nous au cas, qui suffira pour la suite, où les chaines (C) et (C') ont en commun trois points au moins, linéairement indépendants, provenant de trois racines réelles de (64) distinctes ou non. En désignant les coordonnées homogènes du premier point par u_{h1}, celles des deux autres par u_{h2} et u_{h3}, cherchons les équations générales des chaînes planaires passant par ces points.

Une quelconque de ces chaînes étant donnée, il existe une homographie qui la fait correspondre au sous-espace réel (c'est la définition même des chaînes planaires), homographie qui n'est déterminée, évidemment, qu'à une transformation près, elle-même homographique, changeant le sous-espace réel en lui-même. On peut toujours choisir celle-ci de manière à faire correspondre les points (u_{h1}), (u_{h2}), (u_{h3}) aux points (1, 0, 0), (0, 1, 0), 0, 0, 1). Dans ces conditions, soient

$$z_h = \sum u_{hk} r_k$$

les relations homographiques entre les coordonnées z_h d'un point de la chaîne et les coordonnées r_k du point réel correspondant; on aura, grâce aux trois paires de points considérées,

$$\frac{u_{1k}}{u_{1k}} = \frac{u_{2k}}{u_{2k}} = \frac{u_{3k}}{u_{3k}} = \rho_k e^{i\omega_k},$$

ρ_k et ω_k étant réels.

Les facteurs ρ_k peuvent être négligés, les r_k n'étant déterminés eux-mêmes qu'à des facteurs réels près; il reste ainsi

$$u_{hk} = u_{hk} e^{i\omega_k},$$

ce qui donne à la chaîne les équations paramétriques

$$z_h = \sum u_{hk} e^{i\omega_k} r_k.$$

On voit que *la famille des chaînes planaires qui passent par trois points donnés linéairement indépendants dépend de deux paramètres réels*, l'un des trois paramètres ω_k pouvant être arbitrairement choisi.

L'application aux deux chaînes (C) et (C') permet de leur donner les équations paramétriques

$$z_h = \sum u_{hk} r_k, \qquad z'_h = \sum u_{hk} e^{i\omega_k} r'_k; \tag{65}$$

les différences $\omega_2 - \omega_1$, $\omega_3 - \omega_1$, $\omega_3 - \omega_2$, qui mesurent en quelque sorte la distance des deux chaînes, sont ce que nous appellerons les *angles* que la chaîne (C') forme avec (C), respectivement de (u_{h1}) à (u_{h2}) de (u_{h1}) à (u_{h3}), de (u_{h2}) à (u_{h3}), angles qui ne seront définis qu'à des multiples de π près. Deux seuls de ces angles sont indépendants, évidemment.

En calculant (S) à partir de (65), on remarquera que le point

$$z_h = \sum u_{hk} \bar{r}_k$$

a pour symétrique par rapport à (C) le point

$$\sum u_{hk} \bar{r}_k = \sum u_{hk} e^{i\omega_k} \bar{r}_k e^{-i\omega_k},$$

lequel a pour symétrique par rapport à (C')

$$z_h = \sum u_{hk} e^{2i\omega_k} \zeta_k = \sum u_{hk} e^{2i\omega_k} u_{kl}^{-1} z_l,$$

ce qui mettra en évidence les quotients propres de (S), rapports mutuels des nombres $e^{2i\omega_k}$: *les demi-arguments de ces quotients propres égalent les angles des deux chaînes*.

Cette dernière propriété montre en même temps le caractère intrinsèque des angles : toute transformation homographique les laisse invariants.

6. Cycles de chaines fondamentales. — Revenant aux chaines fondamentales du paragraphe 1, considérons un plan analytique réel de l'espèce (7, 8), et l'équation de Fuchs correspondante (chap. I, § 10 et 11), à six points singuliers, dont les substitutions fondamentales engendrent, comme nous l'avons vu, le groupe de monodromie du système (2). La droite réelle de ce plan (7, 8) étant divisée en six segments par les points singuliers, chacune des substitutions considérées résulte des franchissements successifs de deux segments consécutifs, ou encore, de deux prolongements analytiques des solutions, le premier d'un point A de la région 7 au point conjugué A' de la région 8, à travers un segment, et le deuxième de A' à A à travers le segment suivant. Pour chacun de ces prolongements analytiques, les solutions ζ_i du paragraphe 1, étant réelles sur le segment, prennent aux deux points conjugués, d'après un théorème classique, des valeurs conjuguées, ce qui donne, lorsqu'on passe des ζ_i aux z_i, deux points de l'espace des fonctions, symétriques par rapport à la chaine fondamentale correspondante.

Ainsi, *chacune des homographies fondamentales résulte de deux symétries par rapport à deux chaines fondamentales consécutives*.

Les valeurs propres des substitutions fondamentales étant unimodulaires, il en est de même de leurs rapports mutuels, quotients propres des homographies correspondantes. Chacune de ces dernières possède de plus, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, un point et un plan caractéristiques linéairement indépendants; il en résulte que pour deux chaines fondamentales consécutives, toutes les racines de l'équation (64) sont réelles (l'existence de racines complexes entrainerait, comme on le vérifie sans difficulté, celle de quotients propres non-unimodulaires), et que deux de ces racines sont égales, donnant aux deux chaines, moyennant (63), une infinité de points d'intersection dépendant d'un paramètre réel, infinité qui forme une *chaine linéaire*, transformée homographique d'une droite réelle.

Toute chaine linéaire appartient à un plan analytique *qu'elle détermine*, comme une droite réelle détermine le plan analytique réel auquel elle appartient. Il est clair que le plan analytique de la chaine linéaire obtenue n'est autre que le plan caractéristique correspondant.

Les chaines fondamentales possèdent ainsi cette propriété que *deux consécutives quelconques de ces chaînes ont en commun un point et une chaîne linéaire linéairement indépendants*. Par consécutives, on doit entendre ici, étant donné un certain nombre de chaines planaires dans un ordre déterminé, deux chaines qui se suivent l'une l'autre circulairement, la dernière chaine étant regardée comme suivie de la première. Des chaines planaires ainsi ordonnées forment ce que nous appellerons un *cycle;* les cycles qui possèdent la propriété précédente seront qualifiés, pour abréger, de *pochhammériens*.

Deux des trois valeurs propres étant égales pour chacune des homographies fondamentales, il en résulte que deux chaines fondamentales consécutives forment un seul angle qui ne soit pas nul. On obtient ainsi, étant donné un cycle pochhammérien, autant d'angles qu'il existe de chaines composantes : nous les appellerons simplement les *angles* du cycle.

L'existence de relations de permutabilité (chap. I et II) empêche qu'un cycle pochhammérien quelconque de six chaines planaires puisse être regardé comme le cycle de chaines fondamentales d'un système tel que (2). Les mêmes relations permettent, comme nous le verrons plus loin, de déterminer les six chaines fondamentales par quatre d'entre elles convenablement choisies, celles, par exemple, que l'on obtient lorsqu'on considère, à la place du plan (7, 8), le plan $y = b$ du chapitre II (§ 8). La droite pointillée de la figure 15 devenant horizontale, les quatre chaines correspondent aux quatre régions supérieures à la droite $a_2 = 1$; elles forment un cycle qui détermine des homographies semblables aux précédentes et qui reste, par conséquent, pochhammérien.

Le calcul du groupe de monodromie se ramène ainsi au problème géométrique suivant :

Déterminer un cycle pochhammérien de quatre chaînes planaires, connaissant ses quatre angles.

7. Cas général. — Pour résoudre ce problème, désignons par

$$(C_1),\quad (C_2),\quad (C_3),\quad (C_4)$$

les chaines composantes du cycle à déterminer, par

$$X_1,\quad X_2,\quad X_3,\quad X_4$$

les points et par

$$(\gamma_1),\quad (\gamma_2),\quad (\gamma_3),\quad (\gamma_4)$$

les chaines linéaires dans lesquels chacune d'elles rencontre la suivante : (C_1) et (C_2), par exemple, se rencontrent en X_1 et (γ_1), et (C_3) et (C_4) en X_3 et (γ_3). Soient enfin

$$0_1,\quad 0_2,\quad 0_3,\quad 0_4$$

les angles du cycle correspondants.

Deux chaînes linéaires qui appartiennent à une même chaîne planaire se rencontrent en un point, à moins de se confondre entièrement. En effet, les droites réelles étant les seules chaînes linéaires du sous-espace réel, la transformation homographique qui ramène la chaîne planaire à ce sous-espace ramène les deux chaînes linéaires à deux droites réelles : elles se rencontrent ou se confondent comme celles-ci.

Appliquons cette remarque aux chaînes linéaires (γ_i) : les deux premières, par exemple, étant portées par la même chaîne planaire (C_2), se rencontreront en un point Y_4 si elles ne sont pas confondues; nous obtiendrons ainsi quatre points

$$Y_1, \quad Y_2, \quad Y_3, \quad Y_4$$

intersections de chacune des chaînes linéaires avec la suivante.

Ces derniers points peuvent n'être ni distincts ni même déterminés. Nous laisserons de côté cette difficulté en nous plaçant d'abord dans le cas général où *les quatre plans analytiques des chaînes linéaires sont trois à trois linéairement indépendants*, en ce sens que chacun de ces plans ayant pour équation une relation linéaire et homogène en z_1, z_2, z_3, le tableau des coefficients des quatre équations a ses quatre déterminants du troisième ordre différents de zéro. Soient dans ce cas

$$\Pi_1 = 0, \qquad \Pi_2 = 0, \qquad \Pi_3 = 0, \qquad \Pi_4 = 0$$

les équations en question; les points Y_i, n'étant autres, évidemment, que les points d'intersection des plans chacun avec le suivant, sont déterminés chacun par deux consécutives de ces équations :

$$\begin{aligned} Y_1 &: \quad \Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0; \\ Y_2 &: \quad \Pi_2 = 0, \quad \Pi_3 = 0; \\ Y_3 &: \quad \Pi_3 = 0, \quad \Pi_4 = 0; \\ Y_4 &: \quad \Pi_4 = 0, \quad \Pi_1 = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que Y_1 et Y_2, par exemple, sont bien distincts, sans quoi le système de trois équations

$$\Pi_1 = 0, \qquad \Pi_2 = 0, \qquad \Pi_3 = 0$$

aurait une solution non nulle; que le plan analytique que ces points déterminent, et qui n'est autre que $\Pi_2 = 0$, ne passe pas par Y_3, sans quoi le système de trois équations

$$\Pi_2 = 0, \quad \Pi_3 = 0, \quad \Pi_4 = 0$$

aurait une solution non nulle; que les points Y_1, Y_2, Y_3 sont eux-mêmes, par conséquent, linéairement indépendants. On voit que *l'indépendance linéaire trois à trois des plans* Π_i *entraîne celle des points* Y_i.

Il est clair, d'après le même raisonnement, que la détermination des points Y_i et leur distinction chacun du suivant exigent inversement l'indépendance linéaire des plans Π_i trois à trois.

Il sera commode que nous désignions les points Y_i d'une manière légèrement différente : V_1, V_2, V_3, V_4 étant quatre points trois à trois linéairement indépendants, les quatre chaînes planaires à déterminer passent respectivement par les quatre systèmes de trois points suivants :

$$\begin{aligned}
&(C_1) : \quad V_2, \quad V_3, \quad V_4;\\
&(C_2) : \quad V_3, \quad V_4, \quad V_1;\\
&(C_3) : \quad V_4, \quad V_1, \quad V_2;\\
&(C_4) : \quad V_1, \quad V_2, \quad V_3.
\end{aligned}$$

V_1, V_2, V_3, V_4 ne sont autres que Y_2, Y_3, Y_4, Y_1.

Nous avons déjà vu, au paragraphe 5, quelle forme générale on peut donner aux équations paramétriques d'une chaîne planaire passant par trois points linéairement indépendants. En l'appliquant aux chaînes (C_i), nous pouvons écrire leurs équations

$$(C_j) : \quad z_h = \sum u_{hk} e^{i\omega_{jk}} r_k \qquad (k \neq j),$$

où u_{1i}, u_{2i}, u_{3i} désignent les coordonnées homogènes de V_i.

Prenons par exemple les deux premières de ces équations :

$$\begin{aligned}
z_h &= u_{h2} e^{i\omega_{12}} r_2 + u_{h3} e^{i\omega_{13}} r_3 + u_{h4} e^{i\omega_{14}} r_4,\\
z_h &= u_{h3} e^{i\omega_{23}} r_3 + u_{h4} e^{i\omega_{24}} r_4 + u_{h1} e^{i\omega_{21}} r_1.
\end{aligned}$$

Les deux chaînes ainsi représentées doivent avoir en commun une chaîne linéaire passant par les points V_3 et V_4. Il suffit pour cela, évidemment, qu'on ait

$$\omega_{23} - \omega_{13} = \omega_{24} - \omega_{14} \qquad (\mathrm{mod}\,\pi).$$

Cette condition est aussi nécessaire. Désignons, en effet, par u_h les coordonnées homogènes du point d'intersection V des deux chaînes linéairement indépendant de leur chaîne linéaire commune; rapportées aux points V, V_3, V_4, les équations des chaînes prennent la forme

$$\begin{aligned}
z_h &= u_h e^{i\omega'_1} r' + u_{h3} e^{i\omega'_{13}} r'_3 + u_{h4} e^{i\omega'_{14}} r'_4,\\
z_h &= u_h e^{i\omega'_2} r' + u_{h3} e^{i\omega'_{23}} r'_3 + u_{h4} e^{i\omega'_{24}} r'_4,
\end{aligned}$$

et l'on doit avoir, pour que la chaîne linéaire puisse exister,

$$\omega'_{23} - \omega'_{13} = \omega'_{24} - \omega'_{14} \qquad (\mathrm{mod}\,\pi).$$

Que ω'_{13} et ω'_{14}, par exemple, ne soient autres que ω_{13} et ω_{14}, on le voit simplement en identifiant. Nous avons

$$u_h e^{i\omega'_1} r' + u_{h3} e^{i\omega'_{13}} r'_3 + u_{h4} e^{i\omega'_{14}} r'_4 = u_{h2} e^{i\omega_{12}} r_2 + u_{h3} e^{i\omega_{13}} r_3 + u_{h4} e^{i\omega_{14}} r_4;$$

l'indépendance linéaire des points V, V_3, V_4 d'une part et de V_2, V_3, V_4 de l'autre a pour conséquence que la seule façon d'obtenir V_3 par exemple consiste à faire au premier membre $r' = r'_4 = 0$ et au second membre $r_2 = r_4 = 0$, ce qui donne

$$u_{h3}\, e^{i\omega'_{13}} r'_3 = u_{h3}\, e^{i\omega_{13}} r_3,$$

d'où

$$\omega'_{13} = \omega_{13} \qquad (\mathrm{mod}\,\pi).$$

Dès lors, ayant des conditions analogues pour deux consécutives quelconques des chaînes (C_j), posons

$$\omega_1 = \omega_{42} - \omega_{12} = \omega_{43} - \omega_{13},$$
$$\omega_2 = \omega_{13} - \omega_{23} = \omega_{14} - \omega_{24},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Comme on peut multiplier les équations d'une chaîne par un facteur sans changer cette chaîne, nous pouvons prendre

$$\omega_{12} = \omega_{23} = \omega_{34} = \omega_{41} = 0,$$

et nous aurons

$$\omega_{13} = \omega_2, \qquad \omega_{14} = \omega_2 + \omega_3,$$
$$\omega_{24} = \omega_3, \qquad \omega_{21} = \omega_3 + \omega_4,$$
$$\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots,$$

ce qui donne aux (C_j) les équations suivantes :

$$(66)\qquad \begin{cases} (C_1): & z_h = u_{h2} r_2 + e^{i\omega_2} u_{h3} r_3 + e^{i(\omega_2+\omega_3)} u_{h4} r_4, \\ (C_2): & z_h = u_{h3} r_3 + e^{i\omega_3} u_{h4} r_4 + e^{i(\omega_3+\omega_4)} u_{h1} r_1, \\ (C_3): & z_h = u_{h4} r_4 + e^{i\omega_4} u_{h1} r_1 + e^{i(\omega_4+\omega_1)} u_{h2} r_2, \\ (C_4): & z_h = u_{h1} r_1 + e^{i\omega_1} u_{h2} r_2 + e^{i(\omega_1+\omega_2)} u_{h3} r_3. \end{cases}$$

Une transformation homographique ferait correspondre les points V_i à quatre points trois à trois linéairement indépendants et arbitrairement donnés (chap. I, § 4). Deux cycles transformés homographiques l'un de l'autre étant considérés comme équivalents, il résulte de (66) *qu'un cycle pochhammérien de quatre chaînes planaires dépend de quatre paramètres réels*, à savoir ω_1, ω_2, ω_3, ω_4. Nous prouverons plus loin l'invariance de ces paramètres.

Dans le tableau des coordonnées u_{hk} $(h = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3, 4)$, soient α_1, α_2, α_3, α_4 les quatre déterminants du troisième ordre, dont aucun n'est nul, grâce à l'indépendance linéaire des points V_i trois à trois, et qui permettent d'écrire, quel que soit h,

$$\alpha_1 u_{h1} + \alpha_2 u_{h2} + \alpha_3 u_{h3} + \alpha_4 u_{h4} = 0.$$

Les nombres u_{hk} n'étant déterminés jusqu'ici qu'à quatre facteurs près, on peut choisir ceux-ci de manière à avoir

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$$

et, par conséquent, quel que soit h,

$$u_{h1} + u_{h2} + u_{h3} + u_{h4} = 0. \tag{67}$$

Cherchons, dans ces conditions, les angles du cycle (66).

Reprenons pour cela le point V, de coordonnées u_h, qui compose avec la chaîne linéaire l'intersection des chaînes (C_1) et (C_2). Nous devons avoir

$$u_h = u_{h2} r'_2 + e^{i\omega_2} u_{h3} r'_3 + e^{i(\omega_2+\omega_3)} u_{h4} r'_4 = \lambda [e^{i\omega_2} u_{h3} r''_3 + e^{i(\omega_2+\omega_3)} u_{h4} r''_4 + e^{i(\omega_2+\omega_3+\omega_4)} u_{h1} r''_1], \tag{68}$$

où $r'_2, r'_3, r'_4, r''_3, r''_4, r''_1$, sont réels et λ complexe. Les nombres r'_2 et r''_1 étant nécessairement différents de zéro, sans quoi le point V appartiendrait à la chaîne linéaire, nous pouvons tirer de (68) u_{h2} et u_{h1}, ce qui permet d'écrire les équations de (C_1) et de (C_2) sous la forme

$$z_h = \frac{u_h}{r'_2} r_2 + e^{i\omega_2} u_{h3} \left(r_3 - \frac{r'_3}{r'_2} r_2 \right) + e^{i(\omega_2+\omega_3)} u_{h4} \left(r_4 - \frac{r'_4}{r'_2} r_2 \right).$$

$$z_h = \frac{u_h}{\lambda r''_1} r_1 + e^{i\omega_2} u_{h3} \left(r_3 - \frac{r''_3}{r''_1} r_1 \right) + e^{i(\omega_2+\omega_3)} u_{h4} \left(r_4 - \frac{r''_4}{r''_1} r_1 \right).$$

L'angle des deux chaînes (de la chaîne linéaire au point V) se met ainsi en évidence et est égal à $-\arg\lambda$. Or, en portant dans (68) la valeur de u_{h1} tirée de (67) et identifiant, on trouve les relations

$$\begin{cases} r'_2 = -\lambda e^{i(\omega_2+\omega_3+\omega_4)} r''_1, \\ r'_3 = \lambda [r''_3 - e^{i(\omega_2+\omega_4)} r''_1], \\ r'_4 = \lambda [r''_4 - e^{i\omega_4} r''_1], \end{cases} \tag{69}$$

dont la première donne r'_2 et r''_1 n'étant pas nuls,

$$\arg\lambda = -(\omega_2 + \omega_3 + \omega_4) \pmod{\pi}. \tag{70}$$

L'angle considéré égale donc $\omega_2 + \omega_3 + \omega_4$.

En égalant à θ_i les angles du cycle (66), on a ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = \theta_1 \\ \omega_3 + \omega_4 + \omega_1 = \theta_2 \\ \omega_4 + \omega_1 + \omega_2 = \theta_3 \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \theta_4 \end{array} \right\} \pmod{\pi}, \tag{71}$$

d'où

$$3\sum\omega = \sum\theta \pmod{\pi},$$

$$\sum\omega = \frac{\sum\theta}{3} + \frac{m\pi}{3} \pmod{\pi}, \tag{72}$$

m désignant un nombre entier. En donnant à m les valeurs 0, 1, 2, on obtiendra pour ω_i trois systèmes de valeurs différents :

$$\omega_i = \frac{\sum\theta}{3} - \theta_i + \frac{m\pi}{3} \pmod{\pi}. \tag{73}$$

On peut ainsi conclure : la solution du problème géméotrique que nous nous sommes posé n'est pas unique, mais triple : *chaque système de valeurs* θ_i *détermine, à des transformations homographiques près, trois cycles pochhammériens différents.*

8. Examen des cas exceptés. — L'indépendance linéaire des plans Π_i trois à trois, caractéristique du cas général considéré, ne peut tomber en défaut que lorsqu'il existe un point au moins que les quatre chaînes (C_i) possèdent en commun. En effet, supposons, pour fixer les idées, que les plans Π_1, Π_2, Π_3 ne sont pas linéairement indépendants; distinguons les trois cas suivants :

1° Π_1 et Π_2 ne sont pas confondus, ni Π_2 et Π_3. Il existe alors un point unique, commun aux trois plans, intersection commune des trois chaînes linéaires correspondantes dont (γ_1) et (γ_2) ne sont pas confondues, ni (γ_2) et (γ_3).

2° Π_1 et Π_2 sont confondus, mais non Π_2 et Π_3. Les chaînes (γ_1) et (γ_2) sont alors confondues; leur intersection avec (γ_3) donne le point unique commun à (γ_1), (γ_2), (γ_3).

Résultat analogue si Π_2 et Π_3 sont confondus, mais non Π_1 et Π_2.

3° Les trois plans sont confondus. Il en est alors de même des trois chaînes linéaires.

Il existe ainsi, dans tous les cas, un point au moins commun à (γ_1), (γ_2), (γ_3) et, par conséquent, aux chaînes (C_1), (C_2), (C_3), (C_4) dont chacune passe par une au moins des trois chaînes linéaires.

Un tel point, laissé fixe par chacune des symétries fondamentales, reste fixe par le groupe de monodromie qu'elles déterminent : il est caractéristique pour toutes les homographies du groupe. En le prenant pour le point (0, 0, 1), considérons une quelconque de ces homographies.

$$\begin{aligned} Z_1 &= C_{11} z_1 + C_{12} z_2 + C_{13} z_3, \\ Z_2 &= C_{21} z_1 + C_{22} z_2 + C_{23} z_3, \\ Z_3 &= C_{31} z_1 + C_{32} z_2 + C_{33} z_3, \end{aligned}$$

Le point (0, 0, 1) devant se reproduire par cette substitution, on a nécessairement

$$C_{13} = C_{23} = 0,$$

ce qui montre que les solutions z_1 et z_2 se transforment indépendamment de z_3 et vérifient, par conséquent, un système différentiel d'ordre 2. *Le système* (2), *d'ordre* 3, *a dû être réductible à des systèmes d'ordre inférieur.*

En nous bornant aux systèmes (2) irréductibles ([10]), nous ne devrons donc considérer, pour obtenir les chaînes fondamentales, que les cycles du paragraphe précédent.

([10]) Hypothèse déjà admise au chapitre II (§ 4).

9. Les points X_i. — Les angles θ_i du paragraphe 7, que nous identifierons plus loin aux nombres

$$(\alpha+\gamma)\pi,\quad (\beta+\gamma)\pi,\quad (\gamma+\delta)\pi,\quad -(\alpha+\beta+\delta)\pi,$$

ne doivent jamais être nuls (mod π) : le cycle de chaînes fondamentales n'est pochhammérien, au sens strict que nous avons donné à ce mot, que sous cette condition. Nous ne nous étendrons pas sur les cas ainsi écartés; on pourra les obtenir comme limites des cas étudiés.

Reprenons, dans ces conditions, les formules (69) et (70) qui nous donnent pour le point V, par séparation de parties réelles et imaginaires,

$$\frac{r_3''}{\sin\omega_2}=\frac{r_4''}{\sin(\omega_2+\omega_3)}=\frac{r_1''}{\sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4)},$$

$$\frac{r_2'}{r_1''}=\frac{r_3'}{r_1''\cos\omega_2-r_3''\cos(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}=\frac{r_4'}{r_1''\cos(\omega_2+\omega_3)-r_4''\cos(\omega_2+\omega_3+\omega_4)};$$

d'où

$$\frac{r_2'}{\sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}=\frac{r_3'}{\sin(\omega_3+\omega_4)}=\frac{r_4'}{\sin\omega_4}.$$

Il en résulte, d'après (68),

$$u_h=u_{h2}\sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4)+e^{i\omega_2}u_{h3}\sin(\omega_3+\omega_4)+e^{i(\omega_2+\omega_3)}u_{h4}\sin\omega_4,$$

ou encore, vectoriellement,

$$V=\sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4)+V_2\,e^{i\omega_2}\sin(\omega_3+\omega_4)V_3+e^{i(\omega_2+\omega_3)}\sin\omega_4 V_4.$$

L'angle $\theta_4=\omega_2+\omega_3+\omega_4$ n'étant pas nul (mod π), on a effectivement en V un point d'intersection de (C_1) et de (C_2) linéairement indépendant de (γ_4). Ce n'est autre que le point X_4.

On ne change pas le point en multipliant les trois coefficients de cette formule par un même facteur; on peut ainsi écrire

$$X_4=\sigma(-\omega_2-\omega_3-\omega_4)V_2+\sigma(-\omega_3-\omega_4)V_3+\sigma(-\omega_4)V_4, \tag{74}$$

avec

$$\sigma(a)=e^{ia}\sin a. \tag{75}$$

On vérifie sans peine l'identité

$$\sigma(a)-\sigma(b)=e^{2ib}\sigma(a-b) \tag{76}$$

grâce à laquelle il est facile, compte tenu de (67), de déduire de (74) d'autres expressions de X_4; on trouve ainsi

$$\begin{aligned}X_4&=e^{-2i\omega_4}[\sigma(\omega_4)V_1+\sigma(-\omega_2-\omega_3)V_2+\sigma(-\omega_3)V_3]\\&=e^{-2i(\omega_3+\omega_4)}[\sigma(\omega_3)V_4+\sigma(\omega_3+\omega_4)V_1+\sigma(-\omega_2)V_2]\\&=e^{-2i(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}[\sigma(\omega_2)V_3+\sigma(\omega_2+\omega_3)V_4+\sigma(\omega_2+\omega_3+\omega_4)V_1].\end{aligned} \tag{77}$$

Les analogues des formules (74) et (77) donnent de même les autres X_i. Celles qui rapportent trois des X_i à trois des V_i ont des déterminants que l'on calcule sans peine, grâce toujours à (76); on a ainsi, par exemple, en valeur absolue,

$$(78)\quad \left|\frac{D(X_1, X_2, X_3)}{D(V_1, V_2, V_3)}\right| = \left|\frac{D(X_1, X_2, X_3)}{D(V_2, V_3, V_1)}\right| = \left|\frac{D(X_1, X_2, X_3)}{D(V_3, V_1, V_2)}\right| = \left|\sigma(\omega_4)\left[\sigma\Big(\sum\omega\Big)\right]^2\right| = |\sin\omega_4|\sin^2\Big(\sum\omega\Big).$$

Les points V_i étant linéairement indépendants trois à trois, il en sera de même des points X_i *si ni* ω_i *ni la somme de ces paramètres ne sont multiples de* π.

Écrivons enfin, à côté de (74),

$$X_2 = e^{-2i\omega_1}[\sigma(\omega_1)V_2 + \sigma(-\omega_2-\omega_4)V_3 + \sigma(-\omega_3)V_4],$$

ce qui donne

$$X_1 - e^{2i\omega_1}X_2 = [\sigma(-\omega_2-\omega_3-\omega_4) - \sigma(\omega_1)]V_2 = e^{2i\omega_1}\sigma\Big(-\sum\omega\Big)V_2,$$

ou encore

$$(79)\qquad X_1 e^{-2i\omega_1} - X_2 = \sigma\Big(-\sum\omega\Big)V_2.$$

Comme $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 0$, on en déduit

$$(80)\qquad X_1(e^{-2i\omega_1}-1) + X_2(e^{-2i\omega_2}-1) + X_3(e^{-2i\omega_3}-1) + X_4(e^{-2i\omega_4}-1) = 0.$$

10. Interprétation géométrique des ω_i. — Par quatre points trois à trois linéairement indépendants, il passe une, et une seule, chaîne planaire (chap. I, § 5). Trois de ces points étant pris pour les points (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), la famille qu'ils déterminent se compose de chaînes planaires de la forme

$$z_1 = e^{i\alpha_1}r_1, \qquad z_2 = e^{i\alpha_2}r_2, \qquad z_3 = e^{i\alpha_3}r_3.$$

Les coordonnées a_1, a_2, a_3 du quatrième point étant nécessairement différentes de zéro, les relations

$$\frac{a_1}{e^{i\alpha_1}r_1} = \frac{a_2}{e^{i\alpha_2}r_2} = \frac{a_3}{e^{i\alpha_3}r_3}$$

donnent univoquement les différences $\alpha_2 - \alpha_1$, $\alpha_3 - \alpha_1$.

Considérons maintenant les équations

$$\begin{aligned} z_h &= u_{h2}r_2 + u_{h3}r_3 + u_{h4}r_4,\\ z_h &= u_{h3}r_3 + u_{h4}r_4 + u_{h1}r_1,\\ z_h &= u_{h4}r_4 + u_{h1}r_1 + u_{h2}r_2,\\ z_h &= u_{h1}r_1 + u_{h2}r_2 + u_{h3}r_3, \end{aligned}$$

qui résultent de (66) par l'évanouissement des ω_i. La condition (67) a pour conséquence qu'elles représentent une même chaîne planaire, celle donc qui

passe par les quatre points V_i et que nous désignerons par (G). En les comparant aux équations (66), on voit que *les* ω_i *sont les divers angles que les chaines* (C_i) *forment avec* (G) : la chaine (C_1), par exemple, forme avec (G) les angles ω_2 et ω_3.

L'invariance des paramètres ω_i se trouve ainsi mise en évidence.

11. Détermination de l'entier m. — Pour appliquer le paragraphe 7 à la fonction hypergéométrique, considérons, comme au paragraphe 6, un plan analytique passant par un des points triplement singuliers, soit le plan $y = b (b > 1)$ pour fixer les idées, auquel correspondent quatre chaînes fondamentales formant, comme nous l'avons vu, un cycle pochhammérien. Les quatre homographies fondamentales qui doivent en résulter, chacune par deux symétries, ne sont autres que les substitutions $S_{0,x}$, $S_{1,x}$, $S_{\infty,x}$, $S_{x,x}$; leurs quotients propres, calculés au chapitre II, sont les nombres suivants :

$$\varepsilon_1\varepsilon_3 = e^{2i(\alpha-\gamma)\pi}, \qquad \varepsilon_2\varepsilon_3 = e^{2i(\beta+\gamma)\pi}, \qquad \varepsilon_3\varepsilon_4 = e^{2i(\gamma+\delta)\pi},$$
$$\varepsilon_3\varepsilon_5 = \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_4^{-1} = e^{-2i(\alpha+\beta+\delta)\pi}.$$

Les demi-arguments de ces nombres donnent les angles du cycle :

$$(81)\qquad \begin{cases} \theta_1 = (\alpha+\gamma)\pi, \qquad \theta_2 = (\beta+\gamma)\pi, \qquad \theta_3 = (\gamma+\delta)\pi, \\ \theta_4 = -(\alpha+\beta+\delta)\pi, \end{cases}$$

ce qui détermine, d'après le paragraphe 7, trois cycles différents. Il nous reste à reconnaître, parmi ces cycles, celui qui convient.

Cherchons pour cela l'intersection des chaînes (C_4) et (C_3). Nous devons avoir, pour tout point d'intersection,

$$u_{h2}r'_2 + e^{i\omega_2}u_{h3}r'_3 + e^{i(\omega_2+\omega_3)}u_{h4}r'_4 = \lambda\left[e^{i(\omega_3+\omega_4)}u_{h4}r''_4 + e^{i(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}u_{h1}r''_1 + e^{i\sum\omega}u_{h2}r''_2\right],$$

où r'_2, r'_3, r'_4, r''_4, r''_1, r''_2 sont réels et λ complexe. En remplaçant u_{h4} par sa valeur tirée de (67) et identifiant, nous obtiendrons les relations

$$r'_2 = \lambda\left[e^{i\sum\omega}r''_2 - e^{i(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}r''_1\right],$$
$$r'_3 = -\lambda\, e^{i(\omega_3+\omega_4)}r''_1,$$
$$r'_4 = \lambda\left[r''_4 - e^{i\omega_4}r''_1\right],$$

On peut les satisfaire en faisant d'abord $r''_1 = 0$. On a alors, soit

$$\arg\lambda = 0, \qquad r''_2 = 0,$$

ce qui donne le point V_4 ; soit

$$\arg\lambda = -\sum\omega, \qquad r''_4 = 0,$$

ce qui donne le point V_2.

Pour $r_1'' \neq 0$, la deuxième des trois relations exige

$$\arg\lambda = -(\omega_3 + \omega_4),$$

et les deux autres déterminent ensuite les rapports $r_3'' : r_1'' : r_2''$: on a ainsi un troisième point d'intersection V.

On en déduit, tout comme au paragraphe 7, les angles des deux chaines qui sont égaux à $\sum\omega$, de V_1 à V_2, et à $\omega_3+\omega_4$, de V_4 à V.

L'homographie qui résulte des deux symétries par rapport à (C_1) et à (C_3) est le produit de deux autres dont la première résulte de (C_4) et de (C_2), et la deuxième, de (C_2) et de (C_3). Elle n'est autre, par conséquent, que la substitution $S_{0x}S_{1x}$, dont nous connaissons, grâce au chapitre II (§ 7), les quotients propres :

$$\varepsilon_3 = e^{2i\gamma\pi}, \qquad \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = e^{2i\alpha-\beta+\gamma)\pi}.$$

Les demi-arguments de ces quotients propres devant égaler les angles des chaînes (C_4) et (C_3), il en résulte, en particulier,

$$\sum\omega = \gamma\pi \qquad (\mathrm{mod}\,\pi). \tag{82}$$

En portant dans (72) les valeurs (81) des θ_i et la valeur (82) de $\sum\omega$, on constate ainsi que $m = 0$. Il vient donc, en définitive,

$$\omega_1 = -\alpha\pi, \qquad \omega_2 = -\beta\pi, \qquad \omega_3 = -\delta\pi, \qquad \omega_4 = (\alpha+\beta+\gamma+\delta)\pi \quad (\mathrm{mod}\,\pi). \tag{83}$$

Le cycle de chaînes fondamentales considéré achève ainsi de se construire géométriquement; les parties non entières des constantes α, β, γ, δ interviennent seules, comme on devait s'y attendre, dans le résultat.

Le problème du groupe de monodromie est dès lors résolu :

Trois branches fondamentales de l'intégrale

$$\int u^\alpha(u-1)^\beta(u-x)^\gamma(u-b)^\delta\,du \qquad (b>1),$$

se transforment par des homographies qu'un cycle de quatre chaînes planaires détermine par symétries successives; les équations (66) *donnent les quatre chaînes à une transformation homographique près lorsque les* ω_i *ont les valeurs* (83).

Le groupe de ces homographies, groupe de monodromie de l'intégrale précédente, n'est pas celui de l'intégrale

$$\int u^\alpha(u-1)^\beta(u-x)^\gamma(u-y)^\delta\,du.$$

Il n'en est encore qu'un sous-groupe, mais un sous-groupe qui le *détermine*, grâce aux relations de permutabilité. La figure 14 du chapitre III prouve cette détermination de la manière suivante :

Les substitutions fondamentales des deux groupes étant respectivement

$$S_{0x},\quad S_{1x},\quad S_{xy},\quad S_{xz}=S_{1y}S_{0y}S_{01},$$

et

$$S_{0x},\quad S_{1x},\quad S_{xy},\quad S_{1y},\quad S_{0y},\quad S_{01},$$

on peut obtenir S_{1y}, S_{0y}, S_{01} à partir de S_{0x}, S_{1x}, S_{xy}, S_{xz}. Le point et le plan caractéristiques de S_{1y} résultent, en effet, de ceux de S_{0x} et de S_{xz} : P_{1y} est le point d'intersection de H_{0x} et de H_{xz} ; H_{1y} est le plan qui passe par P_{0x} et P_{xz}. On en déduit S_{1y}, dont on connaît en effet le quotient propre. On raisonne de même pour S_{0y} et S_{01}.

12. Hypersurface hermitienne. — Une hypersurface hermitienne (H) étant l'ensemble des points dont les coordonnées homogènes annulent une forme d'Hermite

$$H(Z)=H(z_1, z_2, z_3)=A_{hk}\bar{z}_h z_k \qquad (A_{kh}=\overline{A}_{hk}),$$

deux points $Z(z_1, z_2, z_3)$, $Z'(z'_1, z'_2, z'_3)$ sont *conjugués* par rapport à (H) si l'on a

$$H(Z, Z')=A_{hk}\bar{z}_h z'_k=0,$$

ce qui entraîne aussi

$$H(Z', Z)=0,$$

les deux quantités complexes $H(Z, Z')$ et $H(Z', Z)$ étant toujours conjuguées.

Une chaîne planaire est *orthogonale* à (H) si elle contient trois points linéairement indépendants deux à deux conjugués. Une telle chaîne étant donnée, la transformation homographique qui la ramène à la chaîne réelle (C_0) ramène (H) à une hypersurface hermitienne (H_0) par rapport à laquelle trois points réels sont conjugués. Une homographie réelle pouvant faire correspondre deux groupes quelconques de trois points réels linéairement indépendants, et les formes d'Hermite diagonales donnant les seules hypersurfaces hermitiennes qui conjuguent les points (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), il en résulte qu'on peut obtenir l'équation de (H_0) comme transformée homographique réelle d'une équation diagonale; tous ses coefficients sont donc réels :

Les formes d'Hermite à coefficients réels donnent les hypersurfaces hermitiennes orthogonales à la chaîne réelle.

On ne change pas ces formes lorsqu'on permute z_i et $\bar{z}_i$. Il en résulte que tout point de (H_0) a pour symétrique par rapport à (C_0) un autre point de (H_0) : *la symétrie par rapport à* (C_0) *conserve* (H_0), ce qui suffit pour en dire autant de (H) et des chaînes planaires orthogonales à (H).

L'homographie qui résulte de deux chaînes planaires (C) et (C'), orthogonales à (H), conserve encore (H). Nous bornant au cas où elle possède un point et un plan caractéristiques linéairement indépendants, montrons que *le premier a le second pour plan conjugué, lieu de ses points conjugués.*

En effet, désignons par S la substitution linéaire, matrice de l'homographie considérée. Les neuf coefficients de S n'étant déterminés qu'à un facteur près, on peut choisir celui-ci de telle manière que S ne conserve pas seulement (H), mais la forme d'Hermite elle-même qui s'y annule. On a ainsi, quel que soit Z,

$$H(SZ) = H(Z),$$

ce qui entraîne, quels que soient Z_1 et Z_2,

$$H(SZ_1, SZ_2) = H(Z_1, Z_2),$$

Comme on a, pour deux points caractéristiques, à valeurs propres λ_1 et λ_2,

$$SZ_1 = \lambda_1 Z_1, \qquad SZ_2 = \lambda_2 Z_2,$$

on en déduit

$$H(SZ_1\, SZ_2) = \bar{\lambda}_1 \lambda_2 H(Z_1\, Z_2) = H(Z_1, Z_2),$$

ou encore

$$(\bar{\lambda}_1 \lambda_2 - 1) H(Z_1\, Z_2) = 0.$$

Deux points caractéristiques pour lesquels le produit $\bar{\lambda}_1 \lambda_2$ diffère de l'unité se trouvent ainsi nécessairement conjugués. C'est bien le cas du point caractéristique isolé P et d'un point quelconque du plan caractéristique Π : le rapport $\lambda_1 : \lambda_2$ étant alors unimodulaire, la relation $\bar{\lambda}_1 \lambda_2 = 1$ entraînerait $\lambda_1 : \lambda_2 = 1$, ce qui n'est possible que pour $S = 1$.

Reprenons maintenant les chaînes planaires du cycle (66); demandons-nous s'il existe une hypersurface hermitienne qui leur soit orthogonale à toutes. Elle doit conjuguer, d'après ce qui précède, quatre paires de point et de plan, à savoir le point X_1 et le plan V_3V_4, X_2 et V_4V_1, X_3 et V_1V_2, X_4 et V_2V_3. Ces conditions nécessaires sont aussi *suffisantes*, par suite de la structure du cycle. En effet, la chaîne (C_1), par exemple, porte sur elle les points X_3, X_4, V_2, V_3, V_4; les chaînes linéaires (γ_4) et (γ_4) passent respectivement par V_2 et V_3, V_3 et V_4. L'hypersurface qui conjugue X_4 et V_2V_3, et X_4 et V_3V_4, conjugue le point V_3 et le plan X_4X_4. Ce dernier plan, ayant deux points communs avec (C_1), rencontre (C_4) suivant une chaîne linéaire (γ'); le point où (γ_4), par exemple, rencontre (γ') forme avec X_4 et V_3 trois points deux à deux conjugués, ce qui assure l'orthogonalité de (H) et de (C_4).

Un point est conjugué à un plan s'il l'est à deux points de ce plan. Nous avons dès lors, pour le point X_1 et le plan V_3V_4, les conditions

$$H(X_1, V_3) = 0, \qquad H(X_1, V_4) = 0.$$

La formule (79) du paragraphe 9 ayant pour analogues

$$\sigma\Big(-\sum\omega\Big)V_3 = X_2\, e^{-2i\omega_3} - X^3, \qquad \sigma\Big(-\sum\omega\Big)V_4 = X_3\, e^{-2i\omega_3} - X_4,$$

il en résulte

$$H(X_1, X_2) = e^{2i\omega_3} H(X_1, X_3), \qquad H(X_4, X_3) = e^{2i\omega_3} H(X_1, X^4).$$

Nous avons des conditions semblables pour les autres paires de point et de plan, ce qui donne huit conditions en tout :

$$(84)\quad \begin{cases} H(X_1, X_2) = e^{2i\omega_2} H(X_1, X_3) = e^{2i(\omega_2+\omega_3)} H(X_1, X_4), \\ H(X_2, X_3) = e^{2i\omega_3} H(X_2, X_4) = e^{2i(\omega_3-\omega_4)} H(X_2, X_1), \\ H(X_3, X_4) = e^{2i\omega_4} H(X_3, X_1) = e^{2i(\omega_4+\omega_1)} H(X_3, X_2), \\ H(X_4, X_1) = e^{2i\omega_1} H(X_4, X_2) = e^{2i(\omega_1-\omega_2)} H(X_4, X_3). \end{cases}$$

Prenons par exemple celles de la première ligne. Nous pouvons écrire, compte tenu de la formule (80),

$$H(X_1, X_2) = \frac{H(X_1, X_3)}{e^{-2i\omega_2}} = \frac{H(X_1, X_4)}{e^{-2i(\omega_2+\omega_3)}} = \frac{-H(X_1)(e^{-2i\omega_1}-1)}{e^{-2i(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}-1}$$
$$= \frac{-H(X_1)\sin\omega_1}{\sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}\, e^{i(-\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}.$$

En posant

$$(85)\qquad R_1 = \frac{-H(X_1)\sin\omega_1}{\sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}$$

nous avons ainsi les relations

$$(86)\quad \begin{cases} H(X_1, X_2) = R_1\, e^{i(-\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}, \\ H(X_1, X_3) = R_1\, e^{i(-\omega_1-\omega_2+\omega_3+\omega_4)}, \\ H(X_1, X_4) = R_1\, e^{i(-\omega_1-\omega_2-\omega_3+\omega_4)}, \end{cases}$$

dont chacune, il est clair, est conséquence des deux autres.

Si l'on joint à (86) les relations analogues qui résultent de la deuxième et de la troisième lignes de (84), six des neuf relations ainsi obtenues expriment les six nombres complexes $H(X_h, X_k)$ $(h, k = 1, 2, 3;\ h \neq k)$ en fonction des nombres réels R_1, R_2, R_3; les deux nombres $H(X_h, X_k)$ et $H(X_k, X_h)$ devant toujours être conjugués, il faudra qu'on ait

$$(87)\qquad R_1 = R_2 = R_3.$$

Pour les trois autres relations, conséquences de celles-là, elles entraînent à leur tour, grâce à (87), la quatrième ligne de (84).

Les conditions (84) *reviennent ainsi à égaler, à un facteur réel près, les neuf* $H(X_h, X_k)$ $(h, k = 1, 2, 3)$ *aux nombres suivants :*

$$(88)\quad \begin{cases} \dfrac{-\sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}{\sin\omega_1}, & e^{i(-\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}, & e^{i(-\omega_1-\omega_2+\omega_3+\omega_4)}, \\ e^{i(\omega_1-\omega_2-\omega_3-\omega_4)}, & \dfrac{-\sin(\omega_3+\omega_4+\omega_1)}{\sin\omega_2}, & e^{i(\omega_1-\omega_2+\omega_3+\omega_4)}, \\ e^{i(\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4)}, & e^{i(-\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4)}, & \dfrac{-\sin(\omega_4+\omega_1+\omega_2)}{\sin\omega_3}. \end{cases}$$

Les coefficients A_{hk} de la forme d'Hermite $H(Z)$ peuvent être écrits

$$A_{hk} = H(E_h, E_k),$$

E_1, E_2, E_3 désignant les points $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Les neuf $H(X_h, X_k)$ apparaissent ainsi comme n'étant autres que les coefficients de l'équation de (H) lorsqu'on rapporte cette hypersurface, non aux points E_1, E_2, E_3, mais aux points X_1, X_2, X_3. Les valeurs données de ces coefficients détermineront (H) si elles satisfont aux conditions hermitiennes : les valeurs diagonales doivent être réelles et les non diagonales, deux à deux conjuguées. C'est bien le cas des valeurs (88).

Nous supposons toujours que ni les ω_i ni leur somme ne sont multiples de π, ce qui assure, en particulier, comme nous l'avons vu au paragraphe 9, l'indépendance linéaire des points X_1, X_2, X_3.

Nous arrivons ainsi au résultat suivant :

Les paramètres ω_i *et leur somme étant supposés non nuls* $(\bmod \pi)$, *il existe une hypersurface hermitienne, et une seule, orthogonale aux quatre chaînes planaires du cycle* (66); *les nombres* (88) *donnent les coefficients de la forme d'Hermite qui la rapporte aux points* X_1, X_2, X_3.

En donnant aux ω_i les valeurs (83), nous obtenons ainsi l'hypersurface hermitienne qui se conserve par les substitutions S_{0x}, S_{1x}, S_{xy}, S_{xz} et par le groupe qu'elles engendrent. *Elle se conserve aussi par le groupe de monodromie du système* (2), lequel contient de plus, comme nous l'avons vu, S_{1y}, S_{0y}, S_{01}. En effet, l'hypersurface qui conjugue P_{0x} et Π_{0x}, et P_{xz} et Π_{xz}, conjugue le point P_{1y}, l'intersection de Π_{0x} et de Π_{xz}, et le plan Π_{1y}, qui passe par P_{0x} et P_{xz}. La substitution S_{1y}, qui a ainsi son point et son plan caractéristiques conjugués et dont le quotient propre est unimodulaire, conserve dès lors, comme on le démontrerait sans difficulté, la même hypersurface. On raisonne de même pour S_{0y} et S_{01}.

13. Nature elliptique ou hyperbolique de l'hypersurface. — Il est équivalent de dire d'une substitution S, soit qu'elle conserve l'hypersurface (H), soit qu'elle conserve, à un facteur près, la forme d'Hermite $H(z)$. C'est cette dernière manière de s'exprimer qui est la meilleure : elle demeure valable pour une forme d'Hermite qui ne s'annule jamais.

Étant donnée une forme d'Hermite, on peut la rendre diagonale en la rapportant à trois points M, M′, M″ deux à deux conjugués. En posant

$$Z = uM + u'M' + u''M'',$$

on a ainsi

$$H(Z) = A_{hk}\bar{z}_h z_k = B\bar{u}u + B'\bar{u}'u' + B''\bar{u}''u''.$$

Les coefficients B, B′, B″, toujours réels, ne sont autres que les nombres H(M), H(M′), H(M″). Ils conservent *ensemble* leurs signes lorsqu'on passe d'un système de trois points conjugués à un autre. La démonstration de cette propriété est la même que pour les formes quadratiques classiques : nous n'y insisterons pas.

Aucun des trois coefficients ne peut être nul si la forme d'Hermite n'est pas dégénérée, c'est-à-dire si $|A_{hk}| \neq 0$. En nous bornant aux formes d'Hermite non dégénérée, nous n'avons donc que deux cas à distinguer :

1° Les trois coefficients sont du même signe. La forme d'Hermite prend alors ce même signe quel que soit Z; elle est dite *elliptique*. Elle ne s'annule jamais.

2° Les trois coefficients ne sont pas du même signe, La forme d'Hermite, dite *hyperbolique*, peut alors s'annuler; elle donne une hypersurface hermitienne au sens strict, à trois dimensions réelles.

On peut trouver trois points conjugués de la forme

$$M(1, 0, 0), \quad M'(z_1', z_2', 0), \quad M''(z_1'', z_2'', z_3'').$$

On obtient d'abord le point M'' en remarquant que son plan conjugué, qui a pour équation

$$\sum A_{h1}\bar{z}_h''z_1 + \sum A_{h2}\bar{z}_h''z_2 + \sum A_{h3}\bar{z}_h''z_3 = 0,$$

n'est autre que $z_3 = 0$, ce qui donne

$$\sum A_{h1}\bar{z}_h'' = A_{11}\bar{z}_1'' + A_{21}\bar{z}_2'' + A_{31}\bar{z}_3'' = 0,$$

$$\sum A_{h2}\bar{z}_h'' = A_{12}\bar{z}_1'' + A_{22}\bar{z}_2'' + A_{32}\bar{z}_3'' = 0.$$

Les trois déterminants du second ordre de ces dernières relations étant identifiés à $\bar{z}_1''$, $\bar{z}_2''$, $\bar{z}_3''$, on en déduit

$$\sum A_{h3}\bar{z}_h'' = A_{13}\bar{z}_1'' + A_{23}\bar{z}_2'' + A_{33}\bar{z}_3'' = |A_{hk}|;$$

puis

$$H(M'') = |A_{kh}|\,z_3'' = |A_{kh}| \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}.$$

On obtient ensuite M' en opérant de même dans le sous-espace $z_3 = 0$; on aura de même

$$H(M') = H(z_1', z_2', 0) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} A_{11}.$$

Comme

$$H(M) = H(1, 0, 0) = A_{11},$$

il en résulte le critère suivant :

Pour que la forme d'Hermite H(Z) *soit elliptique, il faut et il suffit qu'on ait simultanément*

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad A_{11}\,|A_{hk}| > 0.$$

Pour l'hypersurface du paragraphe précédent, considérons toujours la forme d'Hermite qui la rapporte aux points X_1, X_2, X_3, forme dont nous avons en (88) le tableau des coefficients; désignons ces coefficients par A'_{hk}. Nous avons

$$\Delta_1 = A'_{11} = \frac{-\sin\theta_1}{\sin\omega_1} = \frac{-\sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}{\sin\omega_1},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{vmatrix} = \frac{\sin\theta_1\sin\theta_2}{\sin\omega_1\sin\omega_2} - 1,$$

$$\Delta_3 = |A'_{hk}| = \frac{-\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3}{\sin\omega_1\sin\omega_2\sin\omega_3} + \frac{\sin\theta_1}{\sin\omega_1} + \frac{\sin\theta_2}{\sin\omega_2} + \frac{\sin\theta_3}{\sin\omega_3} + 2\cos\left(\sum\omega\right).$$

On calcule sans difficultés ces expressions; on trouvera

$$(89)\qquad \begin{cases} \Delta_1 = \dfrac{-\sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}{\sin\omega_1}, \qquad \Delta_2 = \dfrac{\sin(\omega_3+\omega_4)\sin\left(\sum\omega\right)}{\sin\omega_1\sin\omega_2}, \\ \Delta_3 = \dfrac{-\sin\omega_4\sin^2\left(\sum\omega\right)}{\sin\omega_1\sin\omega_2\sin\omega_3}. \end{cases}$$

Les ω_i et leur somme n'étant pas nuls $(\mathrm{mod}\,\pi)$, le déterminant Δ_3 n'est jamais nul, ce qui assure la non-dégénérescence de $H(Z)$: cette forme d'Hermite sera elliptique ou hyperbolique. Les conditions d'ellipticité $\Delta_2 > 0$, $\Delta_1\Delta_3 > 0$, que simplifie encore la suppression de termes positifs et non nuls, deviennent

$$\sin\omega_1\sin\omega_2\sin(\omega_3+\omega_4)\sin\left(\sum\omega\right) > 0,$$

$$\sin\omega_2\sin\omega_3\sin\omega_4\sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4) > 0.$$

ou encore, compte tenu des valeurs (83),

$$(90)\qquad \begin{cases} \sin\alpha\pi\sin\beta\pi\sin\gamma\pi\sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi > 0, \\ \sin\beta\pi\sin\delta\pi\sin(\alpha+\gamma)\pi\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\pi > 0. \end{cases}$$

Nous avons vu que les parties non entières des constantes α, β, γ, δ influencent seules le groupe de monodromie; nous ne restreindrons donc pas les résultats en nous limitant au cas où ces constantes sont positives et inférieures à 1 :

$$(91)\qquad 0 < \alpha < 1, \qquad 0 < \beta < 1, \qquad 0 < \gamma < 1, \qquad 0 < \delta < 1,$$

ce qui permet de remplacer (90) par

$$(92)\qquad \sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi > 0, \qquad \sin(\alpha+\gamma)\pi\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\pi > 0.$$

Les inégalités (91) entraînant

$$0 < \alpha+\gamma < 2, \qquad 0 < \alpha+\beta+\gamma < 3, \qquad 0 < \alpha+\beta+\gamma+\delta < 4,$$

nous avons, pour les diverses valeurs de $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, les résultats suivants :

1° $0<\alpha+\beta+\gamma+\delta<1$. — Les trois sinus étant alors positifs, la forme d'Hermite est elliptique.

2° $1<\alpha+\beta+\gamma+\delta<2$. — On a alors, ou bien $\alpha+\gamma<1$, ou bien $\alpha+\beta+\gamma>1$.

Dans le premier cas.

$$\sin(\alpha+\gamma)\pi>0, \qquad \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\pi<0, \qquad \text{H(Z) hyperbolique.}$$

Dans le deuxième cas,

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi<0, \qquad \text{H(Z) hyperbolique.}$$

3° $2<\alpha+\beta+\gamma+\delta<3$, ce qui entraîne $\alpha+\beta+\gamma>1$. On a alors, ou bien $\alpha+\beta+\gamma<2$, ou bien $\alpha+\gamma>1$.

Dans le premier cas,

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi<0, \qquad \text{H(Z) hyperbolique.}$$

Dans le deuxième cas,

$$\sin(\alpha+\gamma)\pi<0, \qquad \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\pi>0, \qquad \text{H(Z) hyperbolique.}$$

4° $3<\alpha+\beta+\gamma+\delta<4$, ce qui entraîne $\alpha+\beta+\gamma>2$, $\alpha+\gamma>1$. On a alors

$$\sin(\alpha+\gamma)\pi<0, \qquad \sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi>0,$$
$$\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\pi<0, \qquad \text{H(Z) elliptique.}$$

On peut ainsi conclure :

Les constantes α, β, γ, δ *étant supposées non entières ainsi que leur somme, soient* α', β', γ', δ' *les quatre nombres positifs et inférieurs à* 1 *qui diffèrent de* α, β, γ, δ *par des entiers; la forme d'Hermite* H(Z) *est alors elliptique si l'on a*

$$\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'<1 \qquad \text{ou} \qquad \alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'>3,$$

hyperbolique si l'on a

$$1<\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'<3.$$

14. Dernière remarque. — Sans nous étendre sur les généralisations que le présent travail suggère naturellement, disons un mot des fonctions hypergéométriques de plus de deux variables

$$\int u^{\alpha}(u-1)^{\beta}(u-x)^{\gamma}(u-y)^{\delta}\ldots(u-t)^{\lambda}\,du.$$

Solutions d'un système d'équations aux dérivées pértielles complètement intégrable, semblable à (2), d'ordre $n+1$ pour n variables, elles admettent un

groupe de monodromie dont les substitutions sont d'ordre $n+1$. L'étude géométrique de ce groupe amène à considérer deux espaces, l'un pour les variables et l'autre pour les fonctions, espaces projectifs à n dimensions complexes. On étend sans peine à ces espaces beaucoup de nos résultats, ceux des chapitres III et IV en particulier.

Le fait de nous limiter à deux variables a par contre, comme on a pu le voir, rendu possibles d'importantes précisions sur la structure et la détermination du groupe de monodromie, grâce aux chapitres I et II.

BIBLIOGRAPHIE.

J. Kampé de Fériet, *La fonction hypergéométrique* (*Mémor. Sc. Math.*, fasc. 85, 1937).

L. Fuchs, *Zur theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten* (*Journal de Crelle*, t. 66, p. 121 et suiv.).

L. Pochhammer, *Ueber Hypergeometrische Funktionen n-ter Ordnung* (*Journal de Crelle*, t. 71, 1869, p. 316 et suiv.) (*Cf.* Note de Fuchs, *ibid.*, t. 72, p. 255 et suiv.).

L. Pochhammer, *Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf* (*Math. Ann.*, t. 35, 1890, p. 470 et suiv.).

P. Appell, *Séries hypergéométriques de plusieurs variables* (*Mémor. Sc. Math.*, fasc. 3, 1925).

E. Picard, *Extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 2e série, t. 10, 1881, p. 303-322).

E. Picard, *Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 3e série, t. 2, 1885, p. 357-384).

E. Cartan, *Leçons sur la géométrie projective complexe*, Paris, 1931, p. 124 et suiv.

V. Ou Tchen-Yang, *Sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 1524-1526).

ÉTUDE DE
CERTAINES FONCTIONS MÉROMORPHES BORNÉES SUR LE CERCLE UNITÉ
APPLICATION A UN
ENSEMBLE FERMÉ D'ENTIERS ALGÉBRIQUES

PAR MM. J. DUFRESNOY ET CH. PISOT.

1. — Introduction.

Nous allons poursuivre ici l'étude de l'ensemble S des entiers algébriques θ supérieurs à 1 et dont tous les conjugués ont un module strictement inférieur à 1. Nous avons déjà consacré à cette question un Mémoire (1) dont, en règle générale, nous utiliserons les notations.

Nous représenterons donc par

$$P(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_{s-1} z^{s-1} + \varepsilon z^s,$$

où $p_0 > 0$, $\varepsilon = \pm 1$, le polynome irréductible ayant θ pour zéro et par $Q(z)$ le polynome

$$Q(z) = \varepsilon z^s P\left(\frac{1}{z}\right).$$

Excepté pour les polynomes $P(z)$ de la forme $1 + p_1 z + z^2$, où $p_1 \geq -3$, la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ a un module égal à 1 sur $|z| = 1$ et possède dans le cercle unité un pôle et un seul $z = \frac{1}{\theta}$. Au voisinage de l'origine, elle a un développement en série de puissances à coefficients entiers. Cette fraction rationnelle joue un rôle essentiel dans l'étude de l'ensemble S.

(1) *Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.*, t. 70, 1953, p. 105-133. Quelques compléments ont été donnés ultérieurement dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques*, t. 77, 1953, p. 129-136.

Rappelons que l'ensemble S est fermé (²). Dans notre Mémoire cité, nous avons démontré que $\theta_\infty = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le plus petit élément de l'ensemble dérivé S'; nous avons aussi obtenu les quatre plus petits éléments de S. On sait que M. Siegel, avait déterminé antérieurement (³) les deux plus petits éléments; il n'a pas obtenu tous les nombres de S inférieurs à θ_∞; mais il a toutefois signalé parmi ceux-ci les nombres suivants que nous désignerons par θ_n et θ'_n (⁴) :

θ_n, zéro de $P_{2p}(z) = \frac{1-z^{2p}(1+z-z^2)}{1-z}$ si $n = 2p$ $(p \geq 1)$.

» de $P_{2p-1}(z) = \frac{1-z^{2p-1}(1+z-z^2)}{1-z^2}$ si $n = 2p-1$ $(p \geq 1)$;

θ'_n, zéro de $1 - z^2 + z^n(1+z-z^2)$ avec $n \geq 1$.

Ici, par une méthode nouvelle, ne faisant pas appel à notre Mémoire antérieur, nous allons montrer que l'étude de S est intimement liée au « problème des coefficients » pour une fonction $f(z)$ méromorphe dans le domaine $|z| \leq 1$, ayant un seul pôle à l'intérieur de ce cercle et satisfaisant, sur $|z| = 1$, à $f(z) \leq |f(0)|$. Nous en déduirons la connaissance de *tous* les nombres de S qui sont inférieurs à θ_∞ et même de tous ceux qui dépassent θ_∞ d'une quantité suffisamment petite. En plus des nombres signalés par Siegel (θ_n et θ'_n), nous verrons que l'ensemble des nombres de S inférieurs à θ_∞ contient un nombre particulier θ'' qui est racine de l'équation

$$1 - z + z^2 - z^3 + 2z^5 - z^6 = 0.$$

Nous verrons que les nombres de S qui sont supérieurs à θ_∞ mais suffisamment voisins de θ_∞, appartiennent à l'une des deux familles suivantes : la première famille est formée des nombres

$\hat{\theta}_n$, zéro de $\hat{P}_{2p}(z) = \frac{1+z^{2p}(1+z-z^2)}{1+z}$ si $n = 2p$ $(p \geq 0)$,

» de $\hat{P}_{2p+1}(z) = 1 + z^{2p+1}(1+z-z^2)$ si $n = 2p+1$ $(p \geq 0)$;

la seconde famille est formée des nombres

$\hat{\theta}'_n$, zéro de $1 - z^2 - z^n(1+z-z^2)$ avec $n \geq 1$.

(²) R. Salem, *Duke Math. J.*, t. 11, 1944, p. 103-108.

(³) C. Siegel, *Duke Math. J.*, t. 11, 1944, p. 597-602.

(⁴) On peut remarquer que ce sont les seules familles de nombres de S tendant vers θ_∞ que les considérations de notre Mémoire cité mettent en évidence. En effet, θ_∞ étant totalement réel, on a, d'après le théorème 3, sur $|z| = 1$, les deux inégalités

$$1 \leq |1 + z - z^2| \quad \text{et} \quad |1 - z^2| < |1 + z - z^2|.$$

D'où la formation des deux familles, en opérant comme il a été indiqué dans la démonstration du théorème 1. On verra aisément qu'il n'existe pas, en dehors de ± 1 et $\pm(1-z^2)$, de polynome $A(z)$ à coefficients entiers, avec $A(0) \neq 0$, qui vérifie $|A(z)| \leq |1 + z - z^2|$ sur $|z| = 1$, l'égalité n'ayant lieu qu'en un nombre fini de points.

Chacune de ces familles est formée de nombres qui vont en décroissant lorsque l'indice n croit.

Ces résultats fournissent une nouvelle démonstration du fait que θ_2 est le plus petit élément de S'; on voit de plus que c'est un élément isolé de S' (5).

2. — Étude de certaines fonctions méromorphes.

Soit une fonction $f(z)$, méromorphe pour $|z|\leq 1$, réelle pour z réel (6), n'ayant dans $|z|\leq 1$ qu'un pôle $z=\alpha$ qui est simple (nécessairement réel) et satisfait à $0<\alpha<1$. Nous supposerons que $|f(z)|\leq 1$ sur $|z|=1$ et que $f(0)\geq 1$. Nous nous proposons d'étudier les coefficients (nécessairement réels) du développement en série de puissances de $f(z)$ au voisinage de l'origine, soit

$$f(z)=u_0+u_1z+\ldots+u_nz^n+\ldots.$$

Établissons d'abord un lemme qui nous sera plusieurs fois utile dans la suite.

LEMME PRÉLIMINAIRE. — *Soient* $A(z)$ *et* $B(z)$ *deux polynomes, vérifiant* $|B(z)|\leq|A(z)|$ *sur* $|z|=1$. *On considère la fonction*

$$\varphi(z)=B(z)f(z)-A(z).$$

Supposons qu'elle ne soit pas identiquement nulle et qu'elle présente, au voisinage de l'origine, le développement en série de puissances

$$\varphi(z)=a_kz^k+a_{k+1}z^{k+1}+\ldots \qquad \text{avec} \quad k\geq 1.$$

Alors, dans $|z|<1$, *le polynome* $A(z)$ *présente au moins* $k-1$ *zéros. Si ce nombre de zéros est exactement* $k-1$, *la fonction* $\varphi(z)$ *ne s'annule, dans* $|z|<1$, *qu'au point* $z=0$ *et l'on a* $a_k\neq 0$; *si, de plus,* $A(1)\neq 0$, *on a* $A(1)\varphi(z)(z-\alpha)<0$, *pour* z *réel, satisfaisant à* $0<z<1$, *donc* $A(1)a_k>0$.

Considérons en effet la fonction

$$\varphi_\lambda(z)=B(z)f(z)(z-\alpha)-\lambda A(z)(z-\alpha)$$

où λ est une constante réelle supérieure à 1. Le théorème de Rouché montre que, dans $|z|<1$, cette fonction présente le même nombre de zéros que $A(z)(z-\alpha)$. Quand λ tend vers 1, il doit y avoir k de ces zéros au moins qui tendent vers zéro. Il en résulte que, dans $|z|<1$, la fonction $\varphi_\lambda(z)$ doit présenter k zéros au moins, donc $A(z)$ doit présenter $k-1$ zéros au moins.

---

(5) Certains de nos résultats ont été résumés dans une Note (*C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 1551-1553).

(6) Quelques-unes des propriétés que nous obtiendrons dans la suite subsistent si l'on supprime les hypothèses de réalité.

Si $A(z)$ présente $k-1$ zéro exactement, $\varphi_\lambda(z)$ présente k zéros et ceux-ci tendent tous vers $z=0$ quand λ tend vers 1; il en résulte que, dans $|z|<1$, la fonction $\varphi(z)$ ne s'annule qu'à l'origine qui est un zéro d'ordre k, donc $a_k \neq 0$. D'autre part $\varphi_\lambda(z)$ conserve le signe de $\varphi_\lambda(1)$, c'est-à-dire le signe de $-A(1)$, pour z réel et satisfaisant à $\rho<z<1$, où ρ désigne le plus grand des modules des k zéros de $\varphi_\lambda(z)$; en faisant tendre λ vers 1, on en déduit

$$A(1)\varphi(z)(z-\alpha)<0 \qquad \text{pour} \quad 0<z<1,$$

d'où, en faisant tendre z vers zéro,

$$A(1)a_k>0,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

En appliquant ce lemme au cas $B(z)\equiv 1$, $A(z)\equiv u_0$, on en déduit que, dans $|z|<1$, la fonction $f(z)-u_0$ ne présente que le zéro $z=0$, que ce zéro est simple et que $u_1>0$.

Étude du cas $u_0>1$.

Considérons la fonction

$$f_1(z)=z\,\frac{u_0 f(z)-1}{f(z)-u_0}$$

Elle est holomorphe dans $|z|\leq 1$ et elle vérifie $|f_1(z)|\leq 1$ sur $|z|=1$. On a donc $|f_1(z)|\leq 1$ pour $|z|\leq 1$; en particulier $|f_1(0)|\leq 1$, soit $\left|\frac{u_0^2-1}{u_1}\right|\leq 1$, soit encore, compte tenu du signe de u_1,

$$u_1\geq u_0^2-1,$$

l'égalité n'ayant lieu que si $f_1(z)\equiv 1$, c'est-à-dire $f(z)\equiv \frac{u_0-z}{1-u_0 z}$.

Ce cas particulier étant écarté, nous appliquerons à la fonction holomorphe et bornée $f_1(z)$ la transformation classique qui conduit à la nouvelle fonction

$$f_2(z)=\frac{1}{z}\,\frac{f_1(z)-f_1(0)}{1-f_1(z)f_1(0)},$$

soit

$$f_2(z)=\frac{1}{z}\,\frac{[u_0u_1z-(u_0^2-1)]f(z)-[u_1z-u_0(u_0^2-1)]}{[u_1-u_0(u_0^2-1)z]f(z)-[u_0u_1-(u_0^2-1)z]}.$$

Dans $|z|\leq 1$, cette fonction $f_2(z)$ est holomorphe et vérifie $|f_2(z)|\leq 1$. En appliquant la dernière inégalité au point $z=0$, il vient

$$\left|\frac{u_0u_1^2-u_2(u_0^2-1)}{u_1^2-(u_0^2-1)^2}\right|\leq 1,$$

qu'on peut encore écrire (puisque le dénominateur est positif)

$$\frac{u_1^2}{u_0+1}+u_0^2-1\leq u_2\leq \frac{u_1^2}{u_0-1}-(u_0^2-1),$$

une égalité ne pouvant avoir lieu que si $f_2(z)\equiv\pm 1$.

Suivant un processus classique dans l'étude des fonctions holomorphes bornées, on peut faire sur $f_2(z)$ une transformation analogue à celle qui a été faite sur $f_1(z)$; cela conduit à une fonction $f_3(z) \equiv \frac{1}{z}\frac{f_2(z)-f_2(0)}{1-f_2(z)f_2(0)}$, holomorphe et bornée et ainsi de suite. En écrivant que $|f_3(0)| \leq 1$ et d'une façon générale $|f_n(0)| \leq 1$, on obtient une suite de doubles inégalités sur les coefficients u_0, $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$. Ces inégalités pourraient être étudiées directement, mais nous les retrouverons plus loin par une autre méthode, les donnant sous une forme qui sera plus pratique dans les applications.

Dans ce qui précède, les inégalités

$$|f_1(z)| \leq 1, \quad |f_2(z)| \leq 1, \quad \ldots, \quad |f_n(z)| \leq 1, \quad \ldots,$$

valables pour $|z| \leq 1$, ont été appliquées systématiquement au point $z = 0$. Appliquons-les maintenant au point $z = \alpha$.

L'inégalité $|f_1(\alpha)| \leq 1$ donne

$$|\alpha u_0| \leq 1, \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\alpha} \geq u_0.$$

L'inégalité $|f_2(\alpha)| \leq 1$ donne

$$\left|\frac{1}{\alpha}\,\frac{u_0u_1\alpha-(u_0^2-1)}{u_1-u_0(u_0^2-1)\alpha}\right| \leq 1,$$

qu'on peut encore écrire (puisque le dénominateur est positif)

$$\begin{cases} u_0\alpha^2+\dfrac{u_1}{1+u_0}\alpha-1 \leq 0, \\ u_0\alpha^2+\dfrac{u_1}{1-u_0}\alpha+1 \leq 0, \end{cases}$$

soit

$$\tau_2 \leq \frac{1}{\alpha} \leq \tau_2^*,$$

où τ_2 est le zéro supérieur à 1 du polynome $D_2(z) \equiv u_0+\frac{u_1}{1+u_0}z-z^2$ et τ_2^* le zéro supérieur à 1 du polynome $D_2^*(z) \equiv u_0+\frac{u_1}{1-u_0}z+z^2$.

Et ainsi de suite. La méthode que nous développerons plus loin nous permettra de traduire l'inégalité $|f_n(\alpha)| \leq 1$ de façon analogue.

Étude du cas $u_0 = 1$.

La construction précédente de la suite $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_n(z)$, ..., s'effondre lorsque $u_0 = 1$, puisqu'elle conduit à $f_1(z) \equiv z$, $f_2(z) \equiv 1$. Cependant des considérations de passage à la limite (7) nous ont amené à considérer la

(7) Introduisons en effet la fonction $g_2(z) \equiv \frac{u_0 f_2(z)-1}{u_0-f_2(z)}$; il est équivalent de dire que, dans

fonction

$$g_2(z) \equiv \frac{(z^2+u_1z-1)f(z)-(z^2-1)}{(z^2-u_1z-1)-(z^2-1)f(z)}.$$

Il résulte du lemme préliminaire que, dans $|z|<1$, le dénominateur de cette expression ne s'annule qu'en $z=0$ où il présente un zéro double. Mais, comme le montre son développement au voisinage de l'origine, le numérateur de $g_2(z)$ présente un zéro multiple en $z=0$. Par conséquent, la fonction $g_2(z)$ est holomorphe pour $|z|\leq 1$.

Sur $|z|=1$, l'expression $\lambda(z) \equiv \frac{z^2-u_1z-1}{z^2-1}$ a un module supérieur à 1; son imaginaire conjuguée est $\lambda\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+u_1z-1}{z^2-1}$, de sorte que l'on a

$$g_2(z) = \frac{\overline{\lambda(z)}f(z)-1}{\lambda(z)-f(z)}.$$

On en déduit aussitôt que $|g_2(z)|\leq 1$ sur $|z|=1$. On a donc $|g_2(z)|\leq 1$ pour $|z|\leq 1$.

A partir d'ici nous opérerons avec la fonction $g_2(z)$ comme nous opérions tout à l'heure avec la fonction $f_2(z)$. Nous obtiendrons une suite de fonctions holomorphes et bornées que nous désignerons par $g_3(z)$, ..., $g_n(z)$, ... Et nous aurons

$$|g_2(z)|\leq 1, \quad |g_3(z)|\leq 1, \quad \ldots, \quad |g_n(z)|\leq 1, \quad \ldots, \quad \text{pour } |z|\leq 1.$$

En appliquant ces inégalités au point $z=0$, nous obtiendrons les inégalités cherchées entre les coefficients $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$. La première d'entre elles est

$$|g_2(0)|\leq 1 \quad \text{soit} \quad \left|\frac{u_1^2-u_2}{u_2}\right|\leq 1 \quad \text{ou encore} \quad \frac{u_1^2}{2}\leq u_2.$$

En appliquant les inégalités au point $z=\alpha$, nous obtiendrons les inégalités faisant intervenir α. La première d'entre elles est

$$|g_2(\alpha)|\leq 1 \quad \text{soit} \quad \left|\frac{\alpha^2+u_1\alpha-1}{1-\alpha^2}\right|\leq 1 \quad \text{ou encore} \quad \alpha^2+\frac{u_1\alpha}{2}-1\leq 0$$

qu'on peut écrire

$$\tau_2\leq \frac{1}{\alpha}.$$

Nous avons ainsi mis en évidence l'essentiel de notre idée directrice : pour les fonctions méromorphes $f(z)$ on a des propriétés analogues à celles qu'on

---

$|z|<1$, $f_2(z)$ est holomorphe et de module au plus égal à 1, ou de dire que $g_2(z)$ jouit de ces propriétés. Or un calcul immédiat conduit à $g_2(z) \equiv \frac{(u_0z^2+u_1z-u_0)f(z)-(z^2-u_0^2)}{(u_0z^2-u_1z-u_0)-(u_0^2z^2-1)f(z)}$ qui pour $u_0=1$, donne la fonction que nous considérons.

obtient classiquement dans l'étude des fonctions holomorphes bornées quand on étudie le « problème des coefficients »; de plus le pôle α satisfait à une suite d'inégalités faisant intervenir les coefficients.

Avant de reprendre l'étude de la question par une autre méthode, donnons une application des considérations précédentes.

Application. — Recherche des fonctions $f(z)$ dont le développement en série de puissances est à coefficients entiers et commence par les termes $1+z+z^2$.

Considérons l'expression de $g_2(z)$. Son dénominateur $(z^2-z-1)-(z^2-1)f(z)$ a un développement à coefficients entiers dont le premier terme est z^2. Son numérateur $(z^2+z-1)f(z)-(z^2-1)$ a un développement à coefficients entiers dont le premier terme est du troisième degré au moins. Il en résulte que le développement de $g_2(z)$ est à coefficients entiers et ne contient pas de terme constant. Or la fonction $g_2(z)$ est holomorphe et de module au plus égal à 1 dans $|z|\leq 1$. Par conséquent $g_2(z)\equiv \pm z^n$ avec $n\geq 1$, ou $g_2(z)\equiv 0$, ce qui entraîne

$$f(z)\equiv \frac{1-z^2\pm z^n(1+z-z^2)}{1-z-z^2\pm z^n(1-z^2)} \qquad \text{ou} \qquad f(z)\equiv \frac{1-z^2}{1-z-z^2}.$$

On en déduit immédiatement la proposition suivante (⁸) :

Les seuls nombres θ de l'ensemble S dont les fractions rationnelles associées $\frac{P}{Q}$ ont un développement qui commence par $1+z+z^2$ sont les nombres θ'_n et $\hat{\theta}'_n$.

3. — Formation directe des inégalités précédentes.

La méthode que nous venons de suivre conduit à une expression explicite des premières inégalités indiquées, mais ne donne pas les suivantes sous une forme qui soit d'un maniement commode dans les applications. Aussi allons-nous reprendre entièrement la question d'une toute autre façon, en nous inspirant de l'étude classique du « problème des coefficients » pour une fonction holomorphe bornée (⁹). Nous partons toujours de la fonction méromorphe $f(z)$ satisfaisant aux conditions qui ont été indiquées dans la section précédente et qui présente comme développement au voisinage de l'origine

$$f(z)=u_0+u_1z+\ldots+u_nz^n+\ldots.$$

Définition des polynomes D_n et E_n.

Étant donné l'entier positif n, nous nous proposons de rechercher s'il existe un polynome $E_n(z)\equiv 1+\mu_1z+\mu_2z^2+\ldots+\mu_nz^n$ tel que, si l'on pose

(⁸) Nous avons déjà obtenu ce résultat [*Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.* (*loc cit.*), p. 119-120].

(⁹) Sur cette question on pourra consulter deux Mémoires de Schur (*J. reine ang. Math.*, t. 147, 1917, p. 205-232; t. 148, 1918, p. 122-145).

$D_n(z) \equiv -z^n E_n\left(\frac{1}{z}\right)$, la fraction rationnelle $\frac{D_n(z)}{E_n(z)}$ ait, au voisinage de l'origine, un développement en série de puissances qui commence par

$$u_0 + u_1 z + \ldots + u_{n-1} z^{n-1}.$$

Nous exprimerons cette propriété en écrivant que

$$(u_0 + u_1 z + \ldots + u_{n-1} z^{n-1}) E_n(z) - D_n(z)$$

est divisible par z^n. Nous obtiendrons ainsi pour déterminer les inconnues μ_1, μ_2, ..., μ_n un système de n équations linéaires. Pour rechercher si nous avons affaire à un système de Cramer, nous formerons le système homogène associé; or on voit immédiatement que celui-ci exprime que

$$(u_0 + u_1 z + \ldots + u_{n-1} z^{n-1})(\mu_1 z + \mu_2 z^2 + \ldots + \mu_n z^n) + (\mu_n + \mu_{n-1} z + \ldots + \mu_1 z^{n-1})$$

est divisible par z^n. Supposons que le système homogène ait une solution autre que la solution banale; cette solution peut toujours être supposée réelle; pour cette solution on aurait $\mu_p = 0$ pour $p \leq h$ et $\mu_{h+1} \neq 0$, où h est un certain entier positif ou nul; cela entraînerait $\mu_p = 0$ pour $p \geq n-h$ et $\mu_{n-h-1} \neq 0$, donc $n \geq 2h+2$; le polynome

$$(u_0 + u_1 z + \ldots + u_{n-1} z^{n-1}) \times (\mu_{h+1} + \mu_{h+2} z + \ldots + \mu_{n-h-1} z^{n-2h-2}) + (\mu_{n-h-1} + \mu_{n-h-2} z + \ldots + \mu_{h+1} z^{n-2h-2})$$

serait divisible par z^{n-h-1}, donc la fonction

$$\psi(z) \equiv f(z)(\mu_{h+1} + \mu_{h+2} z + \ldots + \mu_{n-h-1} z^{n-2h-2}) + (\mu_{n-h-1} + \mu_{n-h-2} z + \ldots + \mu_{h+1} z^{n-2h-2})$$

présenterait à l'origine un zéro d'ordre $n-h-1$ au moins.

Appliquons à cette fonction le lemme préliminaire. Nous distinguerons plusieurs cas :

a. $\psi(z) \not\equiv 0$ et $n > 2h+2$. Le polynome $\mu_{n-h-1} + \mu_{n-h-2} z + \ldots + \mu_{h+1} z^{n-2h-2}$ doit présenter $n-h-2$ zéros à l'intérieur du cercle unité. Or ce polynome présente en tout $n-2h-2$ zéros dont le produit des modules est

$$\left|\frac{\mu_{n-h-1}}{\mu_{h+1}}\right| = u_0 \geq 1,$$

donc au plus $n-2h-3$ zéros à l'intérieur du cercle unité. Il y a donc contradiction

b. $\psi(z) \not\equiv 0$ et $n = 2h+2$. On a alors

$$\psi(z) \equiv \mu_{h+1}[f(z) + 1],$$

expression qui ne s'annule pas à l'origine. Ce cas est donc impossible.

c. $\psi(z) \equiv 0$. Alors

$$f(z) = -\frac{\mu_{n-h-1} + \mu_{n-h-2} z + \ldots + \mu_{h+1} z^{n-2h-2}}{\mu_{h+1} + \mu_{h+2} z + \ldots + \mu_{n-h-1} z^{n-2h-2}}$$

serait une fraction rationnelle de degré $s \leq n-2$, ayant un module égal à 1 sur $|z|=1$. C'est le seul cas où le système homogène peut avoir une solution non banale, donc le seul cas où le système initial peut ne pas être un système de Cramer.

On précise aisément ce dernier point si l'on met la fraction rationnelle $f(z)$ sous la forme irréductible $\frac{U(z)}{V(z)}$ de degré s avec $V(0)=1$; on sait que

$$U(z) \equiv \varepsilon z^s V\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \text{où} \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Le système initial est Cramérien si $n \leq s+1$; il est encore Cramérien pour $n=s+2$ si de plus $\varepsilon=+1$.

Pour simplifier les énoncés qui vont suivre, nous appellerons *cas* B celui où $f(z)$ est une fraction rationnelle ayant un module égal à 1 sur $|z|=1$; *cas* A celui où cette propriété n'est pas réalisée.

Nous pouvons maintenant résumer nos résultats :

Lemme I. — *Dans le cas* A, *les polynomes* $D_n(z)$ *et* $E_n(z)$ *existent et sont uniques pour toute valeur de l'entier positif* n. *Dans le cas* B, *si* $f(1)=+1$, *il en est de même pour* $n \leq s+2$; *on vérifie alors que*

$$D_{s+1}(z) \equiv (1-z)U(z), \qquad D_{s+2}(z) \equiv (1-z^2)U(z),$$
$$E_{s-1}(z) \equiv (1-z)V(z), \qquad E_{s+2}(z) \equiv (1-z^2)V(z).$$

Dans le cas B, *si* $f(1)=-1$, *il en est de même pour* $n \leq s+1$; *on vérifie alors que*

$$D_s(z) \equiv U(z), \qquad D_{s+1}(z) \equiv (1+z)U(z),$$
$$E_s(z) \equiv V(z), \qquad E_{s+1}(z) \equiv (1+z)V(z).$$

Un calcul immédiat donne dans tous les cas

$$D_1(z) \equiv u_0 - z, \qquad D_2(z) \equiv u_0 + \frac{u_1}{1+u_0}z - z^2,$$
$$E_1(z) \equiv 1 - u_0 z, \qquad E_2(z) \equiv 1 - \frac{u_1}{1+u_0}z - u_0 z^2.$$

Définition des polynomes D_n^* et E_n^*.

Étant donné l'entier positif n, nous nous proposons de rechercher s'il existe un polynome $E_n^*(z) \equiv 1 + \mu_1^* z + \mu_2^* z^2 + \ldots + \mu_n^* z^n$ tel que, si l'on pose $D_n^*(z) \equiv z^n E_n^*\left(\frac{1}{z}\right)$, la fraction rationnelle $\frac{D_n^*(z)}{E_n^*(z)}$ ait, au voisinage de l'origine un développement en série de puissances qui commence par

$$u_0 + u_1 z + \ldots + u_{n-1} z^{n-1}.$$

Comme ci-dessus, nous formerons le système d'équations linéaires auquel

doivent satisfaire $\mu_1^*, \mu_2^*, \ldots, \mu_n^*$, puis le système homogène associé; ce dernier exprime que la fonction

$$\psi^*(z) \equiv f(z)(\mu_{h+1}^* + \mu_{h+2}^* z + \ldots + \mu_{n-h-1}^* z^{n-2h-2}) - (\mu_{n-h-1}^* + \mu_{n-h-2}^* z + \ldots + \mu_{h+1}^* z^{n-2h-2})$$

présente à l'origine un zéro d'ordre $n-h-1 \geqq h+1$ au moins. Nous distinguerons encore trois cas :

a. $\psi^*(z) \not\equiv 0$ et $n > 2h+2$. On est conduit à une contradiction comme précédemment.

b. $\psi^*(z) \not\equiv 0$ et $n = 2h+2$. On a alors

$$\psi^*(z) \equiv \mu_{h+1}^*[f(z) - 1].$$

Si $u_0 \neq 1$, cette expression ne s'annule pas à l'origine; donc ce cas est impossible. Si $u_0 = 1$, cette expression possède un zéro simple à l'origine; ce cas peut donc se présenter lorsque $h = 0$, $n = 2$; mais alors, on voit directement que le système non homogène est impossible.

c. $\psi^*(z) \equiv 0$. Alors

$$f(z) \equiv \frac{\mu_{n-h-1}^* + \mu_{n-h-2}^* z + \ldots + \mu_{h+1}^* z^{n-2h-2}}{\mu_{h+1}^* + \mu_{h+2}^* z + \ldots + \mu_{n-h-1}^* z^{n-2h-2}}$$

serait une fraction rationnelle de degré $s \leqq n-2$, ayant un module égal à 1 sur $|z| = 1$. C'est un cas où le système homogène peut avoir une solution non banale, donc un cas où le système initial peut ne pas être un système de Cramer. On précise comme plus haut que le système est encore Cramérien pour $n = s+2$, si de plus $\varepsilon = -1$.

Résumons ces résultats :

Lemme 2. — *Dans le cas* A, *les polynomes* $D_n^*(z)$ *et* $E_n^*(z)$ *existent et sont uniques pour toute valeur de l'entier positif* $n \neq 2$. *Dans le cas* B, *si* $f(1) = -1$, *il en est de même pour* $n \leqq s+2$; *on vérifie alors que :*

$$D_{s+1}^*(z) \equiv (1-z)\,U(z), \qquad D_{s+2}^*(z) \equiv (1-z^2)\,U(z),$$
$$E_{s+1}^*(z) \equiv (1-z)\,V(z), \qquad E_{s+2}^*(z) \equiv (1-z^2)\,V(z).$$

Dans le cas B *si* $f(1) = +1$, *il en est de même pour* $n \leqq s+1$; *on vérifie alors que :*

$$D_s^*(z) \equiv U(z), \qquad D_{s+1}^*(z) \equiv (1+z)\,U(z),$$
$$E_s^*(z) \equiv V(z), \qquad E_{s+1}^*(z) \equiv (1+z)\,V(z).$$

Ces résultats subsistent pour $n = 2$ *si* $u_0 \neq 1$. *Mais si* $u_0 = 1$, *les polynomes* $D_2^*(z)$ *et* $E_2^*(z)$ *n'existent pas.*

Un calcul immédiat donne

$$D_1^*(z) = u_0 + z, \qquad D_2^*(z) \equiv u_0 + \frac{u_1}{1-u_0} z + z^2,$$

$$E_1^*(z) = 1 + u_0 z, \qquad E_2^*(z) \equiv 1 + \frac{u_1}{1-u_0} z + u_0 z^2.$$

Complétons les résultats énoncés dans les lemmes 1 et 2 en recherchant ce qui arrive dans le cas B pour $n \geq s+2$. La méthode que nous allons suivre s'appliquerait encore à $n = s+1$, mais elle n'apporterait rien de nouveau. Si nous imposons toujours aux polynomes $D_n(z)$ et $E_n(z)$ les propriétés indiquées au début de cette section, on voit que

$$U(z)\,E_n(z) - V(z)\,D_n(z)$$

est un polynome divisible par z^n. Or, ce polynome se reproduit au signe près lorsqu'on change z en $\frac{1}{z}$ et qu'on multiplie l'expression obtenue par z^{n+s}. On a donc

$$U(z)\,E_n(z) - V(z)\,D_n(z) \equiv 0.$$

Il en résulte que

$$D_n(z) \equiv K(z)\,U(z)$$
$$E_n(z) \equiv K(z)\,V(z)$$

où $K(z)$ est un polynome de degré $n-s$ vérifiant

$$K(z) \equiv -f(1)\,z^{n-s}K\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \text{et} \qquad K(0) = 1.$$

Par conséquent, sauf si $n = s+2$ et $f(1) = +1$ (cas déjà vu dans le lemme 1), il existe une infinité de couples de polynomes $D_n(z)$ et $E_n(z)$; et pour chacun d'eux on a

$$\frac{D_n(z)}{E_n(z)} \equiv \frac{U(z)}{V(z)}.$$

On développerait des considérations analogues pour $D_n^*(z)$ et $E_n^*(z)$.

Propriétés fondamentales des polynomes D_n, E_n, D_n^*, E_n^*.

Dans le développement en série de puissances de $\frac{D_n(z)}{E_n(z)}$, nous connaissons les n premiers termes; nous désignerons par w_n le coefficient du terme suivant, de sorte que

$$\frac{D_n(z)}{E_n(z)} = u_0 + u_1 z + \ldots + u_{n-1} z^{n-1} + w_n z^n + \ldots.$$

Nous définirons de façon analogue w_n^*; on aura

$$\frac{D_n^*(z)}{E_n^*(z)} = u_0 + u_1 z + \ldots + u_{n-1} z^{n-1} + w_n^* z^n + \ldots.$$

Un calcul immédiat donne

$$w_1 = u_0^2 - 1, \qquad w_2 = u_0^2 - 1 + \frac{u_1^2}{1+u_0},$$

$$w_1^* = 1 - u_0^2, \qquad w_2^* = 1 - u_0^2 - \frac{u_1^2}{1-u_0} \qquad \text{si} \quad u_0 \neq 1.$$

Dans le cas A, les w_n et w_n^* sont bien définis pour $n \geq 2$.

Dans le cas B, ils sont bien définis pour $2 < n \leq s+1$; on a en particulier

$$w_s = u_s \quad \text{si} \quad f(1) = -1, \qquad w_s^* = u_s \quad \text{si} \quad f(1) = +1, \qquad w_{s+1} = w_{s+1}^* = u_{s+1}$$

et, pour $n \geq s+2$, quoiqu'il y ait une certaine indétermination sur les polynomes D_n, E_n, D_n^*, E_n^*, nous avons vu que

$$\frac{D_n(z)}{E_n(z)} = f(z) = \frac{D_n^*(z)}{E_n^*(z)},$$

d'où il résulte que

$$w_n = w_n^* = u_n.$$

Dans l'étude qui va suivre nous ne parlerons des polynomes D_n, E_n, D_n^*, E_n^*, que lorsqu'ils existent et sont définis sans ambiguïté (*voir* lemmes 1 et 2).

Considérons la fonction

$$E_n(z) f(z) - D_n(z) = (u_n - w_n) z^n + \dots.$$

Elle ne peut être identiquement nulle que si $f(z) \equiv \frac{D_n(z)}{E_n(z)}$, c'est-à-dire (*voir* lemme 1) si l'on est dans le cas B avec $s \leq n$ lorsque $f(1) = -1$, avec $s \leq n-1$ lorsque $f(1) = +1$. Sinon, le lemme préliminaire montre que $D_n(z)$ doit présenter dans $|z| < 1$, au moins $n-1$ zéros.

Mais, d'autre part, il résulte de la définition de $D_n(z)$ que le module du produit de ses zéros est égal à $u_0 \geq 1$. Par conséquent, sauf peut-être pour $n = 1$, le polynome $D_n(z)$ présente $n-1$ zéros à l'intérieur du cercle unité et un zéro $z = \tau_n$ extérieur au cercle unité. De plus, τ_n ne peut être négatif, sans quoi la fonction $\frac{D_n(-z)}{E_n(-z)} = u_0 - u_1 z + \dots$ satisferait à toutes les conditions imposées aux fonctions $f(z)$ au début de la section 2 (le pôle intérieur au cercle unité étant $z = -\frac{1}{\tau_n}$) d'où il résulterait $-u_1 > 0$, ce qui est faux.

On peut développer des considérations analogues sur le polynome $D_n^*(z)$, ce qui conduit au lemme suivant :

LEMME 3. — *Sauf peut-être pour $n = 1$, les polynomes $D_n(z)$ et $D_n^*(z)$ ont chacun un zéro et un seul extérieur au cercle unité. Ces zéros τ_n et τ_n^* sont supérieurs à 1. Dans le cas* A *les autres zéros sont intérieurs au cercle unité; il en est encore ainsi dans le cas* B *lorsque $n \leq s$.*

Dans ces conditions, le polynome $E_n(z)$ ne présente dans $|z| < 1$ que le zéro $\frac{1}{\tau_n}$. Puisque $E_n(0) = 1$, on a donc $E_n(1) < 0$, donc $D_n(1) > 0$. Étant toujours écarté le cas où $E_n(z) f(z) - D_n(z) \equiv 0$, le lemme préliminaire nous apprend alors que

$$(1) \qquad E_n(z) f(z) (z - \alpha) - D_n(z) (z - \alpha) < 0$$

pour x réel satisfaisant à $0 < x < 1$ et, en particulier, que

$$u_n - w_n > 0.$$

On peut développer des considérations analogues avec les polynomes $D_n^*(z)$ et $E_n^*(z)$, ce qui conduit au théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Dans le cas* A, *on a, si* $u_0 \neq 1$,

$$w_1 < u_1,$$
$$w_n < u_n < w_n^* \quad \textit{pour} \quad n \geq 2,$$

tandis que si $u_0 = 1$, *on a*

$$0 < u_1,$$
$$w_2 < u_2,$$
$$w_n < u_n < w_n^* \quad \textit{pour} \quad n \geq 3.$$

Dans le cas B, *il en est de même pour* $n < s$; *on a ensuite*

$$w_s = u_s < w_s^* \quad \textit{si} \quad f(1) = -1,$$
$$w_s < u_s = w_s^* \quad \textit{si} \quad f(1) = +1$$

et enfin

$$w_n = u_n = w_n^* \quad \textit{pour} \quad n \geq s+1.$$

Nous montrerons plus loin que ces inégalités sont celles que nous obtenions sous les formes $f_n(0) < 1$ ou $|g_n(0)| < 1$ dans l'étude de la section 2 ([10]).

Nous avons déjà remarqué que le module du produit des zéros de $D_n(z)$ est égal à $u_0 \geq 1$. Or l'un de ces zéros est z_n et tous les autres sont de module inférieur à 1. Il en résulte que tous les zéros ont un module supérieur ou égal à $\frac{1}{z_n}$, donc que $D_n\left(\frac{1}{z_n}\right) \geq 0$, puisque $D_n(0) = u_0 > 0$. En faisant $z = \frac{1}{z_n}$ dans l'inégalité (1), il vient

$$\frac{1}{z_n} - \alpha > 0.$$

On opérerait de façon analogue avec $D_n^*(z)$, $E_n^*(z)$ et z_n^*. On parvient ainsi au théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Dans le cas* A, *on a, si* $u_0 \neq 1$,

$$z_1 < \frac{1}{\alpha},$$
$$z_n < \frac{1}{\alpha} < z_n^* \quad \textit{pour} \quad n \geq 2,$$

([10]) Ces inégalités ne font intervenir que les coefficients u_n du développement de $f(z)$. La résolution des systèmes d'équations donnant les polynomes D_n, E_n, D_n^* et E_n^* permet, d'une manière analogue à celle employée dans le cas des fonctions holomorphes bornées dans le cercle $z < 1$, d'exprimer le théorème 1 sous la forme d'une suite d'inégalités portant sur des déterminants dont les éléments sont les coefficients u_n.

tandis que si $u_0 = 1$ *on a*

$$\tau_2 < \frac{1}{\alpha},$$

$$\tau_n < \frac{1}{\alpha} < \tau_n^* \qquad \textit{pour} \quad n \geqq 3.$$

Dans le cas B *il en est de même pour* $n < s$*; on a ensuite*

$$\tau_s = \frac{1}{\alpha} < \tau_s^* \qquad \textit{si} \quad f(1) = -1,$$

$$\tau_s < \frac{1}{\alpha} = \tau_s^* \qquad \textit{si} \quad f(1) = +1,$$

et enfin

$$\tau_{s+1} = \frac{1}{\alpha} = \tau_{s+1}^*.$$

Nous verrons plus loin que ces inégalités sont celles que nous avons obtenues sous les formes $|f_n(\alpha)| < 1$ ou $|g_n(\alpha)| < 1$ dans l'étude de la section 2.

Autres propriétés des polynomes D_n, E_n, D_n^*, E_n^*.

Il résulte immédiatement de nos définitions que

$$\frac{D_n^*(z)}{E_n^*(z)} - \frac{D_n(z)}{E_n(z)} = (w_n^* - w_n)\, z^n + \dots,$$

d'où

$$D_n^*(z)\, E_n(z) - D_n(z)\, E_n^*(z) \equiv (w_n^* - w_n)\, z^n + \dots,$$

En remarquant que le premier membre est un polynome qui n'est pas altéré par le changement de z en $\frac{1}{z}$ suivi de la multiplication par z^{2n}, on en déduit

$$(1) \qquad D_n^*(z)\, E_n(z) - D_n(z)\, E_n^*(z) \equiv (w_n^* - w_n)\, z^n.$$

Cette identité montre, en particulier, que les polynomes $D_n(z)$ et $E_n(z)$ sont premiers entre eux et qu'il en est de même des polynomes $D_n^*(z)$ et $E_n^*(z)$.

On établira par un raisonnement tout à fait analogue les identités suivantes :

$$(2) \qquad D_{n+1}(z)\, E_n(z) - D_n(z)\, E_{n+1}(z) \equiv (u_n - w_n)\, z^n (1 - z),$$

$$(3) \qquad D_{n+1}(z)\, E_n^*(z) - D_n^*(z)\, E_{n+1}(z) \equiv (u_n - w_n^*)\, z^n (1 + z),$$

$$(4) \qquad D_{n+1}^*(z)\, E_n(z) - D_n(z)\, E_{n+1}^*(z) \equiv (u_n - w_n)\, z^n (1 + z),$$

$$(5) \qquad D_{n+1}^*(z)\, E_n^*(z) - D_n^*(z)\, E_{n+1}^*(z) \equiv (u_n - w_n^*)\, z^n (1 - z),$$

et encore

$$(6) \qquad D_{n+2}(z)\, E_n(z) - D_n(z)\, E_{n+2}(z) \equiv (u_n - w_n)\, z^n (1 - z^2),$$

$$(7) \qquad D_{n+2}^*(z)\, E_n^*(z) - D_n^*(z)\, E_{n+2}^*(z) \equiv (u_n - w_n^*)\, z^n (1 - z^2).$$

Toutes ces identités ne sont d'ailleurs pas indépendantes et certaines peuvent se déduire des autres par un simple calcul algébrique. Ces identités en entraî-

nent encore d'autres qui peuvent être utiles. Par exemple, de (1), (2) et (3) d'une part, de (1), (4) et (5) d'autre part, on tire la proposition suivante :

LEMME 4. — *Dans le cas* A *pour* $n \geqq 1$ *si* $u_0 \neq 1$ *et seulement pour* $n \geqq 3$ *si* $u_0 = 1$, *dans le cas* B *pour* $1 \leqq n \leqq s$ *si* $u_0 \neq 1$ *et seulement pour* $3 \leqq n \leqq s$ *si* $u_0 = 1$, *on a*

$$D_{n+1}(z) \equiv \frac{w_n^* - u_n}{w_n^* - w_n}(1+z)\,D_n(z) + \frac{u_n - w_n}{w_n^* - w_n}(1-z)\,D_n^*(z),$$

$$E_{n+1}(z) \equiv \frac{w_n^* - u_n}{w_n^* - w_n}(1+z)\,E_n(z) + \frac{u_n - w_n}{w_n^* - w_n}(1-z)\,E_n^*(z),$$

$$D_{n+1}^*(z) \equiv \frac{w_n^* - u_n}{w_n^* - w_n}(1-z)\,D_n(z) + \frac{u_n - w_n}{w_n^* - w_n}(1+z)\,D_n^*(z),$$

$$E_{n+1}^*(z) \equiv \frac{w_n^* - u_n}{w_n^* - w_n}(1-z)\,E_n(z) + \frac{u_n - w_n}{w_n^* - w_n}(1+z)\,E_n^*(z).$$

De même, des relations (2) et (6) d'une part, (5) et (7) d'autre part, on tire la proposition suivante :

LEMME 5. — *Dans le cas* A *pour* $n \geqq 1$ *et dans le cas* B *pour* $1 \leqq n \leqq s-1$, *on a*

$$D_{n+2}(z) \equiv (1+z)\,D_{n+1}(z) - \frac{u_{n+1} - w_{n+1}}{u_n - w_n} z\,D_n(z),$$

$$E_{n+2}(z) \equiv (1+z)\,E_{n+1}(z) - \frac{u_{n+1} - w_{n+1}}{u_n - w_n} z\,E_n(z).$$

Dans le cas A *pour* $n \geqq 1$ *si* $u_0 \neq 1$ *et seulement pour* $n \geqq 3$ *si* $u_0 = 1$, *dans le cas* B *pour* $1 \leqq n \leqq s-1$ *si* $u_0 \neq 1$ *et seulement pour* $3 \leqq n \leqq s-1$ *si* $u_0 = 1$, *on a*

$$D_{n+2}^*(z) \equiv (1+z)\,D_{n+1}^*(z) - \frac{u_{n+1} - w_{n+1}^*}{u_n - w_n^*} z\,D_n^*(z),$$

$$E_{n+2}^*(z) \equiv (1+z)\,E_{n+1}^*(z) - \frac{u_{n+1} - w_{n+1}^*}{u_n - w_n^*} z\,E_n^*(z).$$

De l'identité (1) et du lemme 4 on tire encore

$$w_{n+1}^* - w_{n+1} = \frac{4(w_n^* - u_n)(u_n - w_n)}{w_n^* - w_n}, \tag{8}$$

d'où il résulte aussitôt que

$$w_{n+1}^* - w_{n+1} \leqq w_n^* - w_n;$$

autrement dit, la suite de terme général $w_n^* - w_n$ est monotone décroissante. Dans le cas A, on a affaire à une suite infinie dont le terme général est positif; elle tend donc vers une limite positive ou nulle; de plus, en écrivant la relation (8) sous la forme

$$4\left(u_n - \frac{w_n + w_n^*}{2}\right)^2 = (w_n^* - w_n)\,[(w_n^* - w_n) - (w_{n+1}^* - w_{n+1})],$$

on voit immédiatement que la série $\sum \left(u_n - \frac{w_n + w_n^*}{2}\right)^2$ est convergente.

Les propriétés précédentes permettent aussi d'étudier les suites de termes généraux τ_n et τ_n^*. En effet, si nous faisons $z=\tau_n$ dans la première identité du lemme 4, il vient

$$D_{n+1}(\tau_n)=\frac{u_n-w_n}{w_n^*-w_n}(1-\tau_n)D_n^*(\tau_n),$$

quantité qui est positive puisque $\tau_n<\tau_n^*$ et $D_n^*(+\infty)=+\infty$; donc $D_{n+1}(\tau_n)>0$, ce qui entraîne $\tau_n<\tau_{n+1}$ puisque $D_{n+1}(+\infty)=-\infty$. La suite des τ_n est croissante. On démontrerait d'une façon analogue que la suite des τ_n^* est décroissante. Dans le cas A, nous avons affaire à des suites infinies; et alors

$$\tau_n \to \tau \leqq \frac{1}{\alpha},$$

$$\tau_n^* \to \tau^* \geqq \frac{1}{\alpha}.$$

Nous allons établir que $\tau=\tau^*=\frac{1}{\alpha}$. En effet, posons

$$\varphi_n(z)\equiv\left[\frac{D_n(z)}{E_n(z)}-f(z)\right](z-\alpha)\left(z-\frac{1}{\tau_n}\right).$$

Les fonctions holomorphes $\frac{\varphi_n(z)}{z^n}$ sont uniformément bornées sur $|z|=1$, donc aussi dans le cercle unité. Il en résulte que $\varphi_n(\alpha)$ tend vers zéro. On en déduit, puisque $f(z)$ présente un pôle simple en $z=\alpha$, que $\frac{1}{\tau_n}\to\alpha$. On démontrerait de même la proposition suivante : dans le cas A, la fraction rationnelle $\frac{D_n(z)}{E_n(z)}$, qui a un pôle et un seul $z=\frac{1}{\tau_n}$ dans $|z|<1$, et qui vérifie $\left|\frac{D_n(z)}{E_n(z)}\right|=1$ sur $|z|=1$, tend uniformément vers $f(z)$ dans tout domaine fermé ne contenant pas $z=\alpha$ et intérieur au cercle unité.

Remarquons enfin que les identités établies ci-dessus entraînent des propriétés remarquables pour $D_n(z)$, $E_n(z)$, $D_n^*(z)$ et $E_n^*(z)$ sur $|z|=1$ car on a alors

$$E_n(z)=-z^n\overline{D_n(z)} \quad \text{et} \quad E_n^*(z)=z^n\overline{D_n^*(z)}.$$

L'identité (1), par exemple, donne

$$D_n^*(z)\overline{D_n(z)}+D_n(z)\overline{D_n^*(z)}=w_n-w_n^*.$$

Si β et β^* sont des nombres réels, on a donc sur $|z|=1$

$$|\beta D_n+\beta^* D_n^*|^2=\beta^2|D_n|^2+\beta^{*2}|D_n^*|^2+\beta\beta^*(w_n-w_n^*)$$

et de même

$$|\beta E_n+\beta^* E_n^*|^2=|\beta D_n-\beta^* D_n^*|^2=\beta^2|D_n|^2+\beta^{*2}|D_n^*|^2-\beta\beta^*(w_n-w_n^*),$$

d'où

$$|\beta E_n+\beta^* E_n^*|^2-|\beta D_n+\beta^* D_n^*|^2=2\beta\beta^*(w_n^*-w_n).$$

Il en résulte, en particulier, que les fractions rationnelles

$$\frac{\beta D_n(z)+\beta^* D_n^*(z)}{\beta E_n(z)+\beta^* E_n^*(z)},$$

dont le développement commence par $u_0+u_1 z+\ldots+u_{n-1}z^{n-1}$ ont, sur $|z|=1$, un module inférieur à 1 si β et β^* sont positifs.

Pour terminer, montrons que les inégalités données par les théorèmes 1 et 2 sont celles que nous avions obtenues dans la section 2.

Plaçons-nous d'abord dans le cas $u_0>1$. On vérifie immédiatement que

$$\frac{1}{f_1(z)}=\frac{(E_1^*+E_1)f-(D_1^*+D_1)}{(E_1^*-E_1)f-(D_1^*-D_1)}.$$

Nous allons établir que, pour $n\geq 2$, on a

$$f_n(z)\equiv\frac{(E_n^*+E_n)f-(D_n^*+D_n)}{(E_n^*-E_n)f-(D_n^*-D_n)}. \tag{9}$$

La démonstration se fait par récurrence en utilisant la relation

$$f_{n+1}(z)\equiv\frac{1}{z}\,\frac{f_n(z)-f_n(0)}{1-f_n(z)f_n(0)} \tag{10}$$

et en remarquant que cette relation demeure vraie si l'on change $f_n(z)$ en $\frac{1}{f_n(z)}$ et $f_n(0)$ en $\frac{1}{f_n(0)}$, de sorte que l'on passe de $\frac{1}{f_1(z)}$ à $f_2(z)$ comme l'on passe de $f_n(z)$ à $f_{n+1}(z)$. Il suffit donc de faire le calcul pour le passage de n à $n+1$. Dans la formule (9) calculons $f_n(0)$; à cet effet, nous utiliserons les développements

$$E_n(z)f(z)-D_n(z)=(u_n-w_n)z^n+\ldots,$$
$$E_n^*(z)f(z)-D_n^*(z)=(u_n-w_n^*)z^n+\ldots;$$

il vient immédiatement $f_n(0)=\frac{2u_n-w_n-w_n^*}{w_n-w_n^*}$. En utilisant la formule (10) on en déduit alors, grâce au lemme 4,

$$f_{n+1}(z)\equiv\frac{(E_{n+1}^*+E_{n+1})f-(D_{n+1}^*+D_{n+1})}{(E_{n+1}^*-E_{n+1})f-(D_{n+1}^*-D_{n+1})},$$

ce qui achève la démonstration.

Recherchons ce que devient cette propriété dans le cas $u_0=1$. On vérifie immédiatement que

$$g_2(z)\equiv\frac{\left(\frac{u_1}{2}z-E_2\right)f-\left(\frac{u_1}{2}z-D_2\right)}{\left(\frac{u_1}{2}z+E_2\right)f-\left(\frac{u_1}{2}z+D_2\right)}.$$

On en tire

$$g_2(0)=\frac{\frac{u_1^2}{2}-(u_2-w_2)}{\frac{u_1^2}{2}+(u_2-w_2)}.$$

Puis on calcule

$$g_3(z) \equiv \frac{1}{z}\,\frac{g_2(z)-g_2(0)}{1-g_2(z)g_2(0)}.$$

Grâce aux relations

$$D_3(z) \equiv (1+z)\,D_2(z) - \frac{u_2-w_2}{u_1}z(1-z),$$

$$E_3(z) \equiv (1+z)\,E_2(z) - \frac{u_2-w_2}{u_1}z(1-z),$$

tirées du lemme 5, et aux relations

$$D_3^*(z) \equiv (1-z)\,D_2(z) - \frac{u_2-w_2}{u_1}z(1+z),$$

$$E_3^*(z) \equiv (1-z)\,E_2(z) - \frac{u_2-w_2}{u_1}z(1+z),$$

qu'on déduit facilement de (4) et (7), ce calcul conduit à

$$g_3(z) \equiv \frac{(E_3^*+E_3)f-(D_3^*+D_3)}{(E_3^*-E_3)f-(D_3^*-D_3)}.$$

On en déduit comme ci-dessus que, pour $n \geqq 3$,

(9 *bis*) $$g_n(z) \equiv \frac{(E_n^*+E_n)f-(D_n^*+D_n)}{(E_n^*-E_n)f-(D_n^*-D_n)}.$$

Résumons ces résultats :

Lemme 6. — *Dans le cas* A *pour* $n \geqq 2$ *si* $u_0 \neq 1$ *et seulement pour* $n \geqq 3$ *si* $u_0 = 1$, *dans le cas* B *pour* $2 \leqq n \leqq s+1$ *si* $u_0 \neq 1$ *et seulement pour* $3 \leqq n \leqq s+1$ *si* $u_0 = 1$, *on a*

$$f_n(z) \quad \text{ou} \quad g_n(z) \equiv \frac{[E_n^*(z)+E_n(z)]f(z)-[D_n^*(z)+D_n(z)]}{[E_n^*(z)-E_n(z)]f(z)-[D_n^*(z)-D_n(z)]}.$$

Si $u_0 \neq 1$, *on a de plus*

$$\frac{1}{f_1(z)} \equiv \frac{[E_1^*(z)+E_1(z)]f(z)-[D_1^*(z)+D_1(z)]}{[E_1^*(z)-E_1(z)]f(z)-[D_1^*(z)-D_1(z)]},$$

tandis que si $u_0 = 1$, *on a*

$$g_2(z) \equiv \frac{\left[\frac{u_1}{2}z-E_2(z)\right]f(z)-\left[\frac{u_1}{2}z-D_2(z)\right]}{\left[\frac{u_1}{2}z+E_2(z)\right]f(z)-\left[\frac{u_1}{2}z+D_2(z)\right]}.$$

L'étude de la section 2 nous a conduit aux propriétés suivantes :

Dans le cas A *pour* $n \geqq 3$, *dans le cas* B *pour* $3 \leqq n \leqq s+1$, *on a*

$$|f_n(z)| \leqq 1 \quad \textit{ou} \quad |g_n(z)| \leqq 1 \quad \textit{quand} \quad |z| \leqq 1.$$

Ces résultats subsistent pour $n = 1, 2$ *si* $u_0 \neq 1$. *Si* $u_0 = 1$, *on a*

$$|g_2(z)| \leq 1 \qquad \textit{quand} \qquad |z| \leq 1.$$

En appliquant ces inégalités au point $z = 0$, on retrouve le théorème 1; en les appliquant au point $z = \alpha$, on retrouve le théorème 2.

4. — Application à l'étude des petits éléments de l'ensemble S.

Nous allons appliquer les résultats précédents aux fonctions $f(z)$ que sont les fractions rationnelles $\frac{P(z)}{Q(z)}$ associées aux nombres θ de l'ensemble S. Nous sommes dans le cas B; nous avons

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = u_0 + u_1 z + \ldots + u_n z^n + \ldots,$$

où $u_0, u_1, \ldots$ sont des entiers et où le pôle intérieur au cercle est $\alpha = \frac{1}{\theta}$.

On a $D_1(z) \equiv u_0 - z$, donc $\tau_1 = u_0$; il résulte du théorème 2 que $u_0 \leq \theta$. *Pour les nombres* θ *inférieurs à* 2, auxquels nous nous limiterons, on a donc [11] $u_0 = 1$.

Dans ces conditions, nous avons déjà vu que $D_2(z) \equiv 1 + \frac{u_1}{2} z - z^2$ et $w_2 = \frac{u_1^2}{2}$. D'après le théorème 2, nous devons avoir $\tau_2 < 2$; il en résulte que $D_2(2) < 0$, soit $u_1 < 3$; les seuls cas possibles sont donc $u_1 = 1$ et $u_1 = 2$.

D'après le lemme 5, on a alors

$$D_3(z) \equiv (1+z)\left(1 + \frac{u_1}{2} z - z^2\right) - z \frac{u_2 - \frac{u_1^2}{2}}{u_1} (1 - z).$$

Si $u_1 = 2$, ce qui exige $u_2 \geq w_2 = 2$ en vertu du théorème 1, on a

$$D_3(z) \equiv (1+z)(1+z-z^2) - z \frac{u_2 - 2}{2} (1 - z);$$

ce polynome présente un zéro et un seul τ_3 dans l'intervalle $1 < z < +\infty$, et pour $u_2 \geq 3$ ce zéro est au moins égal à celui de $2 + 3z + z^2 - 2z^3$ qui est supérieur à $\hat{\theta}_3$. *Pour les nombres* θ *inférieurs à* $\hat{\theta}_3$, auxquels nous nous limiterons dorénavant, on a donc $u_2 = w_2 = 2$, ce qui ne peut correspondre qu'à $P(z) \equiv D_2(z) \equiv 1 + z - z^2$ c'est-à-dire à $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \theta_2$.

Nous n'avons donc plus à considérer que le cas $u_1 = 1$, qui exige $u_2 \geq w_2 = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $u_2 \geq 1$; on a alors

$$D_3(z) \equiv (1+z)\left(1 + \frac{1}{2} z - z^2\right) - z\left(u_2 - \frac{1}{2}\right)(1 - z).$$

---

[11] On peut remarquer ici que la relation $u_0 = 1$ caractérise ceux des nombres de S qui sont des unités.

Pour $u_2 = 3$, ce polynome n'est autre que $\hat{P}_2(z)$; pour $u_2 \geq 3$, il présente le zéro $\tau_3 \geq \hat{\theta}_2 > \hat{\theta}_3$. En vertu du théorème 2, nous avons donc $u_2 = 1$ ou $u_2 = 2$.

Le cas $u_2 = 1$ a déjà été étudié (*cf.* p. 75). Il correspond à

$$P(z) \equiv 1 - z^2 + z^n(1 + z - z^2) \quad \text{avec} \quad n \geq 1, \quad \text{soit} \quad \theta = \theta'_n,$$

ou

$$P(z) \equiv 1 - z^2 - z^n(1 + z - z^2) \quad \text{avec} \quad n \geq 1, \quad \text{soit} \quad \theta = \hat{\theta}'_n.$$

Ces nombres θ étant écartés, nous avons donc

$$u_0 = u_1 = 1, \qquad u_2 = 2.$$

Pour poursuivre la discussion, nous utiliserons systématiquement les propriétés suivantes qui découlent immédiatement de l'étude faite plus haut.

Première propriété : Lorsque $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, sont connus et que $s \geq n$, on forme le polynome $D_n(z)$; On en déduit la valeur de w_n. On doit avoir $u_n \geq w_n$, l'égalité entraînant $\theta = \tau_n$.

Deuxième propriété : On forme ensuite

$$D_{n+1}(z) \equiv (1 + z) D_n(z) - z \frac{u_n - w_n}{u_{n-1} - w_{n-1}} D_{n-1}(z).$$

On doit avoir $D_{n+1}(1) \geq 0$, qui est équivalente à $u_n \leq w'_n$ (*voir* lemme 4), l'égalité entraînant $\theta = \tau'_n$ et $D_{n+1}(z) \equiv (1 - z) D'_n(z)$. Si les deux inégalités strictes $u_n > w_n$ et $D_{n+1}(1) > 0$ sont satisfaites, on a $s \geq n + 1$.

Nous utiliserons les polynomes $P_n(z)$ et $\hat{P}_n(z)$, dont l'expression a déjà été donnée dans l'introduction.

Considérons le développement en série entière [12]

$$\frac{1}{1 - z - z^2} = 1 + z + 2z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots.$$

Soit N l'entier tel que

$$u_n = c_n \quad \text{pour} \quad n < N,$$
$$u_N \neq c_N.$$

D'après ce que nous venons de voir, $N \geq 3$. D'autre part $s \geq N$, comme le montre le lemme préliminaire appliqué à

$$Q(z) \frac{1}{1 - z - z^2} - P(z) = (c_N - u_N) z^N + \ldots.$$

Nous devons maintenant distinguer deux cas :

---

[12] On peut remarquer que la fraction rationnelle $\frac{1}{1 - z - z^2}$ est, dans $|z| < 1$, la limite commune de $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ et $\frac{\hat{P}_n(z)}{\hat{Q}_n(z)}$.

Premier cas : N est pair, soit $N = 2p$ avec $p \geq 2$.
On vérifie facilement ([13]) que

$$D_{2p}(z) \equiv \frac{P_{2p-1}(z) + \frac{p+2}{p+1} z P_{2p-1}(z)}{1+z}, \qquad \text{d'où} \quad w_{2p} = c_{2p} - \frac{p+2}{p+1};$$

il en résulte (première propriété) que $u_{2p} \geq c_{2p} - \frac{p+2}{p+1}$, soit $u_{2p} \geq c_{2p} - 1$. On a ensuite

$$D_{2p-1}(z) \equiv P_{2p-1}(z) - (u_{2p} - c_{2p}) z P_{2p-1}(z);$$

en utilisant la deuxième propriété, il vient $u_{2p} \leq c_{2p} + \frac{p}{p-1}$, soit $u_{2p} \leq c_{2p} + 1$ sauf dans le cas $p = 2$ où $u_{2p} = c_{2p} + 2$ est possible; mais alors $\theta = \tau_1^*$ et $D_1^*(2) = -D_3(2) = -1 < 0$, d'où $\theta = \tau_1^* > 2$, cas écarté dans notre étude.

Il ne reste donc à examiner que $u_{2p} = c_{2p} \pm 1$, avec $s \geq 2p+1$.

Si $u_{2p} = c_{2p} + 1$, on a $D_{2p+1}(z) \equiv \hat{P}_{2p}(z)$, d'où $w_{2p+1} = c_{2p+1} + 2$; il en résulte (première propriété) que $u_{2p+1} \geq c_{2p+1} + 2$. On a ensuite

$$D_{2p+2}(z) \equiv (1-z) D_{2p+1}(z) - \frac{p+1}{2p+3} (u_{2p+1} - c_{2p+1} - 2) z D_{2p}(z);$$

en utilisant la deuxième propriété, il vient

$$u_{2p+1} \leq c_{2p+1} + 2 + \frac{4p+6}{p^2+p-1}.$$

Les deux inégalités bornant les valeurs possibles de u_{2p+1} montrent que pour $p \geq 5$ on a forcément $u_{2p+1} = c_{2p+1} + 2 = w_{2p+1}$, donc $\theta = \hat{\theta}_{2p}$. Pour $p \leq 4$, on peut avoir $u_{2p+1} > c_{2p+1} + 2$, mais alors

$$D_{2p+2}(\hat{\theta}_{2p}) = -\frac{p+1}{2p+3} (u_{2p+1} - c_{2p+1} - 2) \hat{\theta}_{2p} D_{2p}(\hat{\theta}_{2p}) > 0,$$

d'où $\theta > \tau_{2p+2} > \hat{\theta}_{2p} \geq \hat{\theta}_8$, cas que nous écarterons en nous limitant dorénavant à l'étude des *nombres* θ *inférieurs à* $\hat{\theta}_8$.

Si $u_{2p} = c_{2p} - 1$, on a $D_{2p+1}(z) \equiv P_{2p}(z)$, d'où $w_{2p+1} = c_{2p+1} - 2$; il en résulte (première propriété) que $u_{2p+1} \geq c_{2p+1} - 2$. On a ensuite

$$D_{2p+2}(z) \equiv (1+z) D_{2p+1}(z) - (p+1)(u_{2p+1} - c_{2p+1} + 2) z D_{2p}(z);$$

en utilisant la deuxième propriété, il vient

$$u_{2p+1} \leq c_{2p+1} - 2 + \frac{4p-2}{p^2+p-1}.$$

Les deux inégalités bornant les deux valeurs possibles de u_{2p+1} montrent

([13]) On pourrait déduire l'expression de $D_{2p}(z)$ des considérations développées plus haut.

que, ou bien $u_{2p+1} = v_{2p+1} - 2 = w_{2p+1}$, ce qui entraîne $\theta = \theta_{2p}$, ou bien $u_{2p+1} = v_{2p+1} - 1$ avec $p = 2$. L'étude de ce dernier cas où $s \geq 2p+2 = 6$ se poursuit de la même façon : on trouve $D_6(z) \equiv 1 - z + z^2 - z^4 + 2z^5 - z^6$, puis $w_6 = 11$, d'où (d'après la première propriété) $u_6 \geq 11$; on a ensuite $D_7(z) \equiv (1+z) D_6(z) - (u_6 - 11) z D_5(z)$ et (d'après la deuxième propriété) $u_6 \leq 11 + \frac{2}{3}$; on en conclut que $u_6 = 11 = w_6$, d'où $\theta = \tau_6$, racine de $1 - z + z^2 - z^4 + 2z^5 - z^6 = 0$; c'est le nombre que nous avons représenté par θ'' dans l'introduction.

Deuxième cas : N est impair, soit $N = 2p+1$ avec $p \geq 1$. On vérifie facilement que

$$D_{2p+1}(z) \equiv P_{2p+1}(z), \qquad \text{d'où} \quad w_{2p+1} = v_{2p+1} - 1;$$

il en résulte (première propriété) que $u_{2p+1} \geq v_{2p+1} - 1$. On a ensuite

$$D_{2p+2}(z) \equiv (1+z) D_{2p+1}(z) - \frac{p+1}{p+2} (u_{2p+1} - v_{2p+1} + 1) z D_{2p}(z),$$

où $D_{2p}(z)$ est le même polynome que celui qui a été employé au début de l'étude du premier cas; en utilisant la deuxième propriété, il vient

$$u_{2p+1} \leq v_{2p+1} + 1 + \frac{2p+2}{p^2+p-1}.$$

Les deux inégalités bornant les valeurs possibles de u_{2p+1} montrent que l'on doit examiner successivement :

a. $u_{2p+1} = v_{2p+1} - 1 = w_{2p+1}$; mais alors $\theta = \theta_{2p+1}$.

b. $u_{2p+1} \geq v_{2p+1} + 2$ avec $p \leq 2$; mais alors

$$D_{2p+2}(\hat{\theta}_{2p+1}) \geq (1 + \hat{\theta}_{2p+1}) D_{2p+1}(\hat{\theta}_{2p+1}) - 3\frac{p+1}{p+2} \hat{\theta}_{2p+1} D_{2p}(\hat{\theta}_{2p+1})$$
$$= \frac{(1 + \hat{\theta}_{2p+1}^2) P_{2p+1}(\hat{\theta}_{2p+1}) - 3\hat{\theta}_{2p+1}^2 P_{2p-1}(\hat{\theta}_{2p+1})}{1 + \hat{\theta}_{2p+1}} > 0,$$

ce qui montre que $\theta > \tau_{2p+1} > \hat{\theta}_{2p+1} \geq \hat{\theta}_3$, cas qui doit être écarté parce que nous nous limitons à $\theta < \hat{\theta}_3$.

c. $u_{2p+1} = v_{2p+1} + 1$; l'étude de ce cas, où $s \geq 2p+2$, se poursuit toujours de la même façon : le polynome $D_{2p+2}(z)$ qui a déjà été formé, se met ici sous la forme plus simple

$$D_{2p+2}(z) \equiv \frac{\hat{P}_{2p+1}(z) + \frac{2z}{p+2} P_{2p+1}(z)}{1+z} \qquad \text{d'où} \quad w'_{2p+2} = v_{2p+2} + 2 - \frac{4}{p+2};$$

il en résulte (première propriété) que $u_{2p+2} \geqq v_{2p+2} + 2 - \frac{4}{p+2}$; on a ensuite

$$D_{2p+3}(z) \equiv \hat{P}_{2p+1}(z) - \frac{u_{2p+2} - v_{2p+2} - 2}{2} z P_{2p+1}(z);$$

en utilisant la deuxième propriété, il vient $u_{2p+2} \leqq v_{2p+2} + 2 + \frac{4}{p}$. Les deux inégalités bornant les valeurs possibles de u_{2p+2} montrent que l'on doit examiner successivement :

α. $u_{2p+2} = v_{2p+2} + 1$ avec $p = 1$ ou $p = 2$; mais si $p = 2$, on a $u_{2p+2} = v_{2p+2}$, donc $0 = \tau_{2p+2} = \tau_6$, cas à rejeter car $D_6(z)$ n'est pas à coefficients entiers; tandis que si $p = 1$, on a $0 > \tau_5$, supérieur à $\hat{\theta}_6 > \hat{\theta}_8$, comme on peut le vérifier par le calcul.

β. $u_{2p+2} \geqq v_{2p+2} + 3$ avec $p \leqq 4$; mais alors $D_{2p+3}(\hat{\theta}_{2p+1}) > 0$, donc

$$0 \geqq \tau_{2p+3} > \hat{\theta}_{2p+1} \geqq \hat{\theta}_9;$$

nous écarterons ce cas en limitant notre étude *aux nombres* θ *inférieurs à* $\hat{\theta}_9$.

γ. $u_{2p+2} = v_{2p+2} + 2$; mais alors $s \geqq 2p+3$ et nous poursuivons l'étude suivant la même méthode; nous avons

$$D_{2p+3}(z) \equiv \hat{P}_{2p+1}(z), \qquad \text{d'où} \quad w_{2p+3} = v_{2p+3} + 3;$$

il en résulte (première propriété) que $u_{2p+3} \geqq v_{2p+3} + 3$; on a ensuite

$$D_{2p+4}(z) \equiv (1+z) D_{2p+2}(z) - \frac{p+2}{4} (u_{2p+3} - v_{2p+3} - 3) z D_{2p+2}(z);$$

en utilisant la deuxième propriété, il vient $u_{2p+3} \leqq v_{2p+3} + 3 + \frac{8}{p+1}$. Les deux inégalités bornant les valeurs de u_{2p+3} montrent que l'on a, ou bien $u_{2p+3} = v_{2p+3} + 3$, ce qui entraîne $\theta = \tau_{2p+3} = \hat{\theta}_{2p+1}$, ou bien $u_{2p+3} \geqq v_{2p+3} + 4$ avec $p \leqq 7$, mais dans ce dernier cas on a

$$D_{2p+4}(\hat{\theta}_{2p+1}) \geqq -\frac{p+2}{4} \hat{\theta}_{2p+1} D_{2p+2}(\hat{\theta}_{2p+1}) > 0,$$

ce qui entraîne $0 > \tau_{2p+4} > \hat{\theta}_{2p+4} \geqq \hat{\theta}_{13}$ et nous écarterons ce cas en nous limitant aux *nombres* θ *inférieurs à* $\hat{\theta}_{13}$.

Si l'on compare entre eux les nombres θ_n, θ'_n, $\hat{\theta}_n$, $\hat{\theta}'_n$, ce qui ne présente aucune difficulté, on peut résumer les résultats de l'étude précédente sous la forme que voici :

THÉORÈME. — *Les nombres* θ *de l'ensemble* S *qui sont inférieurs à* $\hat{\theta}_{13}$ *sont les*

suivants :

$$\theta_2 = \theta'_1 < \theta'_2 < \theta'_3 < \theta_3 < \theta'_4 < \theta_4 < \theta'_5 < \theta'' < \theta_5 < \theta'_6 < \dots$$

$$< \theta'_n < \theta_n < \theta'_{n+1} < \dots < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < \dots < \hat{\theta}_n < \hat{\theta}'_{n-1} < \hat{\theta}_{n-1} < \dots < \hat{\theta}_{15}.$$

On retrouve, en particulier, le fait que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le plus petit élément de l'ensemble dérivé S′ de S. On voit de plus que c'est un élément isolé de S′.

LA QUASI-ANALYTICITÉ GÉNÉRALISÉE SUR UN INTERVALLE BORNÉ

PAR M. PAUL MALLIAVIN.

Une fonction indéfiniment dérivable, appartenant sur le segment (o, R) à une classe quasi analytique et dont *toutes* les dérivées sont nulles en o est identiquement nulle. Ce théorème classique de Denjoy-Carleman a été généralisé par M. S. Mandelbrojt [4] dans le cas où $R = +\infty$; la même conclusion vaut alors en supposant seulement qu'il existe une suite « suffisamment dense » de dérivées nulles en o.

Dans le cas où $R < +\infty$, il n'est plus possible d'obtenir la conclusion du théorème de Denjoy-Carleman lorsque l'on affaiblit les conditions aux limites. Notre but sera de montrer que des hypothèses de quasi-analyticité généralisée entraînent dans ce cas seulement l'analyticité au voisinage de o. Notre résultat pourra être considéré comme une extension aux classes quasi analytiques du théorème d'Hadamard-Fabry sur le prolongement analytique des séries de Taylor lacunaires ainsi que d'un résultat de Carleman ([2], p. 75).

Nous établirons en premier lieu une inégalité majorant les coefficients de certains développements en série de Taylor asymptotique.

Cette inégalité sera obtenue par la méthode des séries adhérentes introduite par M. S. Mandelbrojt pour démontrer son inégalité fondamentale [4], méthode qui consistera dans le cas qui nous occupe à construire certains opérateurs différentiels commutables avec le groupe des homothéties.

Cette inégalité donnera le résultat de quasi-analyticité sur le segment (o, 1) cherché.

On établira pour terminer un résultat réciproque permettant de discuter la condition obtenue (1).

(1) Les résultats de ce travail ont été annoncés dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 240, 1955, p. 41.

1. Une inégalité pour certains développements asymptotiques. — Rappelons au préalable les définitions et notations suivantes.

Étant donné une suite de nombres $M_n (M_n > 0)$, nous lui associerons ses *fonctions de traces* définies par

$$\log T(r) = \overline{\underset{n}{\text{borne}}}(n \log r - \log M_n) \qquad (r > 0),$$

$$\log S_\alpha(r) = \overline{\underset{n < \alpha r}{\text{borne}}}(n \log r - \log M_n) \qquad (r > 0),$$

α désignant une constante positive.

On a, pour r assez grand, si $\lim \frac{M_n^{\frac{1}{n}}}{n} = +\infty$,

$$T(r) = S_\alpha(r).$$

Étant donné une suite Λ d'entiers positifs, nous lui associerons sa *fonction de répartition* $N(t)$ égale au nombre d'éléments de la suite Λ inférieurs à t. Nous appellerons *fonction de répartition approximative* une fonction $N_\alpha(t)$ telle que

$$\int_0^{+\infty} |N(t) - N_\alpha(t)| \frac{dt}{t^2} < +\infty. \tag{1}$$

Étant donné une fonction de répartition approximative $N_\alpha(t)$, nous considérerons sa *régularisée concave* $N_\alpha^*(t)$, c'est-à-dire la plus petite fonction concave vérifiant $N_\alpha^*(t) \geq N_\alpha(t)$.

Si l'on pose

$$q(\varepsilon) = \overline{\underset{t>0}{\text{borne}}}(N_\alpha(t) - \varepsilon t) \qquad (\varepsilon > 0),$$

on aura également

$$q(\varepsilon) = \overline{\underset{t>0}{\text{borne}}}(N_\alpha^*(t) - \varepsilon t)$$

et, quel que soit $t > 0$, on pourra trouver ε_t tel que

$$q(\varepsilon_t) = N_\alpha^*(t) - \varepsilon_t t. \tag{2}$$

Ceci étant, on peut montrer la formule de réciprocité suivante (Mandelbrojt [4], p. 6)

$$N_\alpha^*(t) = \underset{\varepsilon>0}{\text{borne}}[q(\varepsilon) + \varepsilon t]. \tag{3}$$

En effet, en tenant compte de (2), on a

$$\underset{\varepsilon>0}{\text{borne}}(q(\varepsilon) + \varepsilon t) = \underset{t'>0}{\text{borne}}(N_\alpha^*(t') - \varepsilon_{t'} t' + \varepsilon_{t'} t),$$

borne qui est atteinte pour $t = t'$, ce qui établit (3). On dira que la *densité* $D_{M_n}(\Lambda)$ de la *suite* Λ par *rapport* à $\{M_n\}$, est inférieure à ρ, s'il existe une fonction de répartition approximative $N_\rho^*(t)$ de Λ telle que

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \pi \frac{N_\rho^*(r)}{\log T(r)} < \rho.$$

Il résulte de cette définition que la densité de la suite Λ reste inchangée lorsque l'on ajoute à Λ une suite Λ' telle que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda'} \frac{1}{\lambda} < +\infty.$$

En particulier, si la suite Λ vérifie l'inégalité précédente, $D_{M_n}(\Lambda) = 0$ quelle que soit la suite $\{M_n\}$ $(M_n < +\infty)$.

2. Énonçons maintenant l'inégalité à la démonstration de laquelle la plus grande partie de ce travail sera consacrée.

THÉORÈME I. — *Soit $f(t)$ une fonction indéfiniment différentiable définie sur le segment* $(0, R)$, *vérifiant l'inégalité* $|f^{(n)}(t)| < M_n$,

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \text{si} \quad n \notin \Lambda, \tag{4}$$

Λ désignant une suite d'entiers positifs, $N(t)$ sa fonction de répartition.

Supposons que l'on ait

$$\int^{+\infty} \log T(r) \frac{dr}{r^2} = +\infty, \qquad \lim \frac{N(t)}{t} = 0, \tag{5}$$

$$d = D_{M_n}(\Lambda) < +\infty. \tag{6}$$

Alors on a

$$\log \left| \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \right| < -p \log x R + h_x(R) + o_x(p) \qquad \left(0 < x < \frac{4}{4 + R^2 d^2}\right), \tag{7}$$

où $h_x(R)$ est une fonction de R déterminée dès que l'on connaît M_n, Λ, et x, où $o_x(p)$ est une fonction de p vérifiant $\lim_{p=+\infty} \frac{o_x(p)}{p} = 0$, déterminée indépendamment de R dès que l'on connaît M_n, Λ, x.

Démonstration. — Nous allons, en utilisant la transformation de Mellin-Polya appliquée à certaines fonctions holomorphes dans le demi-plan, construire des opérateurs intégrodifférentiels de projection.

Effectuons d'abord la construction des fonctions holomorphes dans le demi-plan qui seront ensuite transformées par la transformation Mellin-Polya.

3. Lemme. — *Soit Λ une suite d'entiers positifs telle que*

$$\lim \frac{N(t)}{t} = 0.$$

Alors, pour toute fonction de répartition approximative $N_\alpha(t)$ de la suite Λ, il existe une fonction $B_\alpha(z)$, holomorphe dans le demi-plan $x > 0$, telle que

$$B_\alpha(n) = 0 \qquad (n \in \Lambda), \tag{8}$$

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \in \Omega_\Lambda}} \frac{\log B_\alpha(x)}{x} = 0 \tag{9}$$

[Ω_Λ désignant le complémentaire de la réunion des cercles de centre n ($n \in \Lambda$) et de rayon $\frac{1}{4}$];

$$\log|B_\alpha(iy)| = \pi N_\alpha(|y|) \quad \textit{presque partout} \qquad (-\infty < y < +\infty), \tag{10}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log B_\alpha(n)}{n} = 0 \qquad (n \in \Lambda). \tag{11}$$

Démonstration. — Soit $F_\alpha(z)$, ($z = x + iy$) la fonction, holomorphe dans le demi-plan, définie par la relation

$$\log|F_\alpha(z)| = x \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2 + (y-t)^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) N(|t|)\, dt + x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_\alpha(|t|) - N(|t|)}{x^2 + (y-t)^2}\, dt,$$

on a alors, presque partout sur l'axe imaginaire,

$$\lim_{x \to 0} \log|F_\alpha(x+iy)| = \pi N_\alpha(|y|).$$

D'autre part, lorsque x tend vers l'infini, on a

$$\log|F_\alpha(x)| = -x \int_{-x}^{+x} \frac{N(|t|)}{1+t^2}\, dt + I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

où en tenant compte de (1) et de $\lim \frac{N(t)}{t} = 0$,

$$I_1 = x \int_{-\infty}^{-x} \frac{N_\alpha(|t|) - N(|t|)}{x^2 + (y-t)^2}\, dt = o(x),$$

$$I_2 = x \int_{-x}^{+x} \frac{N(|t|)}{x^2 + t^2}\, dt = o\left(x \int_{-x}^{+x} \frac{|t|}{x^2+t^2}\, dt \right) = o(x),$$

$$I_3 = x \int_{x}^{+\infty} \frac{x^2 N(t)}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\, dt = o(x),$$

de même, $I_4 = o(x)$, d'où

$$\log|F_2(x)| = -2x\int_0^x \frac{N(t)}{1+t^2}\,dt + o(x). \tag{12}$$

Posons maintenant

$$G_\Lambda(z) = \prod_{\lambda\in\Lambda} \frac{\lambda - z}{\lambda + z}\, e^{\frac{2z}{\lambda}},$$

suivant [4] (p. 127), nous allons montrer moyennant $\lim \frac{N(t)}{t} = 0$, que

$$\log|G(z)| = 2x\int_0^r \frac{N(t)}{t^2}\,dt + o(x) \qquad (z\in\Omega_\Lambda). \tag{13}$$

On a en effet

$$\log|G(z)| = S_1 + S_2 + S_3, \qquad \text{où} \quad |z| = r$$

$$S_1 = \sum_{\Lambda<2r} \frac{2x}{\lambda} = 2x\int_0^r \frac{N(t)}{t^2}\,dt + 2x\int_r^{2r} \frac{N(t)}{t^2}\,dt = 2x\int_0^r \frac{N(t)}{t^2}\,dt + o(x).$$

$$S_2 = \sum_{\Lambda>2r} \log\left|\frac{\lambda - z}{\lambda + z}\right| e^{\frac{2r}{\lambda}} = O\left(\sum_{\Lambda>2r} \frac{xr}{\lambda^2}\right) = O\left(xr\int_{2r}^{+\infty} \frac{dN(t)}{t^2}\right) = o(x).$$

$$S_3 = \sum_{\Lambda<2r} \log\left|\frac{\lambda - z}{\lambda + z}\right| < 0.$$

Pour démontrer l'égalité (13), il suffit d'établir sur Ω_Λ une minoration de S_3 de la forme $S_3 > o(x)$. Nous distinguerons deux cas : si d'abord $r > 10x$, l'inégalité $\left|\frac{\lambda - z}{\lambda + z}\right|^2 > 1 - \frac{8x}{r}$ entraîne

$$S_3 > \sum_{\Lambda<2r} \log\left(1 - 8\frac{x}{r}\right) > N(2r)\log\left(1 - \frac{8x}{r}\right) > -O\left(\frac{N(2r)}{r}\,8x\right) = o(x).$$

Si enfin $r < 10x$, on a

$$|z + \lambda| < 4r, \qquad \sum_{\Lambda<2r} \log|z - \lambda| > 2\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}N(2r)} \log p = N(2r)\log\frac{N(2r)}{4e},$$

$$S_3 = \sum_{\Lambda<2r} \log|\lambda - z| - \sum_{\Lambda<2r} \log|\lambda + z| > N(2r)\log\frac{N(2r)}{4e} - N(2r)\log 4r,$$

$$S_3 > -10x\,\frac{N(2r)}{r}\log\frac{N(2r)}{16er} = o(x),$$

ce qui établit l'égalité (13).

Nous poserons

$$B_x(z) = F_x(z) G_\Lambda(z)\, e^{-\delta z}, \qquad \text{où} \quad \delta = \int_0^{+\infty} \frac{2N(t)}{t^2(1+t^2)}\, dt.$$

En tenant compte de (12) et (13), on a $x \in \Omega_\Lambda$:

$$\log|B_x(x)| = o(x) + 2x\int_0^{x}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)N(t)\,dt - 2x\int_0^{+\infty} N(t)\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$= o(x) - 2x\int_x^{+\infty} \frac{N(t)}{t^2(1+t^2)}\, dt = o(x).$$

(9) est ainsi satisfait; (8) et (10) se vérifient immédiatement.

Enfin, si $p \in \Lambda$, nous considérerons la suite Λ_p obtenue en retirant de la suite Λ l'élément p. Alors, (13) sera valable uniformément pour les fonctions $G_{\Lambda_p}(z)$ associées aux suites Λ_p et ainsi

$$\log|G_{\Lambda_p}(p)| = 2p\int_0^{p} \frac{N(t)}{t^2}\, dt + o(p).$$

et, comme

$$B'_x(p) = F_x(p) G_{\Lambda_p}(p)\, \frac{e^{-\delta p + 2}}{2p},$$

(11) se trouve ainsi établi. C. Q. F. D.

Le lemme suivant va permettre de construire, à partir de la fonction $B_x(z)$, les opérateurs de projection désirés.

4. Lemme. — *Soit* Λ, *une suite d'entiers vérifiant* $\lim \frac{N(t)}{t} = 0$, $N_x(t)$ *une fonction de répartition approximative de la suite* Λ, *alors il existe une suite d'opérateurs linéaires* $\{\beta_{x,p}\}_{p\in\Lambda}$ *définis sur l'espace vectoriel des polynomes à coefficients complexes vérifiant*

$$\beta_{x,p}\, t^n = 0 \qquad (n \in \Lambda,\ n \neq p), \tag{14}$$

$$\beta_{x,p}\, t^p = \frac{t^p}{p+2} B'_x(p+1), \tag{15}$$

$$\text{degré } (\beta_{x,p} P) \leq \text{degré } P(t). \tag{16}$$

Si l'on pose $\|P(t)\|_R = \max_{0\leq t\leq R} |P(t)|$ *pour tout* $x < 1$, *on peut trouver une fonction* $\Delta_x(n)$ *telle que*

$$\log \|\beta_{x,p} P\|_{xR} < \log \|P\|_R + \Delta_x(n) \qquad [n = \text{degré de } P(t)], \tag{17}$$

$\Delta_x(n)$ *étant indépendant de* p *et vérifiant*

$$\overline{\lim_n} \frac{\Delta_x(n)}{\pi N_x^*\left(n\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)} \leq 1. \tag{18}$$

Démonstration. — Si $P(t)=\sum_{n}^{n} a_r t^r$, on posera $p \in \Lambda$:

$$\beta_{\alpha,p} P = \sum_{n}^{n} a_r \frac{B_\alpha(r+1)}{(r-p)(r+2)} t^r. \tag{19}$$

où $B_\alpha(z)$ est la fonction associée par le lemme du paragraphe 3, à la suite $\Lambda' = \Lambda + 1$, c'est-à-dire à la transformée de la suite Λ par la translation $(z, z+1)$. Les propriétés (14), (15) et (16) résultent immédiatement de cette définition.

Pour établir l'inégalité (17) nous allons représenter $\beta_{\alpha,p}$ à l'aide d'intégrales complexes. Posons

$$b(u) = \int_0^{+\infty e^{i\theta}} \frac{B_\alpha(z)}{(z-p-1)(z+1)} u^{-z}\, du; \qquad |\theta| \leq \frac{\pi}{2}, \qquad |\arg u| < \frac{\pi}{2}, \qquad u = t + is.$$

alors, en vertu de (9) et (10), $b(u)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan $t > 0$ privé du segment $0 \leq t \leq 1$. Étudions le comportement de $b(u)$ au voisinage de ce segment, on a, si $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$,

$$\log |b(re^{i\varphi})| = \log \left| \int_0^{+\infty} \frac{B_\alpha(iy)}{(iy+1)(iy-p-1)} r^{-iy} e^{-\varphi y}\, dy \right| < \log \pi + q_\alpha(\varphi), \tag{20}$$

où, en tenant compte de (10),

$$q_\alpha(\varphi) = \overline{\underset{y>0}{\text{borne}}}(\log |B_\alpha(iy)| - \varphi y) = \overline{\underset{y>0}{\text{borne}}}(\pi N_\alpha(y) - \varphi y).$$

D'autre part, on aura pour $t_0 > 1$, d'après (9) et (11)

$$|b(t_0 + is)| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{B_\alpha(x)}{(x+1)(x-p-1)} (t_0 + is)^{-x-1}\, dt \right| < C_{t_0},$$

C_{t_0} étant indépendante de p.

Considérons le triangle T_{φ,t_0} entourant le segment $(0, 1)$, défini par

$$T_{\varphi,t_0} = \left\{ u,\ u = re^{\pm i\varphi} \left(0 \leq r \leq \frac{t_0}{\cos\varphi} \right) \text{ ou } t = t_0 (\,|s| \leq t_0 \operatorname{tg}\varphi) \right\} \qquad (u = s + it).$$

La formule d'inversion de l'intégrale de Mellin-Polya donne

$$\frac{B_\alpha(z)}{(z+1)(z-p-1)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{T_{\varphi,t_0}} b(u) u^{z-1}\, du;$$

on peut alors écrire (19) sous la forme

$$\beta_{\alpha,p} P(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{T_{\varphi,t_0}} P(tu) b(u)\, du. \tag{21}$$

Si t_0 vérifie $xt_0 = \gamma < 1$, on aura,

$$(21') \qquad \|\beta_{x,p}P\|_{xR} < 4 \max_{u\in T_{\varphi,\gamma R}} |P(u)| \max_{u\in T_{\varphi,1}} |b(u)| \qquad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{4}\right).$$

Le maximum de $P(u)$ dans le triangle $T_{\varphi,\gamma R}$ va être évalué en appliquant un théorème de M. Serge Bernstein ([1], p. 112). Si l'on désigne par Γ_δ l'ellipse

$$|z - R| + |z| \leq \frac{R}{2}\left(\delta + \frac{1}{\delta}\right) \qquad (\delta > 1),$$

on a

$$\max_{u\in\Gamma_\delta} |P(u)| < \delta^n \|P\|_R \qquad [n = \text{degré de } P(u)];$$

le triangle $T_{\varphi,\gamma R}$ sera contenu dans l'ellipse Γ_δ si

$$\frac{1}{2}\left(\delta + \frac{1}{\delta}\right) = \frac{\gamma}{\cos\varphi} + \sqrt{\left(1 - \gamma^2 + \gamma^2 \operatorname{tg}^2\varphi\right)}$$

ou

$$\delta = 1 + \psi_\gamma(\varphi), \qquad \text{avec} \quad \psi_\gamma(\varphi) = \varphi\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}(1 + O(\varphi^2)),$$

(21') s'écrira alors, en tenant compte de (20),

$$\log\|\beta_{x,p}P\|_{xR} < n\psi_\gamma(\varphi) + q_x(\varphi) + O_\gamma(1) + \log\|P\|_R \qquad (1 > \gamma > x);$$

cette relation est vérifiée quel que soit $\varphi > 0$. En appliquant (3), γ étant fixé, on aura

$$\log\|\beta_{x,p}P\|_{xR} \leq \pi N_x^*\left(n\sqrt{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\right) + \log|P\|_R + O_\gamma(1) \qquad (1 > \gamma > x),$$

ce qui établit (17) et (18).

Nous allons effectuer un prolongement « par continuité » de l'opérateur $\beta_{x,p}$ à certaines classes quasi analytiques. Nous aurons besoin du lemme d'approximation suivant :

5. Lemme. — *Soit $f(t)$ une fonction indéfiniment différentiable définie sur le segment $(0, R)(R < +\infty)$, satisfaisant à $|f^{(n)}(t)| < M_n$, il existe une suite de polynomes $Q_n(t)$, de degré n, telle que*

$$(22) \qquad f(t) = \sum_0^\infty Q_n(t),$$

$$(23) \qquad \|Q_n(t)\|_R < \frac{2}{S_\alpha\left(\frac{2n}{R}\right)} \qquad \left(\alpha = \frac{R}{2}\right),$$

$S_\alpha(r)$ ayant été défini au paragraphe 1.

Démonstration. — Rappelons brièvement la démonstration donnée dans [3] (p. 44).

$f^{(p)}\left(\frac{R}{2}(1+\cos\theta)\right)$ est une fonction périodique de période 2π. Écrivons son développement de Fourier

$$f^{p}\left(\frac{R}{2}(1+\cos\theta)\right)=\sum_{0}^{\infty} A_n^p \cos n\theta.$$

En dérivant par rapport à θ, on obtient les relations

$$A_n^p=\frac{A_{n-1}^{p+1}-A_{n+1}^{p+1}}{2n}\frac{R}{2}. \tag{24}$$

Les formules de Fourier, donnent après une intégration par parties,

$$A_n^{p+1} < \frac{2M_{p+2}}{n}\frac{R}{2} \qquad (n\geq 1),$$

d'où, d'après (24),

$$|A_n^p|<2M_{p+2}\left(\frac{R}{2n}\right)^2 \qquad (n\geq 2).$$

En appliquant une nouvelle fois (24), on obtient

$$|A_n^{p-1}|=\left|\frac{A_{n-1}^{p}-A_{n+1}^{p}}{2n}\frac{R}{2}\right|<2M_{p+2}\left(\frac{R}{2n}\right)^3 \qquad (n\geq 3)$$

et, finalement,

$$|A_n^0|<2M_p\left(\frac{R}{2n}\right)^p \qquad (n\geq p)$$

ou

$$|A_n^0|<\frac{2}{S_x\left(\frac{2n}{R}\right)} \qquad \left(x=\frac{R}{2}\right).$$

En prenant $Q_n(t)=A_n\cos n \operatorname{arc}\cos\left(\frac{2x-R}{R}\right)$ on satisfait à (22) et à (23).

C. Q. F. D.

6. Énonçons maintenant le lemme d'extension :

Lemme. — *Pour* $\rho > D_{M_n}(\Lambda)$, *on peut définir une suite d'applications linéaires* $\beta_{\rho,p}(p\in\Lambda)$ *de l'espace vectoriel* F *des fonctions indéfiniment différentiables définies sur* $(0, R)(R<+\infty)$ *vérifiant*

$$|f^{(n)}(t)|<M_n,$$

dans l'espace vectoriel Φ *des fonctions définies et continues sur tout inter-*

valle $\left(0, \frac{\frac{1}{4}Rh}{R^2\rho^2+\frac{1}{4}}\right)$ $(h<1)$ *et approchables uniformément sur ces intervalles par un polynome de degré* n *à moins de* $E_h(n)$ *où*

$$\overline{\lim_{n}} \frac{-\log E_h(n)}{\log T(n)} > 0, \tag{25}$$

(26) $\beta_{\rho,p}$ vérifie (14) et (15),

$$\| \beta_{\rho,p} f \|_{xR} < 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\Delta_x n}}{S_R\left(\frac{2n}{R}\right)}, \qquad x < \frac{1}{R^2\rho^2+\frac{1}{4}}, \tag{27}$$

(28) *Si* $f^{(m)}(0)=0 \quad (m<n)$, *alors* $\beta_{\rho,p} f(t) = O(t^n)$.

Démonstration. — Sur l'espace vectoriel ε des polynomes à coefficients complexes, nous définirons une norme, en posant

$$\| P \|_{xR} = \inf \sum_{0}^{N} \| P_n \|_R e^{\Delta_x n}, \qquad \text{où} \quad P(t) = \sum_{0}^{N} P_n(t) \qquad [n = \text{degré de } P_n(t)],$$

l'infimum étant pris sur l'ensemble de toutes les décompositions de $P(t)$ de cette forme, $\Delta_x(n)$ ayant été introduit dans le lemme du paragraphe 4.

D'après (17), on a

$$\| \beta_{\rho,p} P \|_{xR} \leq \sum \| \beta_{\rho,p} P_n \|_{xR} \leq \| P \|_{xR}, \tag{29}$$

les opérateurs $\beta_{\rho,p}$ définissent ainsi des applications linéaires, continues, de norme au plus égale à 1, de l'espace vectoriel ε muni de la norme $\| \quad \|_{xR}$ dans l'espace de Banach $\mathcal{C}(0, xR)$ des fonctions définies et continues sur $(0, xR)$.

Soit $\bar{\varepsilon}$ le complété de ε par rapport à la norme $\| \quad \|_{xR}$, $\beta_{\rho,p}$ l'extension de $\beta_{\rho,p}$ à $\bar{\varepsilon}$.

Soit $\sum Q_n(t)$ la série de polynomes convergeant vers $f(t)$ construite en (22). On aura

$$\| Q_n(t) \|_{xR} < 2 \frac{e^{\Delta_x n}}{S_R\left(\frac{2n}{R}\right)} \tag{30}$$

qui, en tenant compte de (18) et de $\overline{\lim_{r}} \frac{N_\zeta^*(r)}{\log T(r)} < \zeta$, pour n assez grand $(\eta_1 > 0)$ et en supposant satisfaite l'égalité $T(r) = S_x(r)$, donne

$$\log \| Q_n(t) \|_{xR} < N^* \left(\sqrt[n]{\frac{x}{1-x}} + n\eta_1 \right) - \log T\left(\frac{2n}{R}\right). \tag{31}$$

Remarquons que si l'égalité $T(r) = S_x(r)$ n'est pas satisfaite alors

$$\log M_n = O(n), \qquad \log S(r) = O(r) \qquad \text{et} \qquad \log \| Q_n(t) \|_{xR} < -an.$$

La série $|Q_n(t)|_{xR}$ sera donc absolument convergente dès que $\frac{\rho R}{2}\sqrt{\frac{x}{1-x}}<1$ ou $x<\frac{1}{1+R^2\rho^2}$, alors, la série $Q_n(t)$ sera absolument convergente dans ε, ce qui permettra d'identifier f à un élément de ε. On aura en vertu de (29) et (30),

$$|\beta_{p,p}f|_{xR}<\sum_{0}^{\infty}|Q_n|_{xR}<2\sum_{0}^{\infty}\frac{e^{\Delta_x n}}{S_{\frac{R}{2}}\left(\frac{2n}{R}\right)},$$

ce qui établit (27), d'autre part,

$$|\beta_{p,p}f-\sum_{0}^{N}\beta_{p,p}Q_n|_{xR}<\sum_{N+1}^{\infty}|Q_n|_{xR}=2\sum_{N+1}^{\infty}\frac{e^{\Delta_x n}}{S_{\frac{R}{2}}\left(\frac{2n}{R}\right)}=O\left(\frac{e^{\Delta_x N}}{S_{\frac{R}{2}}\left(\frac{2N}{R}\right)}\right),$$

ce qui établit (25), (26) résulte de la définition de $\bar{\beta}_{p,p}$ par prolongement de $\beta_{p,p}$.

Il reste à établir (28). Posons

$$g(t)=t^{-n}f(t)$$

alors on a

$$g^{(q)}(t)=\sum_{r=0}^{q}(-1)^r\binom{r}{q}\frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(n)}t^{-r-n}f^{(q-r)}(t).$$

Substituons à $f^{(q-r)}(t)$ son développement de Taylor arrêté à l'ordre $r+n$,

$$g^{(q)}(t)=\frac{1}{\Gamma(n)}\sum_{s=n-q}^{n-1}f^{(q-n+s)}(0)\,t^{s-n}\sum_{r=0}^{q}(-1)^r\binom{r}{q}\frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(r-s+1)}+\beta(t)\frac{M_{n-q}}{\Gamma(n)}\sum_{1}^{q}\binom{r}{q}\frac{1}{r-n},$$

où

$$|\beta(t)|\leq 1.$$

Les identités

$$\sum_{r=0}^{q}(-1)^r\binom{r}{q}\frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(r+s+1)}=\left[\frac{d^{n-s-1}}{du^{n-s-1}}u^n(1-u)^r\right]_{u=1}=0 \qquad \text{si } 0\leq n-s-1<q$$

donnent

$$|g^{(q)}(t)|<\frac{2^q}{\Gamma(n+1)}M_{n-q}. \tag{32}$$

Calculons $\beta_{p,p}f(t)=\beta_{p,p}t^ng(t)$ en appliquant (21), on a

$$\beta_{p,p}t^ng(t)=\sum_{m=0}^{m=\infty}\int_{\Gamma_{\frac{\rho}{2},t_0}}t^nu^nH_m(tu)\,b(u)\,du=t^n\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\Gamma_{\frac{\rho}{2},t_0}}H_m(tu)b^*(u)\,du=t^n\beta^*g. \tag{33}$$

où $H_m(t)$ désigne la série de polynomes construite par le lemme du para-

graphe 5 et convergeant vers $g(t)$, où $b^*(u) = u^n b(u)$ et où β^* désigne l'opérateur défini sur ε à partir de $b^*(u)$ par (21). Justifions les égalités (33). Il résulte de l'inégalité $|b^*(u)| < \frac{t_0^n}{(\cos\varphi)^n} |b(u)| (u \in T_{\varphi, t_0})$ que $\| \beta^* H_m \|_{\varepsilon R} < \frac{t_0^m}{(\cos\varphi)^n} \| H_m \|_{\varepsilon R}$ il résulte de (32) et de (23) que $\sum \| \beta^* H_m \|_{\varepsilon R} < +\infty$ si $x < \frac{2}{t_0(1+R^2\rho^2)}$; $\beta^* g$ est ainsi une fonction définie et continue sur l'intervalle $\left(0, \frac{2R}{t_0(1+R^2\rho^2)}\right)$, (33) vaut dans cet intervalle ce qui entraine (28). C. Q. F. D.

Avant de démontrer l'inégalité du théorème I nous allons énoncer un lemme d'unicité qui s'obtient par un simple changement de variable de théorème de quasi-analyticité de Denjoy-Carleman.

7. Lemme. — *Soit $g(t)$ une fonction définie sur le segment $(0, R)$ par la série $g(t) = \sum_0^\infty Q_n(t)$, $Q_n(t)$ étant un polynome de degré n, $\| Q_n(t) \|_R < e^{\varepsilon \log T n} (\varepsilon < 0)$, où $T(n)$ est défini au début du paragraphe 1. Supposons que (5) soit valable et que $g(t) = O(t^m)$ quel que soit $m > 0$, alors $g(t) \equiv 0$.*

Démonstration. — Considérons la fonction périodique $\varphi(\theta) = g\left[\frac{R}{2}(1 - \cos\theta)\right]$ et sa série de Fourier $\sum a_p \cos p\theta$.

En appliquant l'inégalité de Parseval, on obtient

$$\sum_{N+1}^{\infty} a_k^2 < \int_0^{2\pi} \left| \varphi(0) - \sum_0^N Q_n\left[\frac{R}{2}(1-\cos\theta)\right] \right|^2 d\theta < 2\pi \sum_{q>N} e^{\varepsilon \log T(q)} = O(e^{\varepsilon' \log T(N)}).$$

En particulier, $|a_N| < B e^{\varepsilon' \log T N - 2}$; $\varphi(\theta)$ est une fonction indéfiniment dérivable sur le segment $(0, R)$, et l'on a

$$\varphi^{(n)}(0) < B \max_N N^n e^{\varepsilon' \log T(N-2)},$$

ce qui entraine avec (5) que $\varphi(\theta)$ appartient à une classe quasi analytique. De plus l'hypothèse $g(t) = O(t^m)$ entraine $\varphi(\theta) = O(\theta^m)$ $(m > 0)$.

$\varphi(\theta)$ a toutes ses dérivées nulles en 0 donc $\varphi(\theta) \equiv 0$. C. Q. F. D.

8. Démonstration de l'inégalité (7). — Soit $f(t)$, une fonction indéfiniment différentiable sur le segment $(0, R)$, satisfaisant aux hypothèses du théorème, $\rho > D_{M_n}(\Lambda)$, $\beta_{\rho, p}$ les opérateurs définis par le lemme du paragraphe 6. Posons

$$f_p(t) = f(t) - t^p \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \qquad (p \in \Lambda), \tag{34}$$

$$g_{N,p}(t) = f_p(t) - \sum_{\substack{q \leq N \\ q \neq p}} t^q \frac{f^{(q)}(0)}{q!}.$$

Soit $\varphi(t) = \beta_{\varphi,p} f_p(t)$. Alors (14) et (4), entraînent $\varphi(t) = \beta_{\varphi,p} g_{N,p}(t)$. En appliquant (28), on obtient $\varphi(t) = O(t^N)$, quel que soit $N > 0$. Enfin (25) permet d'appliquer le lemme du paragraphe 7 et de conclure $\varphi(t) \equiv 0$ sur un voisinage de l'origine qui va être précisé.

En tenant compte de (34) et de (15) on obtient

$$\beta_{\varphi,p} f_p(t) = \beta_{\varphi,p} f - \frac{t^p}{p+1} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} B'_\varphi(p+1) \equiv 0.$$

En appliquant à l'égalité précédente (27), on obtient

$$\frac{|f^{(p)}(0)|}{p!} < \frac{2(p+1)}{B'_\varphi(p+1)(xR)^p} \sum_0^\infty \frac{e^{\lambda_n(n)}}{S_R\left(\frac{2n}{R}\right)}, \qquad x < \frac{4}{4 + R^2\rho^2},$$

ce qui, en appliquant (11) et en remarquant que φ a été assujetti à la seule condition $\varphi > D_{M_n}(\Lambda)$, entraîne (7). C. Q. F. D.

9. La quasi-analyticité sur un intervalle borné. — L'application de l'inégalité démontrée dans le paragraphe précédent donnera immédiatement le résultat de quasi-analyticité généralisée, objet de ce travail. Nous démontrerons ensuite en quelque sorte une réciproque qui nous permettra de discuter les hypothèses sous lesquelles aura été obtenu le résultat direct.

Théorème. — *Soit $f(t)$ une fonction indéfiniment différentiable définie sur le segment (0, R), vérifiant $|f^{(n)}(t)| < M_n$, où la suite $\{M_n\}$ vérifie la condition de quasi-analyticité de Denjoy-Carleman, soit Λ une suite d'entiers positifs telle que $f^{(n)}(0) = 0$ si $n \notin \Lambda$. Soit $d = D_{M_n}(\Lambda)$ la densité de la suite Λ par rapport à $\{M_n\}$ définie au paragraphe 1.*

Alors $f(t)$ est une fonction analytique dans le cercle de centre 0 et de rayon $\frac{4R}{4 + R^2 d^2}$.

Démonstration. — D'après l'inégalité (7), on a

$$\overline{\lim_p} \left| \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \right|^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{xR}, \qquad \text{où} \quad x < \frac{4}{4 + R^2 d^2},$$

ce qui démontre le théorème.

10. Corollaire. — *Soit $f(t)$ une fonction indéfiniment différentiable définie sur le segment (0, R) et appartenant à une classe quasi analytique. Supposons que $f^{(n)}(0) = 0$, sauf pour une suite $\Lambda\{n_p\}$ telle que $\sum \frac{1}{n_p} < +\infty$. Alors $f(t)$ est une fonction analytique holomorphe dans le cercle de centre 0 et de rayon R.*

Démonstration. — On peut prendre pour fonction approximative de répartition de la suite Λ la fonction identiquement nulle, alors $D_{M_n}(\Lambda) = d = 0$, l'application du théorème précédent permet de conclure.

Remarques. — La conclusion de ce théorème diffère de celle du théorème d'Hadamard-Fabry sur le prolongement analytique des séries de Taylor lacunaires en ce que l'on ne peut affirmer l'holomorphie de $f(t)$ que dans un cercle de rayon en général plus petit que l'intervalle où $f(t)$ est définie. Nous construirons au paragraphe suivant des exemples montrant que le rayon d'holomorphie peut être inférieur à l'intervalle de définition.

Le corollaire est directement inspiré de [4] (p. 153).

On pourrait montrer plus généralement, comme dans [4], que les propriétés de quasi-analyticité généralisée sur le segment (0, R) ne se modifient pas lorsque l'on ajoute à la suite Λ une suite Λ' telle que $\sum_{p \in \Lambda'} \frac{1}{p} < +\infty$.

On peut enfin remarquer que si l'on avait désiré obtenir seulement le corollaire il aurait suffi de démontrer l'inégalité (7) sous l'hypothèse $\sum_{p \in \Lambda} \frac{1}{p} < +\infty$, hypothèse qui permet de construire beaucoup plus facilement les opérateurs $\beta_{\rho,p}$ par de simples produits de composition avec des fonctions bornées, définies sur le segment (0, 1).

Nous allons démontrer un résultat inverse de celui du théorème précédent.

11. Théorème. — *Soit* Λ *une suite d'entiers positifs,* $N_\alpha(t)$ *une fonction de répartition approximative de la suite* Λ, M_n *une suite de nombres positifs vérifiant* (5). *Supposons*

$$\lim \frac{M_n^{\frac{1}{n}}}{n} = +\infty \tag{35}$$

$$d_* = \varliminf_{\rho} \frac{N_\alpha(t)}{\log T(t)} \qquad (0 < d_* \leq +\infty), \tag{36}$$

alors il existe une fonction indéfiniment dérivable $f(t)$ *définie sur la droite* $(0, +\infty)$, *vérifiant*

$$|f^{(n)}(t)| < M_n, \qquad f^{(m)}(0) = 0 \quad \text{si} \quad m \notin \Lambda \tag{37}$$

et holomorphe exactement dans le cercle de centre 0 *et de rayon* $\frac{1}{d_*}$.

Démonstration. — Supposons d'abord $d_* = 1$ et posons

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{iy}}{(1+iy)^2 B(iy)}\, dy, \tag{38}$$

où $B(z)$ désigne la fonction associée par le lemme du paragraphe 2, à la suite Λ et à la fonction de répartition approximative $N_\alpha(t)$. La formule de Cauchy donne

$$g(t) - \sum_{\lambda<N} \frac{t^\lambda}{(1+i\lambda)^2 B'(\lambda)} = O\left(\frac{t^N}{B(N)}\right),$$

ce qui montre, en appliquant (9) et (11), que $g(t)$ est holomorphe dans le cercle de centre o et de rayon 1 et exactement dans ce cercle. Dérivons l'égalité (38) par rapport à t, on obtient, en tenant compte de (10),

$$|g^{(p)}(t)| < \sup_{y>0} (y+p)^p t^{-p} e^{-\pi N_\alpha(y)}.$$

En tenant compte de (36), on a

$$\log|g^{(p)}(t)| < -p\log t + \sup_y (p\log(y+p) - d_*\log T(y)) + o(p).$$

En tenant compte de (35) on a

$$\sup_y (p\log(y+p) - d_*\log T(y)) = \log M_p + o(p).$$

D'où

$$\log|g^{(p)}(t)| < -p\log t + \log M_p + o(p).$$

D'autre part, lorsque t est situé sur l'intervalle (o, 1), on peut majorer $g^{(p)}(t)$ par la formule de Cauchy. Finalement, on obtiendra

$$\log|g^{(p)}(t)| < \inf_{0<\delta<1}\left(-p\log\delta + \log M_p + o(p),\ \log p! - p\log\frac{1-\delta}{2} + A_\delta\right)$$

en tenant compte de (35), on a, en fixant $\delta < 1$,

$$\log|g^{(p)}(t)| < \log M_p - p\log\delta + O_\delta(1).$$

En faisant tendre maintenant δ vers 1, on obtient

$$\log|g^{(p)}(t)| < \log M_n + o(p) \qquad (o \leq t < +\infty).$$

Posons maintenant, η_n étant une suite donnée tendant vers 1, $\eta_n < 1$, ε_n étant une suite de nombres positifs qui sera fixée ultérieurement,

$$f(t) = \sum_0^\infty \varepsilon_n g(\eta_n t)$$

la dernière inégalité entraîne qu'il existe une constante B_n telle que

$$|g^{(p)}(\eta_n t)| < B_n M_p \qquad (o \leq t < +\infty).$$

En choisissant la suite ε_n de telle sorte que $\sum \varepsilon_n B_n < 1$, $f(t)$ vérifiera (37) et

sera holomorphe dans le cercle de centre o et de rayon 1, et non prolongeable analytiquement à l'extérieur de ce cercle. Ceci démontre si $d_* = 1$, le théorème.

Envisageons maintenant le cas où $d_* \neq 1$, $d_* < +\infty$.

Nous poserons $M'_p = d_*^{-p} M$ et nous allons calculer la densité d'_* de la suite Λ par rapport à la suite $\{M'_p\}$. On a $T'(r) = T(rd_*)$ et en tenant compte de (35),

$$\log T(rd_*) \leq d_* \log T(r),$$

d'où

$$d'_* = \lim_{r} \frac{N(r)}{\log T(r)} = \lim_{r} \frac{N(r)}{\log T(rd_*)} > \frac{1}{d_*} \lim_{r} \frac{N(r)}{\log T(r)} = 1.$$

Appliquons à la suite $\{M'_p\}$ le résultat démontré ci-dessus dans le cas où $d'_* > 1$. On peut construire une fonction holomorphe exactement dans le cercle de centre o et de rayon 1 vérifiant

$$|h^{(p)}(t)| < M'_p = d_*^{-p} M_p, \qquad h^{(m)}(0) = 0 \qquad \text{si} \quad m \notin \Lambda,$$

la fonction $f(t) = h(d_* t)$ sera holomorphe strictement dans le cercle de rayon $\frac{1}{d_*}$, vérifiera (37) et satisfera ainsi aux conditions de la proposition.

Pour terminer, examinons le cas où $d_* = +\infty$; on peut construire, d'après ce qui précède, une suite de fonctions $f_n(t)$, holomorphes dans le cercle de rayon $\frac{1}{n}$, vérifiant

$$f_n^{(p)}(0) = n^p A_p \qquad (A_p = 0 \text{ si } p \in \Lambda), \qquad |f_n^{(p)}(t)| < B_n M_p.$$

En posant

$$f(t) = \sum_{0}^{\infty} \varepsilon_n f_n(t), \qquad \text{où} \quad \sum \varepsilon_n B_n < 1 \qquad (\varepsilon_n > 0),$$

on obtiendra une fonction $f(t)$ satisfaisant à (37) et non holomorphe au voisinage de o, ce qui achève la démonstration.

Pour comparer les deux derniers théorèmes, il nous faudra faire sur la suite les hypothèses de régularité suivantes.

Nous dirons que la suite Λ est *régulièrement* répartie si elle possède une fonction de répartition approximative $N_\alpha(t)$ telle que $\lim \frac{N_\alpha^*(t)}{N(t)} = 1$, où $N_\alpha^*(t)$ désigne la régularisée concave de $N_\alpha(t)$ introduite en (1). On a alors l'énoncé suivant, qui contient dans un cas particulier les théorèmes en question.

12. Théorème. — *Soit* M_n *une suite de nombres positifs vérifiant* (5) *et* (35). *Soit* Λ *une suite d'entiers positifs régulièrement répartie, supposons l'existence de la limite*

$$d = \lim_{t=+\infty} \pi \frac{N(t)}{\log T(t)} \qquad (0 \leq d \leq +\infty).$$

Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que les hypothèses

$$(39) \qquad |f^{n}(t)| < M_n \qquad (0 \leq t < +\infty), \qquad f^{(m)}(0) = 0 \qquad \text{si} \quad m \in \Lambda$$

entraînent que $f(t)$ *soit holomorphe dans le cercle de centre* 0 *et de rayon* R_1 *est que* $R_1 \leq \frac{1}{d}$.

Démonstration. — La condition est nécessaire d'après le théorème précédent. Soit maintenant une fonction $f(t)$ satisfaisant à (39) alors, elle satisfait sur tout intervalle borné (0, R) aux hypothèses de la proposition du paragraphe 9, donc $f(t)$ sera holomorphe d'après cette proposition dans les cercles de centre 0 et de rayon $\varphi(R) = \frac{4R}{4 + R^2 d^2}$. La fonction $\varphi(R)$ atteint son maximum pour $R = \frac{2}{d}$ et $\varphi\left(\frac{2}{d}\right) = \frac{1}{d}$, la fonction $f(t)$ sera ainsi holomorphe dans le cercle de centre 0 et de rayon $\frac{1}{d}$. C. Q. F. D.

13. Remarques sur l'inégalité (7). — On aurait pu construire d'une manière plus explicite des opérateurs de projection analogue aux $\overline{\beta}_{\alpha,p}$, introduits au paragraphe 6 en utilisant la méthode de M. S. Mandelbrojt [4]. On aurait déterminé une fonction entière $G(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$ de type exponentiel d'ordre zéro, s'annulant sur la suite Λ et l'on aurait défini un opérateur γ en posant

$$\gamma f = \sum_0^{\infty} a_n f^{(n)}(t).$$

On peut montrer, sans développer explicitement ce procédé, que l'inégalité (7), s'applique sous des hypothèses où le calcul symbolique défini par $G(z)$ n'aurait pas permis de conclure.

En effet, l'inégalité obtenue par ce calcul symbolique serait de la forme

$$(40) \qquad |f^{(p)}(0)| < p! \frac{A_p}{R^p},$$

où A_p sera indépendant de la longueur R de l'intervalle sur lequel $f(t)$ est défini et quasi analytique. Si les hypothèses permettant d'appliquer (40) sont remplies pour une fonction $f(t)$ définie sur $(0, +\infty)$, en faisant croître R indéfiniment, (40) montre que $f(t)$ est identiquement nulle.

Au contraire, l'inégalité (7) peut s'appliquer à des fonctions non identiquement nulles définies sur la demi-droite comme le montrent les fonctions construites dans la proposition du paragraphe 12.

Cette remarque peut montrer que ce ne serait pas entreprendre un travail

sans objet que de démontrer pour les séries de Dirichlet, l'analogue de l'inégalité fondamentale de M. S. Mandelbrojt, en utilisant des opérateurs de projection définis, comme dans ce travail, à l'aide de la transformation de Pólya-Laplace au lieu de la transformation de Pólya-Fourier intervenant implicitement dans [4]. La technique à utiliser est assez différente de celle de ce travail : les opérateurs $\beta_{\alpha,p}$ étant alors définis facilement par une intégrale de Cauchy, la condition d'adhérence du paragraphe 7 et la démonstration de l'analogue de l'inégalité (11) représentent la principale difficulté.

Signalons pour terminer que l'inégalité (7) permet évidemment d'obtenir des résultats du type suivant dont voici le plus élémentaire : Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre fini, supposons que

$$f^{(n)}(0) = 0 \qquad (n \notin \Lambda), \qquad \sum_{\Lambda} \frac{1}{\lambda} < +\infty.$$

Posons

$$M(r) = \max |f(re^{i\theta})|, \qquad m(x) = \max_{0 \leq t \leq x} f(t),$$

alors

$$\log M(r) = \log m(r) + O(\log r).$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Serge Bernstein, *Leçons sur les propriétés extrémales*, Paris, 1924.

[2] T. Carleman, *Les fonctions quasi analytiques*, Paris, 1926.

[3] S. Mandelbrojt, *On the class of infinitely differentiable functions*. Rice Institute Pamphlet, 1942.

[4] S. Mandelbrojt, *Les séries adhérentes*, Paris, 1952.

DÉFINITION

DE

L'OPÉRATEUR H DE SCHRÖDINGER

POUR L'ATOME D'HYDROGÈNE

PAR M. JEAN COLMEZ.

INTRODUCTION (1).

D'après V. Neumann [II], les opérateurs de la mécanique quantique qui sont en général des opérateurs différentiels à coefficients variables, doivent être autoadjoints (hypermaximaux) dans l'espace $\mathcal{H}_{R^n}$ des fonctions de carré sommable de R^n.

Un opérateur A est autoadjoint dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ si :

1° L'ensemble D des éléments de $\mathcal{H}$ sur lesquels il est défini est dense dans $\mathcal{H}$;

2° Si, lorsqu'étant donné ψ il existe ψ_1 tel que

$$\langle A(\varphi), \psi \rangle = \langle \varphi, \psi_1 \rangle$$

quel que soit $\varphi \in D$, alors $\psi \in D$, et $A(\psi) = \psi_1$. L'opérateur est alors hermitique, c'est-à-dire si φ et $\psi \in D$,

$$\langle A(\varphi), \psi \rangle = \langle \varphi, A(\psi) \rangle.$$

Dans $\mathcal{H}_{R^n}$,

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{R^n} \varphi \overline{\psi}\, dx_1, dx_2, \ldots, dx_n.$$

En Mécanique quantique, on considère que l'opérateur A est défini sur un ensemble D_0 de fonctions suffisamment régulières (par exemple qui ont des dérivées continues au moins jusqu'à un ordre de dérivation égal à celui des dérivées qui figurent dans l'opérateur) tel que $A(\varphi)$ soit de carré sommable.

(1) Ce Mémoire constitue le développement d'une Note aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences [Colmez, VI] (les chiffres romains renvoient à la liste bibliographique qui se trouve à la fin de ce Mémoire).

Le domaine D_0 n'étant pas en général assez étendu pour que A soit autoadjoint, on étend sa définition en le « fermant » [II]. L'opérateur ainsi étendu, fermeture de A, soit $\bar{A}$, est alors défini sur le domaine D des fonctions ψ qui sont limites de suites $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p, \ldots$ (dans $\mathcal{H}_{R^n}$) telle que $A(\psi_p) \to \varphi$. Alors $\bar{A}(\psi) = \varphi$. Mais rien ne prouve en général que l'opérateur $\bar{A}$ est autoadjoint et l'on a des exemples d'opérateurs pour lesquels A n'est pas autoadjoint et même que l'on ne peut *étendre* de façon à les rendre autoadjoints quel que soit le procédé employé [II]. A vrai dire, on sait que si A est à coefficient constant ou même variable, mais suffisamment régulier en prenant comme domaine D_0, l'ensemble des fonctions suffisamment dérivables en tout point, la fermeture $\bar{A}$ de A est autoadjointe : la fonction $A(\varphi)$ est alors définie partout dans R^n et l'hermiticité indispensable de l'opérateur sur le domaine D_0 est assurée en particulier par la continuité de certaines dérivées.

Cependant si A (comme l'opérateur $H = \Delta + \frac{1}{r}$ de Schrödinger) à des coefficients avec des singularités (singularité à l'origine) en certains points, la condition d'existence de φ ou des dérivées qui figurent dans A en ces points n'apparaît plus naturelle, d'autant que, pour l'opérateur H, certaines de ses fonctions propres (*voir* plus loin) n'ont pas de dérivées premières à l'origine et d'autres pas de dérivées secondes [VI] et que, de toute façon, la fonction $A(\varphi)$ ne serait pas définie partout. Il paraît plus indiqué de prendre comme domaine D_0, l'ensemble des fonctions φ pour lesquelles les dérivées qui figurent dans A sont continues sauf peut-être aux singularités de l'équation et telle que $A(\varphi)$ soit de carré sommable. C'est ce que l'on dit en général dans les traités de Physique théorique (souvent la définition donnée est encore plus vague [I]). *Mais on n'est plus assuré de l'hermiticité de* A : nous allons constater ce fait pour l'opérateur $H = \Delta + \frac{1}{r}$ ($r = OM$, distance de M à l'origine) dans l'espace R^3. Nous allons résoudre l'équation $H(\varphi) = \lambda\varphi$ dans le domaine D_0 des fonctions au moins deux fois continuement dérivables, sauf peut-être à l'origine. *Dans ce domaine* (2), outre les fonctions d'ondes classiques (qui ont fait le succès de la Mécanique ondulatoire), nous allons trouver une famille non dénombrable de solutions [VI], ce qui est impossible avec un opérateur hermitique (famille abhérrente).

J'ai conduit cette résolution d'*une façon aussi élémentaire que possible*, compte tenu de la rigueur mathématique, car, dans les Traités de physique [I], on se contente de trouver les fonctions d'onde sans s'assurer s'il y en a d'autres (on impose d'ailleurs aux fonctions cherchées d'être *bornées*, condition *a priori* totalement étrangère au problème).

---

(2) *A priori*, il pourrait se faire qu'il y ait d'autres solutions $\notin D_0$ mais au domaine D de définition de la fermeture.

PREMIÈRE PARTIE.

Résolution de l'équation I : $H(\varphi) = \lambda\varphi$.

D'après ce qui précède, nous cherchons $\varphi(x, y, z) \in \mathcal{H}_{R^3}$ possédant des dérivées premières et secondes continues, sauf peut-être à l'origine.

Posons

$$\varphi(x, y, z) = \psi(r, \theta, \omega), \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\omega \\ y = r\sin\theta\sin\omega \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad (r \geqq 0).$$

$\psi(r, \theta, \omega)$ est deux fois continuement dérivable en r, θ, ω, sauf peut-être pour $r = 0$. Nous la considérerons comme fonction définie sur la sphère S_2 de rayon 1 centrée à l'origine (coordonnées θ et ω) dépendant du paramètre r

$$H(\varphi) = \Delta\varphi + \frac{\varphi}{r} = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{S_2}(\psi),$$

où $\Delta_{S_2}(\psi)$ est le laplacien de ψ sur S_2, c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2}.$$

Δ_{S_2} opérateur agissant dans $\mathcal{H}_{S_2}$ espace des fonctions de carré sommable sur la sphère S_2 avec la mesure ordinaire $d\sigma = \sin\theta\, d\theta\, d\omega$ possède un système orthonormal complet de fonctions propres qui sont des fonctions sphériques : soit $S_{l,m}(\theta, \omega)$ la fonction égale à

$$S_{l,m}(\theta, \omega) = k_{l,m}\, e^{im\omega}\sin\theta^{|m|}\frac{d^{l+m}}{d\cos\theta^{l+m}}[(1-\cos^2\theta)^l],$$

où m est un entier $\gtrless 0$, avec $|m| \leqq l$ entier $\geqq 0$, $k_{l,m}$ une constante telle que

$$\int_{S_2} |S_{l,m}|^2\, d\sigma = 1;$$

$S_{l,m}(\theta, \omega)$ est une des fonctions propres relatives à la valeur propre $-l(l+1)$ de Δ_{S_2}, c'est-à-dire vérifie l'équation

$$\Delta_{S_2}(S_{l,m}) + l(l+1)S_{l,m} = 0$$

et l'ensemble des $S_{l,m}$ forme un système orthonormal complet dans $\mathcal{H}_{S_2}$.

Posons

$$R_{l,m}(r) = \int_{S_2} \psi(r, \theta, \omega)\overline{S}_{l,m}(\theta, \omega)\, d\sigma,$$

fonction de r au moins deux fois continuement dérivable. Nous avons

$$\int_{S_2} \Delta\psi\, \overline{S}_{l,m}\, d\sigma = \int_{S_2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\psi \right) \overline{S}_{l,m}\, d\sigma,$$

mais comme

$$\int_{S_2} \Delta_{S_2}(\psi)\overline{S}_{l,m}\, d\sigma = \int_{S_2} \psi\, \Delta_{S_2}(\overline{S}_{l,m})\, d\sigma,$$

$$\int_{S_2} \Delta\psi\, \overline{S}_{l,m}\, d\sigma = \int_{S_2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\psi \right] S_{l,m}\, d\sigma$$

$$= \frac{d^2}{dr^2} R_{l,m} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} R_{l,m} - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{l,m}.$$

Si φ vérifie l'équation (I), alors $R_{l,m}(r)$ vérifie l'équation (II)

$$\frac{d^2}{dr^2} R_{l,m} + \frac{2}{r}\frac{dR_{l,m}}{dr} + \left(\frac{1}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \lambda \right) R_{l,m} = 0;$$

d'autre part, $\varphi \in \mathcal{H}_{R^3}$, donc

$$\int_{R^3} |\varphi|^2\, dx\, dy\, dz = \int_0^{+\infty} r^2 \left(\int_{S_2} |\psi|^2\, d\sigma \right) dr,$$

or

$$|R_{l,m}(r)|^2 = \left| \int_{S_2} \psi S_{l,m}\, d\sigma \right|^2 \leq \int_{S_2} |\psi|^2\, d\sigma \int_{S_2} |S_{l,m}|^2\, d\sigma = \int_{S_2} |\psi|^2\, d\sigma,$$

donc

$$\int_0^{+\infty} r^2 |R_{l,m}(r)|^2\, dr \leq \int_0^{+\infty} r^2 \left(\int_{S_2} |\psi|^2\, d\sigma \right) dr = \int_{R^3} |\varphi|^2\, dx\, dy\, dz.$$

Donc $rR_{l,m}(r)$ *doit être de carré sommable de* 0 à $+\infty$. Cherchons les solutions de (II) qui vérifie cette condition : (II) est du type de Fuchs et son équation caractéristique est

$$\alpha(\alpha - 1) + 2\alpha - l(l+1) = 0$$

qui a pour solution

$$\alpha = l \qquad \text{et} \qquad \alpha = -(l+1),$$

Il y a donc une solution qui s'écrit $r^l E(r)$ [avec $E(0) \neq 0$], où $E(r)$ est une fonction entière et la solution générale est

$$k_1 \left[\frac{F(r)}{r^{l+1}} + G(r)\,\mathrm{Log}(r) \right] + k_2 r^l E(r),$$

avec $F(0) \neq 0$, $F(r)$ et $G(r)$ (3) étant développable en série entière à l'origine. Donc, si $l \neq 0$, $R_{l,m}(r)$ ne peut être (à une constante multiplicative près) ou qu'égale à la solution régulière $r^l E(r)$ que nous désignerons dans la suite

(3) $G(r)$ étant, éventuellement, identiquement nulle.

par $R_l(r)$ ou bien identiquement nulle. Si $l=0$, $R_{0,0}(r)$ peut être *a priori* n'importe laquelle des solutions de (II). Nous désignerons par $R_0(r)$ la solution régulière à l'origine et $R_0^1(r)$ une *autre* solution (non $\equiv 0$).

Posons

$$Z_l(r)=r^{l+1}R_l(r), \qquad Z_0^1(r)=rR_0^1(r)$$

qui est bornée à l'origine; $Z_l(r)$ et $Z_0^1(r)$ vérifient alors l'équation (III)

$$r\frac{d^2}{dr^2}Z_l-2l\frac{dZ_l}{dr}+(1-\lambda r)Z_l=0.$$

Utilisation de la transformation de Laplace. — L'intégrale de Laplace

$$s_l(t)=\int_0^{\infty} e^{-rt}Z_l(r)\,dr \qquad \text{ou} \qquad s_0^1(t)=\int_0^{\infty} e^{-rt}Z_0^1(r)\,dr$$

existe, si t est complexe de partie réelle $\mathcal{R}(t)>0$, à condition que $rR_l(r)$, où $rR_0^1(r)$ soit de carré sommable. De même $\int_0^{\infty} e^{-rt}r^pZ_l(r)\,dr$, où $\int_0^{\infty} e^{-rt}r^pZ_0^1(r)\,dr$ existe quel que soit p; $s_l(t)$ et $s_0^1(t)$ sont alors holomorphes pour $\mathcal{R}(t)>0$.

Comme

$$Z_l(r)=r^{l+1}R_l(r), \qquad T_l(t)=\int_0^{\infty} rR_l(r)\,e^{-rt}\,dr$$

est une primitive $l^{\text{ième}}$ de $s_l(t)$. Si $rR_l(r)$, où $R_0^1(r)$ est de carré sommable, le prolongement sur l'axe imaginaire de $T_l(t)$ ou de $s_0^1(t)$, fonction holomorphe pour $\mathcal{R}(t)>0$, *doit être de carré sommable sur l'axe imaginaire* [V].

Dans les mêmes hypothèses, puisque $R_l(r)$ ou $R_0^1(r)$ vérifie l'équation (II),

$$\int_0^{\infty}\left(r\frac{d^2Z_l}{dr^2}-2l\frac{dZ_l}{dr}\right)e^{-rt}\,dr,$$

ainsi que

$$\int_0^{\infty} r\frac{d^2Z_0^1}{dr^2}e^{-rt}\,dr$$

existent et sont égales respectivement à

$$\int_0^{\infty}(\lambda r-1)\,e^{-rt}Z_l\,dr \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\infty}(\lambda r-1)\,e^{-rt}Z_0^1\,dr.$$

Nous avons, en intégrant par partie, A étant un nombre positif

$$\int_0^{A}\left(r\frac{d^2Z_l}{dr^2}-2lr\frac{dZ_l}{dr}\right)e^{-rt}\,dr$$
$$=\left[\left\{r\frac{dZ_l}{dr}+[rt-(2l+1)]Z_l\right\}e^{-rt}\right]_0^{A}+t^2\int_0^{A}rZ_l\,e^{-rt}\,dr-2(l+1)t\int_0^{A}Z_l\,e^{-rt}\,dr$$

donc si $A \to +\infty$, puisque les intégrales existent.

$$\left\{ r\frac{dZ_l}{dr} + [rt - (2l+1)]Z_l \right\} e^{-rt}$$

a une limite finie $L(t)$ à l'infini.

Posons $t = t_0 + h$, $\mathcal{R}(t) > 0$, $h > 0$: comme

$$\left[r\frac{dZ_l}{dr} + [rt_0 - (2l+1)]Z_l \right] e^{-rt_0} \to L(t_0),$$

nous voyons que

$$\left[r\frac{dZ_l}{dr} + rt_0 - (2l+1)Z_l \right] e^{-rt_0} e^{-rh} \to 0,$$

donc que $r^h Z_l e^{-rt}$ tend vers une limite finie et comme cette expression peut s'écrire $Z r^h e^{-rt_0} e^{-rh}$ cette limite est nulle. Donc

$$\left\{ r\frac{dZ_l}{dr} + [rt - (2l+1)]Z_l \right\} e^{-rt} \to 0 \qquad \text{si} \quad r \to +\infty.$$

Nous avons donc

$$\int_0^{+\infty} \left(r\frac{d^2 Z_l}{dr^2} - 2lr\frac{dZ_l}{dr} \right) e^{-rt}\, dr$$
$$= -\left\{ r\frac{dZ_l}{dr} + [rt - (2l+1)]Z_l \right\}_0 - t^2 \int_0^{+\infty} r Z_l e^{-rt}\, dt - 2(l+1)t \int_0^{+\infty} e^{-rt} Z_l\, dr.$$

Le calcul que nous venons de faire est valable pour Z_0^1. Pour la valeur $r = 0$, l'expression intégrée est nulle pour Z_l [qui est égal à $r^{l+1}E(r)$], n'est pas nulle pour Z_0^1 [qui est égale à $F(r) + rG(r)\operatorname{Log}(r)$] mais est égale à $-2F(0)$, avec $F(0) \neq 0$ (*).

Donc finalement

$$\int_0^{+\infty} \left[r\frac{d^2}{dr^2}(Z_l) - 2lr\frac{d}{dr}Z_l + (1 - \lambda r)Z_l \right] e^{-rt}\, dr$$
$$= (t^2 - \lambda) \int_0^{+\infty} r Z_l e^{-rt}\, dr + [1 - 2(l+1)t] \int_0^{+\infty} Z_l e^{-rt}\, dr$$

et

$$\int_0^{+\infty} \left[r\frac{d^2 Z_0^1}{dr^2} + (1 - \lambda r)Z_0^1 \right] e^{-rt}\, dr$$
$$= -2F(0) + (t^2 - \lambda) \int_0^{+\infty} r Z_0^1 e^{-rt}\, dr + (1 - 2t) \int_0^{+\infty} Z_0^1 e^{-rt}\, dr;$$

les intégrales s'expriment à l'aide de $s_l(t)$, $s_l'(t)$, $[s_0^1(t)$, $s_0^{1\prime}(t)]$; donc $s_l(t)$

(*) Si l'on impose aux fonctions cherchées d'*être bornées*, cette solution disparaît étant donné sa singularité à l'origine.

et $s_0^1(t)$ vérifient les équations (IV) et (IV_0) respectivement

$$(t^2-1)\frac{ds_l}{dt}+[2(l+1)t-1]s_l=0,$$

$$(t^2-1)\frac{ds_0^1}{dt}+(2t-1)s_0^1=1$$

(en choisissant convenablement la constante multiplicative) et si $R_l(r)$ et $R_0^1(r)$ conviennent, $s_l(t)$ et $s_0^1(t)$ doit être holomorphe pour $\mathcal{R}(t)>0$ et une de leur primitive $l^{\text{ième}}$ a un prolongement à l'axe imaginaire de carré sommable sur cet axe. Étudions les singularités des solutions (IV) et (IV_0). Il faut discuter suivant le signe de λ.

1° $\lambda<0$, $\lambda=-k^2$, $k>0$:

$$(t^2+k^2)\frac{ds_l}{dt}+[2(l+1)t-1]s_l=0,$$

$$(t^2+k^2)\frac{ds_0^1}{dt}+(2t-1)s_0^1=1.$$

singularité possible en $t=ik$ et $t=-ik$. On pose $t=ik+h$, les équations deviennent

$$(h+2ik)h\frac{ds_l}{dh}+[2(l-1)h+2(l+1)ik-1]s_l=0,$$

$$(h+2ik)h\frac{ds_0^1}{dt}-(2h+2ik-1)s_0^1=1.$$

Pour l'équation homogène, on cherche un développement du type

$$h^\alpha[a_0+a_1h-\ldots+a_nh^n+\ldots]=s_l(t).$$

On trouve

$$a_0[2(l+1)ik-1]+2ik\alpha a_0=0, \qquad \text{donc} \quad \alpha=\frac{1}{2ik}-(l+1)$$

et la relation de récurrence

$$(2ikn+1)a_n-\left(l-n-\frac{1}{2ik}\right)a_{n-1}=0$$

qui définit un développement convergent au voisinage de $h=0$, les $l^{\text{èmes}}$ primitives s'écrivent donc

$$h^{\frac{1}{2ik}}\left[\frac{b_0}{h}+b_1+\ldots+b_nh^n+\ldots\right]+Q_{l-1}(h),$$

où $Q_{l-1}(h)$ est un polynome de degré $l-1$, $b_0\neq 0$ quelle que soit la détermination choisie pour $h^{\frac{1}{2ik}}$; pour $\mathcal{R}(t)>0$ le module de cette fonction n'est pas de *carré sommable sur l'axe imaginaire* au voisinage de $t=ik$. Donc $R_l(r)$ ne vérifiant pas toutes les conditions imposées à $R_{l,m}(r)$,

$$R_{l,m}(r)=0 \qquad \text{si} \quad l<0.$$

Cherchons à l'équation (IV_0) un développement régulier en $h=0$

$$s_0^1(t)=a_0+a_1h+\ldots+a_nh^n+\ldots.$$

Nous avons

$$a_0[2ik-1]=1, \qquad a_0=\frac{1}{2ik-1}$$

et la relation de récurrence

$$[2ik(n+1)-1]a_n+(n+1)a_{n-1}=0$$

qui définit un développement convergent pour $|h|<2k$. Il y a donc une solution régulière pour (IV_0), les autres étant singulières avec la même singularité que les solutions de l'équation homogène. Mais cette solution régulière en $t=ik$ n'ayant pas un rayon de convergence infini est singulière en $t=-ik$ et comme les deux pôles jouent des rôles symétriques, a la même singularité en $t=-ik$ que les solutions de l'équation homogène. Donc $s_0^1(t)$ ne peut vérifier les conditions imposées. Donc $R_{0,0}(r)=0$ également.

2° $\lambda=0$; les équations s'écrivent :

$$t^2\frac{ds_l}{dt}+[2(l+1)t-1]s_l=0,$$

$$t^2\frac{ds_0^1}{dt}+(2t-1)s_0^1=1.$$

L'équation homogène a pour solution

$$\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2(l+1)}}=s_l(t).$$

On peut montrer par récurrence que $s_l(t)$ est la $(2l+1)^{\text{ième}}$ dérivée de $e^{-\frac{1}{t}}t^{2l}$, d'où il résulte que les $l^{\text{èmes}}$ primitives de $s_l(t)$ s'écrivent :

$$\frac{d^{l+1}}{dt^{l+1}}\left(e^{-\frac{1}{t}}t^{2l}\right)+Q_{l-1}(t) \quad \text{(polynome de degré } l-1).$$

Or, par récurrence également, on montre que $\frac{d^p}{dt^p}\left(e^{-\frac{1}{t}}t^{2l}\right)=t^{2(l-p)}P_p(t)$, où $P_p(t)$ est un polynome qui ne s'annule pas pour $t=0$, d'où

$$T_l(t)=\frac{e^{-\frac{1}{t}}P_{l+1}(t)}{t^2}+Q_{l-1}(t), \qquad \text{où} \quad P_{l+1}(0)\neq 0.$$

Cette fonction n'est pas de carré sommable au voisinage de l'origine sur l'axe imaginaire. Donc $R_{l,m}(r)=0$ si $l\neq 0$. L'équation non homogène a pour solution :

$$\left(\int e^{\frac{1}{t}}dt\right)\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}, \qquad [\mathcal{R}(t)>0].$$

Si C est un cercle de rayon $\rho > 0$, entourant l'origine

$$\int_C e^{\frac{1}{t}} dt = 2i\pi.$$

D'autre part dans la région $\mathcal{R}(t) \leq 0$, $e^{\frac{1}{t}}$ reste bornée et si C_2 est le demi-cercle de C dans la région $\mathcal{R}(t) \leq 0$, $\int_{C_2} e^{\frac{1}{t}} dt \to 0$, avec ρ; donc

$$\int_{C_1} e^{\frac{1}{t}} dt \to 2i\pi,$$

si C_1 est le demi-cercle dans la région $\mathcal{R}(t) > 0$. D'autre part sur l'axe imaginaire $e^{\frac{1}{t}}$ est sommable au voisinage de l'origine. Donc si $y = -\rho \to 0$, une primitive quelconque de $e^{\frac{1}{t}}$ tend vers une limite finie A [limite de $A(y) = A(-\rho)$, valeur de cette primitive pour $y = -\rho$]. Nous devons prendre la primitive holomorphe pour $\mathcal{R}(t) \geq 0$, donc

$$A(\rho) = A(-\rho) + \int_{C_1} e^{\frac{1}{t}} dt$$

[$A(\rho)$, valeur de la primitive pour $y = \rho$], donc

$$A(\rho) \to A - 2i\pi.$$

Donc aucune solution de (IV_0) n'est de carré sommable au voisinage de l'origine sur l'axe imaginaire, puisque pour $y = \rho$ elle a la valeur

$$[A(\rho) + 2i\pi] \frac{e^{\frac{i}{\rho}}}{\rho},$$

et pour $y = -\rho$ la valeur

$$[A(-\rho)] - \frac{e^{-\frac{i}{\rho}}}{\rho},$$

A et $A + 2i\pi$ ne pouvant être nuls à la fois. Donc si $\lambda = 0$, $R_{0,0}(r) = 0$.

3° $\lambda > 0$; les équations sont, si l'on pose $\sqrt{\lambda} = k$,

$$(t^2 - k^2) \frac{ds_l}{dt} + [2(l+1)t - 1] s_l = 0,$$

$$(t^2 - k^2) \frac{ds_0^1}{dt} + (2t - 1) s_0^1 = 1.$$

Comme $s_l(t)$ ou $s_0^1(t)$ doivent être holomorphes, pour $t = k$ le point $t = k$ doit être régulier et une solution doit avoir un développement convergent du type $h^p[a_0 + \ldots + a_n h^n + \ldots]$ au voisinage de $h = 0$ si $t = k + h$, p entier ≥ 0.

Les équations s'écrivent :

$$(2k+h)h\frac{ds_l}{dt}+[2(l+1)h+2(l+1)k-1]s_l=0,$$

$$(2k+h)h\frac{ds_0^1}{dt}+(2h+2k-1)s_0^1=1.$$

Pour l'équation homogène, nous avons

$$a_0[2(l+1)k-1)+2pka_0=0, \qquad \text{donc} \quad 2(l+1+p)k-1=0,$$

c'est-à-dire

$$k=\frac{1}{2n}, \qquad \text{où} \quad n=l+p+1 \qquad (n\geq l+1).$$

Donc il *faut* que

$$\lambda=\frac{1}{4n^2}, \qquad n\geq 1 \qquad \text{et} \qquad l\leq n-1$$

pour que $R_l(r)$ satisfasse aux conditions imposées. Donc si $\lambda\neq\frac{1}{4n^2}$,

$$R_{l,m}(r)\equiv 0 \qquad \text{pour} \quad l\neq 0;$$

si $\lambda=\frac{1}{4n^2}$ et $l\geq n-1$,

$$R_{l,m}(r)=0,$$

mais si $l\leq n-1$, *il est possible* a priori *que*

$$R_{l,m}(r)=R_l(r),$$

solution *régulière* de (II) à l'origine.

Pour l'équation non homogène, la solution régulière si elle existe, doit s'écrire

$$a_0+a_1h+\ldots+a_nh^n+\ldots,$$

ce qui donne

$$a_0=\frac{1}{2k-1}$$

et la relation de récurrence

$$[2(n+1)k-1]a_n+(n+1)a_{n-1}=0$$

qui donne en général un développement convergent, non identiquement nul, à moins que le coefficient d'un a_n soit nul, c'est-à-dire $k=\frac{1}{2n}$ pour un $n\geq 1$, car alors a_0 devrait être nul, ce qui est impossible d'après (IV_0). Donc si $k=\frac{1}{2n}$, c'est-à-dire $\lambda=\frac{1}{4n^2}$, $R_{0,0}(r)$ ne peut être égale à $R_0^1(r)$. *Au contraire*, si $\lambda\neq\frac{1}{4n^2}$,

$$R_{l,m}(r)=0, \qquad \text{si} \quad l\neq 0,$$

mais $R_{0,0}(r)$ peut être égale à une solution $R_0^1(r)$ *a priori* (qui, d'après ce que

nous voyons, est *unique* à une constante multiplicative près en remplaçant le nombre 1 au deuxième membre de (IV_0) par une constante quelconque).

Réciproque. — Les propriétés de la transformation de Laplace nous permettent d'affirmer que si $\lambda = \frac{1}{4n^2}$, l'équation (II) a alors pour $l \geqq 0$ sa solution régulière à l'origine qui est à décroissance rapide à l'infini, donc convient effectivement pour $R_{l,m}(r)$ et pour $l = 0$, $\lambda \neq \frac{1}{4n^2}$ une solution non régulière à l'origine qui est à décroissance rapide et qui convient pour $R_{0,0}(r)$. Mais nous allons le voir en explicitant effectivement ces solutions.

Calcul des solutions. — Si $\lambda = \frac{1}{4n^2}$, $s_l(t)$ est solution de

$$\left(t^2 - \frac{1}{4n^2}\right)\frac{ds_l}{dt} + [2(l+1)t - 1]s_l = 0,$$

ce qui donne

$$s_l(t) = \frac{\left(t - \frac{1}{2n}\right)^{n-l-1}}{\left(t + \frac{1}{2n}\right)^{n+l+1}}$$

si $\lambda \neq \frac{1}{4n^2}$, $s_0^1(t)$ est solution de

$$(t^2 - k^2)\frac{ds_0^1}{dt} - (2t - 1)s_0^1 = 1,$$

ce qui donne $s_0^1(t)$ de la forme

$$\left[\int \left(\frac{t-k}{t+k}\right)^{-\frac{1}{2k}} dt\right]\left(\frac{t-k}{t+k}\right)^{\frac{1}{2k}} \frac{1}{t^2 - k^2},$$

une de ces primitives étant régulière en $t = k$. Désignons dans ce qui suit $s_l(t)$ ou $s_0^1(t)$ par $s(t)$. On voit que $s(t)$ possède une primitive $l^{\text{ième}}$ $T(t)$ de carré sommable sur l'axe imaginaire, que $s'(t)$, $ts''(t)$, $t^2 s'''(t)$ sont sommables sur cet axe. Dans ces conditions, si l'on pose

$$Z(r) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{rt} s(t)\, dt,$$

on a

$$\frac{Z(r)}{r^l} = (-1)^l \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{rt} T(t)\, dt$$

et

$$Z(r) = -\frac{1}{r}\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{rt} s'\, dt = \frac{1}{r^2}\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{rt} s''\, dt = -\frac{1}{r^3}\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{rt} s'''\, dt$$

et

$$Z'(r) = \frac{2}{r^2}\int_{-i\infty}^{+i\infty} s'\, e^{rt}\, dt + \frac{1}{r^2}\int_{-i\infty}^{+i\infty} ts''\, e^{rt}\, dt,$$

$$rZ''(r) = -\frac{6}{r^2}\int_{-i\infty}^{+i\infty} s'\, e^{rt}\, dt - \frac{6}{r^2}\int_{-i\infty}^{+i\infty} s''\, t\, e^{rt}\, dt - \frac{1}{r^2}\int_{-i\infty}^{+i\infty} t^2 s'''\, e^{rt}\, dt$$

(obtenus par dérivation sous le signe somme et intégration par partie). Donc

$$rZ'' - 2lZ' + (1-\lambda r)Z = -\frac{1}{r^2}\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{rt}\{(t^2-\lambda)s''' + [2(l+3)t-1]s'' + 2(2l+3)s\}\,dt.$$

Or le crochet peut s'obtenir en dérivant deux fois le premier membre de l'équation (IV) ou (IV_0), il est donc identiquement nul. Donc Z vérifie l'équation (III). $\frac{Z}{r_l}$ est de carré sommable comme *transformée de Fourier* de $T(iy)$ qui est de carré sommable comme fonction de y. Donc

$$Z = Z_{l,m}\left(R_{l,m} = \frac{Z}{r^{l+1}}\right) \quad \text{si} \quad \begin{cases} l \leq n-1, \\ \lambda = \frac{1}{4n^2}; \end{cases}$$

$$Z = Z_{0,0}(r) = rR_{0,0}(r) \quad \text{si} \quad \lambda \neq \frac{1}{4n^2}$$

(tout ceci a une constante multiplicative près).

Utilisons les fonctions de Laguerre

$$\mathcal{L}_{p,q}(kr) = k^{q-1}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\left(\frac{t-k}{t+k}\right)^p \frac{e^{rt}\,dt}{(t+k)^q};$$

$\mathcal{L}_{p,q}(kr)$ s'obtient par un calcul de résidu immédiat et l'on a

$$\mathcal{L}_{p,q}(kr) = 2i\pi e^{-kr}(kr)^{q-1}\left[\frac{1}{(q-1)!} + \ldots + \frac{C_p^{\mu}(-2kr)^{\mu}}{(q+\mu-1)!} + \ldots + \frac{(-2kr)^p}{(p+q-1)!}\right].$$

On peut remarquer qu'à une constante près

$$\mathcal{L}_{p,q}(r) = e^r \frac{d^p}{dr^p}(e^{-2r}r^{p+q-1}).$$

Posons

$$\mathcal{L}_{p,q}(r) = 2i\pi e^{-kr}(kr)^{q-1}L_{p,q}(kr),$$

où

$$L_{p,q}(r) = \left[\frac{1}{(q-1)!} + \ldots + \frac{(-2r)^p}{(p+q-1)!}\right]$$

est un polynome de Laguerre (de degré p).

Alors

$$Z_{l,m} = \mathcal{L}_{n-(l+1),2l+1}\left(\frac{r}{2n}\right) = 2i\pi e^{-\frac{r}{2n}}\left(\frac{r}{2n}\right)^{2l+1} L_{n-(l+1),2l+1}\left(\frac{r}{2n}\right)$$

et

$$R_{l,m}(r) = e^{-\frac{r}{2n}} r^l L_{n-(l+1),2(l+1)}\left(\frac{r}{2n}\right) \quad (^3) \qquad \text{si} \quad l \leq n-1$$

(3) A une constante près.

et l'on constate que $rR_{l,m}(r)$ est bien de carré sommable de o à l'infini; $s_0^1(t)$ est la solution de

$$(t^2-k^2)\frac{ds}{dt}+(2t-1)s=1$$

qui est holomorphe pour $t=k$. Posons $\frac{t-k}{t+k}=u$; l'équation devient

$$2ku(1-u)\frac{ds}{du}+[(2k+1)u+2k-1]s=1-u$$

et cherchons une solution du type

$$a_0+a_1u+\ldots+a_nu^n+\ldots.$$

ce qui donne

$$a_0=\frac{1}{2k-1},\qquad a_1=\frac{-1}{(2k-1)(4k-1)},\qquad a_2=\frac{4k}{(2k-1)(4k-1)(6k-1)}$$

et la formule de récurrence

$$a_n[2(n+1)k-1]=a_{n-1}[2(n-2)k-1],$$

donc

$$a_n=\frac{4k}{[2(n-1)k-1](2nk-1)[2(n+1)k-1]}.$$

Le développement est donc uniformément convergent pour $|u|\leq 1$, c'est-à-dire pour $\mathcal{R}(t)\geq 0$, puisque la série de terme $|a_n|$ converge, donc la fonction ainsi représentée est holomorphe en $t=k$. On a

$$s_0^1(t)=a_0+\ldots+a_n\left(\frac{t-k}{t+k}\right)^n+\ldots.$$

Étant donné la convergence uniforme de la série des dérivées ($n|a_n|$ converge), on a

$$s_0^{1\prime}(t)=2k\left[\frac{a_1}{(t+k)^2}+\ldots+na_n\left(\frac{t-k}{t+k}\right)^{n-1}\frac{1}{(t+k)^2}+\ldots\right]$$

et (A étant une constante >0).

$$-r\int_{-iA}^{+iA}s_0^1(t)\,e^{rt}\,dt=\int_{-iA}^{+iA}s_0^{1\prime}(t)\,e^{rt}\,dt$$
$$=2k\left[a_1\int_{-iA}^{iA}\frac{e^{rt}\,dt}{(t+k)^2}+\ldots+na_n\int_{-iA}^{+iA}\left(\frac{t-k}{t+k}\right)^n\frac{e^{rt}\,dt}{(t+k)^2}+\ldots\right].$$

Mais

$$\left|\int_{-iA}^{+iA}\left(\frac{t-k}{t+k}\right)^n\frac{e^{rt}\,dt}{(t+k)^2}\right|\leq\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{y^2+k^2},$$

donc la série précédente converge uniformément par rapport à A et r. Donc

$$rZ_0^1(r)=-2[a_0\mathcal{L}_{0,2}(kr)+\ldots+na_n\mathcal{L}_{n-1,2}(kr)+\ldots],$$

la convergence étant uniforme. Ce qui donne

$$Z_0^1(r) = -2e^{-kr}[a_0 L_{0,2}(kr) + \ldots + na_n L_{n-1,2}(kr) + \ldots],$$

expression de $Z_0^1(r)$ en fonction des polynomes de Laguerre. Or il est facile de voir que les fonctions $\mathcal{L}_{n,2}(kr)$ pour $n \geq 0$ forment un système orthogonal dans l'espace des fonctions de carré sommable de 0 à $+\infty$ avec la mesure $\frac{dr}{r}$ (6). Le carré de leur module tend vers zéro si $n \to +\infty$, et comme

$$\sum_1^n n^2 |a_n|^2 < +\infty,$$

cela prouve que $r|Z_0^1(r)|^2$ est sommable avec la mesure de Lebesgue; donc $Z_0^1(r)$ est de carré sommable puisqu'elle est bornée à l'origine.

Retour à l'équation $\Delta\psi + \frac{\psi}{r} = \lambda\psi$. — Si ψ est une solution de carré sommable, on a vu que

$$R_{l,m}(r) = \int_{S_2} \psi \bar{S}_{l,m}\, d\sigma = 0 \quad \text{si} \quad \lambda \leq 0$$

quel que soit l et m; comme les $S_{l,m}$ forment un système orthonormal complet dans $\mathcal{H}_{S_2}$, cela entraîne que $\psi(r, \theta, \omega) = 0$ en θ et ω quel que soit r. Donc que $\psi = \varphi = 0$. Il n'y a pas de solutions non identiquement nulles. Si $\lambda = \frac{1}{4n^2}$,

$$R_{l,m}(r) = \int_{S_2} \psi \bar{S}_{l,m}\, d\sigma = 0 \qquad \text{si} \quad l > n-1.$$

Il en résulte donc que

$$\psi = \sum_{\substack{l \leq n-1 \\ |m| \leq l}} R_{l,m}(r) S_{l,m}(\theta, \omega) \quad \text{(somme finie)}$$

et

$$R_{l,m}(r) = k_{l,m} e^{-\frac{r}{2n}} r^l L_{n-(l+1),2(l+1)}\left(\frac{r}{2n}\right),$$

donc

$$\psi = e^{-\frac{r}{2n}} \sum_{l \leq n-1} r^l L_{n-(l+1),2l+1}\left(\frac{r}{2n}\right)\left(\sum_{|m| \leq l} k_{l,m} S_{l,m}\right),$$

$k_{l,m}$ = const. dépendant de l et m.

(6) On a en effet

$$\mathcal{L}_{n,2}(kr) = \frac{2i\pi k}{(n+1)!} e^{+kr} \frac{d^n}{dr^n}(e^{-2kr} r^{n+1}).$$

Par intégration par partie, on voit que

$$\int_0^\infty \mathcal{L}_{n,2}(kr)\mathcal{L}_{n',2}(kr)\frac{dr}{r} = 0 \qquad \text{si} \quad n \neq n',$$

$$= \frac{\pi^2}{n+1} \qquad \text{si} \quad n = n'.$$

Si $\lambda \neq \frac{1}{4n^2}$, $R_{l,m}(r) = 0$, si $l > 0$ et $R_{0,0}(r) = R_0^1(r)$ trouvée plus haut. *Donc la fonction ψ se réduit à cette fonction.*

Ce sont bien des solutions de (I). Il suffit de montrer que les fonctions

$$\psi_{l,m}(r, \theta, \omega) = R_{l,m}(r) S_{l,m}(\theta, \omega) \quad \text{et} \quad R_0^1(r)$$

sont solutions [ou plus exactement que $\varphi_{l,m}(x, y, z) = \psi_{l,m}(r, \theta, \omega)$ sont solutions]

$$\Delta[R_{l,m}(r) S_{l,m}(\theta, \omega)] = \Delta[R_{l,m}(r)] S_{l,m} + \frac{R_{l,m}}{r^2} \Delta_{S_2}(S_{l,m})$$

$$= \left[\frac{d^2}{dr^2}(R_{l,m}) + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} R_{l,m} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] S_{l,m},$$

donc

$$H(\varphi_{l,m}) = \lambda \varphi_{l,m}$$

car

$$H(\varphi_{l,m}) - \lambda \varphi_{l,m} = \left[\frac{d^2}{dr^2} R_{l,m} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} R_{l,m} + \left(\frac{1}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \lambda\right) R_{l,m}\right] S_{l,m} = 0.$$

Les fonctions

$$\psi_{l,m} = e^{-\frac{r}{2n}} r^l L_{n-(l+1),2(l+1)}\left(\frac{r}{2n}\right) S_{l,m}$$

sont les fonctions d'ondes classiques. Or $r^l S_{l,m}$ est un polynome homogène harmonique de degré l, soit $P_{l,m}(x, y, z)$. Les autres polynomes harmoniques sont des combinaisons de ceux-ci. Donc la solution générale de

$$\Delta\varphi + \frac{2}{r} = \frac{1}{4n^2}\varphi$$

s'écrit

$$\varphi_n(x, y, z) = e^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2n}} \sum_{l \leq n-1} L_{n-(l+1),2(l+1)}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2n}\right) P_l(x, y, z);$$

$P_l(x, y, z)$ polynome harmonique homogène de degré l.

Nous remarquerons que $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}$ n'existe à l'origine que si $l > 0$, que $\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2}$ n'existe que si $l > 1$ et que si $l > 0$, cette quantité *devient infinie*.

Conclusion. — H possède alors une infinité continue de valeurs propres, ce qui est incompatible avec le fait qu'il est *hermitique*. Donc sur le domaine D_0 des fonctions φ deux fois continuement dérivables, sauf peut-être à l'origine et celles que $H(\varphi)$ sont de carré sommable l'opérateur n'est pas hermitique. On peut voir immédiatement que si l'on restreint D_0 au domaine $D_1 \subset D_0$ tel que l'on ait

$$\int_{R^3} e^{-rt}\, \overline{H(\varphi)}\, dx\, dy\, dz = \int_{R^3} H(e^{-rt})\, \bar{\varphi}\, dx\, dy\, dz,$$

les fonctions propres pour λ *quelconque* > 0, disparaissent (hermiticité avec e^{-rt}, $\mathcal{R}(t) > 0$ et $\varphi \in D_1$). Étant donné que H est à coefficient réel, la condition peut aussi bien s'écrire

$$\int_{R^3} e^{-rt} H(\varphi)\, dx\, dy\, dz = \int_{R^3} H(e^{-rt})\, \varphi\, dx\, dy\, dz.$$

Reprenons le calcul qui nous a permis d'écrire les équations (IV) et (IV_0) dans le cas $l = 0$

$$\int_0^{+\infty} \left(r \frac{d^2 Z_0}{dr^2} + Z_0 \right) e^{-rt}\, dr = \int_0^{+\infty} \left(r^2 \frac{d^2 R_0}{dr^2} + 2r \frac{dR_0}{dr} + r R_0 \right) e^{-rt}\, dr$$

$$= \int_0^{+\infty} H(R_0)\, e^{-rt} r^2\, dr = \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} H(R_0)\, e^{-rt}\, dx\, dy\, dz,$$

donc s'il y a hermiticité

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} R_0\, H(e^{-rt})\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^{+\infty} r^2 R_0 \left[t^2 e^{-rt} - \frac{2t}{r} e^{-rt} + \frac{e^{-rt}}{r} \right] dr = \int_0^{+\infty} r Z_0 \left[t^2 e^{-rt} - \frac{2t}{r} e^{-rt} + \frac{e^{-rt}}{r} \right] dr,$$

c'est-à-dire

$$= -t^2 s_0' - (2t - 1) s_0$$

qui doit être égal à

$$\lambda \int_0^{+\infty} r Z_0\, e^{-rt}\, dr = -\lambda s_0'.$$

On a donc l'équation (IV) et jamais de terme au deuxième membre [jamais (IV_0)], ce qui fait disparaître les solutions $\varphi_\lambda = R_0^1(r)$ (7).

Mais comme nous le verrons, même si l'opérateur H est rendu hermitique par cette condition, l'ensemble des fonctions propres classiques ne constitue pas un système orthonormal complet dans $\mathcal{H}_{R^3}$ et nous ne savons pas *a priori* si H prolongé par sa fermeture est autoadjoint.

Nous nous proposons dans la suite de donner à l'opérateur H une définition précise telle qu'il soit autoadjoint. Nous verrons qu'il n'a pas alors comme fonctions propres les fonctions déjà connues et que ce système n'est pas complet. H a alors un *spectre continu, spectre dont l'existence n'était pas assurée* si H n'était pas autoadjoint.

DEUXIÈME PARTIE.

Opérateurs différentiels a coefficients constants dans $\mathcal{H}_{R^n}$.

Pour préparer la suite, qui est l'étude de l'opérateur H, indiquons une façon

(7) Que nous désignerons par « famille abhérente ».

de définir les opérateurs différentiels hermitiques à coefficients constants dans $\mathcal{H}_{R^n}$.

Un opérateur différentiel à coefficients constants est dit hermitique s'il s'écrit

$$\sum_{p'\leq p_0} A_p i^{|p|} \frac{D^p}{DX^p},$$

avec les notations de L. Schwartz [IV] : p, indice de dérivation $(p_1, \ldots, p_n)$,

$$|p| = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$$

les p_i étant des entiers ≥ 0,

$$\frac{D^p}{DX^p} = \frac{\partial^{p_1+p_2+\ldots+p_n}}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n}},$$

les A_p étant des constantes réelles.

Le domaine D_0 sera l'espace $\mathcal{S}_{R^n}$ de Scharwtz [IV] des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide à l'infini. Nous avons par intégration par partie si φ et $\psi \in \mathcal{S}_{R^n}$

$$\int_{R^n} \frac{D^p \varphi}{DX^p} \overline{\psi}\, dX = (-1)^{|p|} \int_{R^n} \varphi \frac{D^p \overline{\psi}}{DX^p} dX, \qquad (dX = dx_1 \ldots dx_n),$$

donc

$$\int_{R^n} i^{|p|} \frac{D^p \varphi}{DX^p} \overline{\psi}\, dX = \int_{R^n} \varphi \overline{i^{|p|} \frac{D^p \psi}{DX^p}}\, dX,$$

donc

$$\left\langle i^{|p|} \frac{D^p \varphi}{DX^p}, \psi \right\rangle = \left\langle \varphi, i^{|p|} \frac{D^p \psi}{DX^p} \right\rangle$$

et, par conséquent, puisque les A_p sont réels

$$\langle \varphi, A(\psi) \rangle = \langle A(\varphi), \psi \rangle.$$

Donc A est hermitique sur le domaine D_0.

Nous allons chercher son adjoint A^*.

Si $\psi \in \mathcal{H}_{R^n}$, ψ est une distribution de $\mathcal{S}'_{R^n}$ et $A(\psi) \in \mathcal{S}'_{R^n}$ est défini par

$$A(\psi) = \sum_{|p| \leq |p_0|} A_p i^{|p|} \frac{D^p \psi}{DX^p},$$

c'est-à-dire que si $\varphi \in \mathcal{S}_{R^n}$

$$A(\psi)[\overline{\varphi}] = \sum_{|p| \leq |p_0|} i^{|p|} \int_{R^n} (-1)^{|p|} \psi \frac{D^p \varphi}{DX^p} dX;$$

par conséquent,

$$A(\psi)[\overline{\varphi}] = \sum_{|p| \leq |p_0|} \int_{R^n} \psi \overline{i^{|p|} \frac{D^p \varphi}{DX^p}}\, dX = \langle \psi, A(\varphi) \rangle.$$

Passons à l'adjoint A^*.

D'une façon générale, A étant un opérateur linéaire défini dans une partie D_0 dense d'un espace $\mathcal{H}$ de Hilbert, l'adjoint A^* de A est défini sur un élément $\psi \in \mathcal{H}$ si et seulement si à ψ correspond ψ_1 tel que quel que soit $\varphi \in D_0$,

$$\langle \psi, A(\varphi) \rangle = \langle \psi, \psi_1 \rangle;$$

on pose alors

$$A^*(\psi) = \psi_1.$$

Si donc ici $A^*(\psi) = \psi_1$ existe pour la fonction ψ, on a

$$\langle \psi, A(\varphi) \rangle = A(\psi)[\bar{\varphi}] = \langle \psi_1, \varphi \rangle = \int_{R^n} \psi_1 \bar{\varphi} \, d\Lambda$$

quel que soit $\varphi \in \mathcal{S}_{R^n}$. Donc la distribution $A(\psi) = \psi_1 \in \mathcal{H}_{R^n}$.

Réciproquement, supposons que ψ est tel que $A(\psi) \in \mathcal{H}_{R^n}$, $A(\psi) = \psi_1$:

$$\langle \psi, A(\varphi) \rangle = A(\psi)[\varphi] = \langle \psi_1, \varphi \rangle$$

donc A^* est défini sur ψ et $A^*(\psi) = A(\psi)$ (au sens des distributions).

Conclusion. — A^* est défini sur ψ si $A(\psi)$ pris au sens des distributions est une fonction de carré sommable et

$$A^*(\psi) = A(\psi).$$

Montrons que $A^*(\psi)$ est autoadjoint ou, ce qui revient au même, que la fermeture de A est autoadjointe. On sait [III] qu'il faut et qu'il suffit que les équations

$$A^*(\psi) + i\varepsilon\psi = 0 \qquad (\varepsilon = \mp 1)$$

n'aient comme solution dans $\mathcal{H}_{R^n}$ que $\psi = 0$.

Si l'on a

$$A^*(\psi) \mp i\psi = 0,$$

cela veut dire que

$$A(\psi) \mp i\psi = 0,$$

où ψ est considérée comme une distribution. Nous avons donc à résoudre cette équation dans l'espace $\mathcal{S}'_{R^n}$ et à chercher les solutions qui $\in \mathcal{H}_{R^n}$. Comme $\psi \in \mathcal{S}_{R^n}$, nous pouvons faire une transformation de Fourier et poser $\mathcal{F}(\psi) = T$, T distribution de $\mathcal{S}'_{R^n}$, où Y est la variable $Y = (y_1, \ldots, y_n)$. L'équation

$$\sum_{|p| \leq |p_0|} A_p i^{|p|} \frac{D^p \psi}{DX^p} \mp i\psi = 0$$

devient

$$\left(\sum_{|p| \leq p_0|} A_p (2\pi)^{|p|} Y^p \mp i \right) T = 0,$$

où $Y^n = y_1^{n_1} \cdot y_2^{n_2} \cdots y_n^{n_n}$. Ou encore $[P(Y) \pm i]T = 0$, $P(Y)$ un polynome en $y_1, y_2, \ldots, y_n$ à *coefficients réels*. Donc le coefficient de T ne s'annule jamais.

Donc si $\varphi \in \mathcal{S}_{R^n}$, alors

$$\frac{\varphi}{P(Y) \mp i} \in \mathcal{S}_{R^n}$$

et alors

$$[P(Y) \mp i]T\left[\frac{\varphi}{P(Y) \mp i}\right] = T(\varphi) = 0, \qquad \text{donc} \quad T = 0.$$

Il n'y a aucune distribution, sauf la distribution identiquement nulle qui vérifie l'équation. Donc $A^*(\psi) \mp i\psi = 0$ entraîne $\psi = 0$, donc A^* est autoadjoint.

L'opérateur différentiel A autoadjoint est donc défini comme suit : $A^*(\psi)$ au sens autoadjoint existe si et seulement si $A(\psi)$ au sens des distributions est une fonction de carré sommable et les deux expressions de $A(\psi)$ sont égales.

Nous remarquerons que, si ψ possède des dérivées continues jusqu'à l'ordre maximum des dérivées intervenant dans A, $A(\psi)$ existe et est égal à l'expression classique de l'opérateur. Si celle-ci est de carré sommable, ce résultat reste vrai même si certaines dérivées (au sens classique) ont des points singuliers à la seule condition que les formules d'intégration par partie qui assurent l'hermiticité de A soient valables (et à condition naturellement que l'expression finale soit de carré sommable).

Nous savons, en outre, que si nous voulons résoudre une équation où intervient A [par exemple l'équation aux fonctions propres $A(\psi) = \lambda\psi$], on pourra résoudre cette équation en la considérant comme une équation dans l'espace $\mathcal{D}'_{R^n}$ des distributions (et même dans $\mathcal{S}'_{R^n}$).

Nous allons définir l'opération $H = \Delta + \frac{1}{r}$ dans $\mathcal{H}_{R^3}$ d'une façon analogue.

Domaine initial. — Nous posons que H est défini et égal à son expression classique sur l'espace $\mathcal{S}_{R^3}$ qui sera le domaine D_0 : si $\varphi \in \mathcal{S}_{R^3}$, $\Delta\varphi + \frac{\varphi}{r}$ est de carré sommable et H est hermitique sur D_0. En outre, $D_0 = \mathcal{S}_{R^3}$ est dense dans $\mathcal{H}_{R^3}$.

Décomposition de l'opérateur H. — La résolution classique de l'équation $H(\varphi) = \lambda\varphi$ est basée sur la séparation des variables après un passage en coordonnées polaires, séparation qui est due au fait que $\Delta\varphi + \frac{\varphi}{r}$ est un invariant pour le groupe des rotations dont les axes passent par l'origine de R^3. Ce fait se traduit par l'existence d'un système orthogonal de variétés stables pour H (8) supposé défini sur $\mathcal{S}_{R^3}$.

---

(8) Qui sont les variétés propres communes de deux opérateurs permutables avec H, correspondant respectivement aux deux grandeurs physiques : M (moment cinétique de l'électron dans son mouvement autour du noyau) et M_z (projection de ce moment sur un axe fixe).

Les relations

$$x = r\sin\theta\cos\omega,$$
$$y = r\sin\theta\sin\omega,$$
$$z = r\cos\theta$$

(r, θ, ω coordonnées polaires des physiciens), définissent une application $\mathfrak{L}(\mu) = M$ de l'espace $R^+ \times S_2$ sur R^3 (R^+, demi-droite numérique $r \geq 0$; S_2, sphère de rayon 1 centrée à l'origine, θ et ω étant les coordonnées du point courant de S_2) qui est indéfiniment différentiable et biunivoque de $(R^+ - \{0\}) \times S_2$ sur $R^3 - \{0\}$ ($\{0\}$ ensemble constitué par l'origine). A toute fonction

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(M) \in \mathcal{K}_{R^3}$$

correspond la fonction

$$\psi(r, \theta, \omega) = \psi(\mu) = \varphi(r\sin\theta\cos\omega, r\sin\theta\sin\omega, r\cos\theta),$$

c'est-à-dire

$$\psi(\mu) = \varphi[\mathfrak{L}(\mu)];$$

ψ de carré sommable sur $R^+ \times S_2$ avec la mesure $r^2\,dr\sin\theta\,d\theta\,d\omega$, c'est-à-dire $r^2\,dr\,d\sigma$ ($d\sigma$, élément d'aire sur S_2) (d'après la formule de changement de variable). $\psi(r, \theta, \omega)$ est donc *sommable* dans toute région bornée de $R^+ \times S_2$ (toute région où r reste borné). Donc $\psi(r, \theta, \omega)$ est sommable sur S_2 (d'après le théorème de Fubini) pour presque toutes les valeurs de r, donc puisque $S_{l,m}(\theta, \omega)$ (9) est une fonction bornée sur S_2,

$$R_{l,m}(r) = \int_{S_2} \psi S_{l,m}\,d\sigma$$

existe pour presque toutes les valeurs de r.

On considère alors la fonction

$$R_{l,m}(r)\,S_{l,m}(\theta, \omega) = \psi_{l,m}(\mu)$$

définie presque partout sur $R^+ \times S_2$, donc définie presque partout sur $(R^+ - \{0\}) \times S_2$. L'application $\mathfrak{L}^{-1}$ permet d'en déduire une fonction

$$\varphi_{l,m}(x, y, z) = \varphi_{l,m}(M) = \psi_{l,m}[\mathfrak{L}^{-1}(M)]$$

définie presque partout sur $R^3 - \{0\}$, c'est-à-dire sur R^3.

Nous avons vu *dans la première partie* que $R_{l,m}(r)$ est de carré sommable pour $0 \leq r < +\infty$ avec la mesure $r^2\,dr$. Donc $R_{l,m}(r)\,S_{l,m}(\theta, \omega)$ est de carré sommable avec la mesure $r^2\,dr\,d\sigma$, donc $\varphi_{l,m}(x, y, z)$ est de carré sommable dans R^3.

---

(9) $S_{l,m}(\theta, \omega)$ fonction sphérique de la première partie.

Considérons l'opérateur $P_{l,m}$ défini par $P_{l,m}(\varphi) = \varphi_{l,m}$. Il est linéaire, borné, idempotent et hermitique : c'est donc un projecteur.

Il est borné :

$$\| \varphi_{l,m} \|^2 = \int_0^{+\infty} r^2 | R_{l,m} |^2 \, dr,$$

or on a vu que

$$R_{l,m}(r)^2 \leq \int_{S_1} | \psi |^2 \, d\sigma, \qquad \text{donc} \quad \| \varphi_{l,m}(r) \|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^3} | \varphi |^2 \, dx \, dy \, dz = \| \varphi \|^2.$$

Il est idempotent :

$$P_{l,m}(\varphi_{l,m}) = \left[\int_{S_2} R_{l,m} \overline{S}_{l,m} S_{l,m} \, d\sigma \right] S_{l,m} = \varphi_{l,m}.$$

Il est hermitique : Soit φ_1 et $\varphi_2 \in H_R$

$$\langle \varphi_1, P_{l,m}(\varphi_2) \rangle = \int_0^{+\infty} r^2 \left[\int_{S_2} \psi_1 \overline{\psi}_{2,l,m} \, d\sigma \right] dr,$$

$$\psi_{2,l,m} = R_{2,l,m}(r) \, S_{l,m}(\omega) \qquad \text{et} \qquad R_{2,l,m}(r) = \int_{S_2} \psi \overline{S}_{l,m}(\theta_1, \omega_1) \, d\sigma_1,$$

$$\langle \varphi_1, P_{l,m}(\varphi_2) \rangle = \int_0^{+\infty} r^2 \left[\int_{S_2} \psi_1 \left(\int_{S_2} \psi_2 S_{l,m}(\theta_1, \omega_1) \, d\sigma_1 \right) S_{l,m}(\theta, \omega) \, d\sigma \right] dr.$$

On peut permuter les deux intégrations sur la sphère S_2

$$= \int_0^{+\infty} r^2 \left[\int_{S_2} \overline{\psi}_2 \left(\int_{S_2} \psi_1 \overline{S}_{l,m}(\theta, \omega) \, d\sigma \right) S_{l,m}(\theta_1, \omega_1) \, d\sigma_1 \right] dr,$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(r^2 \int_{S_2} \overline{\psi}_2 \psi_{1,l,m} \, d\sigma_1 \right) dr = \langle P_{l,m}(\varphi_1), \varphi_2 \rangle$$

$P_{l,m}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_{l,m}$ qui est une variété fermée de $\mathcal{H}$. Elle est donc composée des fonctions

$$\varphi_{l,m}(M) = \psi_{l,m}[\mathcal{Q}^{-1}(M)],$$

où

$$\psi_{l,m}(\mu) = \psi_{l,m}(r, \theta, \omega) = R_{l,m}(r) \, S_{l,m}(\theta, \omega)$$

est de carré sommable pour $0 \leq r < +\infty$, avec la mesure $r^2 \, dr$.

Les variétés $\mathcal{H}_{l,m}$ sont orthogonales entre elles :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi_{l,m} \overline{\varphi}_{l',m'} \, dx \, dy \, dz = \int_0^{+\infty} r^2 R_{l,m} R_{l',m'} \left[\int_{S_2} S_{l,m} S_{l',m'} \, d\sigma \right] dr.$$

Or les $S_{l,m}$ forment un système orthogonal sur S_2, donc

$$\int_{S_2} S_{l,m} \overline{S}_{l',m'} \, d\sigma = 0, \qquad \text{si} \quad (l, m) \neq (l', m').$$

Les variétés $\mathcal{H}_{l,m}$ engendrent l'espace $\mathcal{H}_R$:

Soit

$$\varphi(x, y, z) = \psi(r, \theta, \omega), \qquad \varphi \in \mathcal{H}_{\mathbf{R}^3}.$$

$\psi(r, \theta, \omega)$ considéré comme fonction sur S_2 dépendant du paramètre r étant de carré sommable sur S_2 pour presque toutes les valeurs de r, nous avons *dans* $\mathcal{H}_{S_2}$ *pour presque tous les* r,

$$\psi(r, \theta, \omega) = \sum_{l,m} R_{l,m}(r)\, S_{l,m}(\theta, \omega) = \sum_{l,m} \psi_{l,m}(r, \theta, \omega),$$

$$R_{l,m}(r) = \int_{S_2} \psi S_{l,m}\, d\sigma$$

et

$$\int_{S_2} |\psi|^2 d\sigma = \sum_{l,m} |R_{l,m}(r)|^2 \quad \text{(égalité de Parceval)},$$

puisque les fonctions sphériques forment un système complet d'où il résulte que

$$\int_{R^+ \times S_2} r^2 |\psi|^2 dr\, d\sigma = \sum_{l,m} \int_0^{+\infty} r^2 |R_{l,m}(r)|^2 dr = \sum_{l,m} \int_{R^+ \times S_2} |\psi_{l,m}|^2 r^2\, dr\, d\sigma$$

comme dans $\mathcal{H}_{R^+ \times S_2}$ (avec la mesure $r^2\, dr\, d\sigma$) les $\psi_{l,m}$ forment un système orthogonal de fonctions, la série $\sum_{l,m} \psi_{l,m}$ converge vers une fonction ψ_0 de $\mathcal{H}_{R^+ \times S_2}$ (avec la mesure $r^2\, dr\, d\sigma$). Il existe donc d'après le théorème de Fischer-Riesz une suite d'indices $N_1, N_2, \ldots, N_p, \ldots$ tel que $\psi_0 =$ limite presque partout de ψ_{S_p} où

$$\psi_{S_p} = \sum_{\substack{l \leq S_p \\ |m| \leq l}} \psi_{l,m}(r, \theta, \omega).$$

Mais *pour presque tous les* r

$$\psi = \sum_{l,m} R_{l,m}(r)\, S_{l,m}(\theta, \omega) = \lim_{p \to \infty} \psi_{S_p}$$

dans $\mathcal{H}_{S_2}$.

Et toujours d'après le théorème de Fischer-Riesz il existe une suite d'indices $p_1, p_2, \ldots, p_q, \ldots$ (qui dépendent de r pour lequel l'égalité précédente est vraie) telle que

$$\psi(r, \theta, \omega) = \text{lim presque partout sur } S_2 \text{ de } \psi_{S_{p_q}} \text{ si } q \to \infty;$$

or $\psi_0 =$ lim presque partout de ψ_{S_p} sur S_2 pour presque toutes les valeurs de r, donc

$$\psi_0 = \text{lim presque partout sur } S_2 \text{ de } \psi_{S_q}$$

quelle que soit la suite $N_{p_1}, \ldots, N_{p_q}, \ldots$.

Donc, pour presque toutes les valeurs de r,

$$\psi_0 = \psi \text{ presque partout sur } S_2,$$

donc $\psi_0 = \psi$ presque partout sur $R^- \times S_2$. Donc $\psi_0 = \psi$ dans $\mathcal{H}_{R^+ \times S_2}$. Donc

$$\psi = \sum_{l,m} \psi_{l,m}(r, \theta, \omega) \quad \text{dans } \mathcal{H}_{R^+ \times S_2},$$

donc

$$\varphi = \sum_{l,m} \varphi_{l,m} = \sum_{l,m} P_{l,m}(\varphi) \quad \text{dans } \mathcal{H}_{R^3}.$$

Donc les variétés $\mathcal{H}_{l,m}$ engendrent $\mathcal{H}_{R^3}$.

Enfin, les variétés $\mathcal{H}_{l,m}$ sont stables pour l'opérateur H tel qu'il est défini.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}_{R^3} = D_0$, alors

$$P_{l,m}(\varphi) \in \mathcal{S}_{R^3}.$$

Montrons que $R_{l,m}(r) = \int_{S_2} \psi \bar{S}_{l,m} \, d\sigma$ s'écrit

$$R_{l,m}(r) = r^l \chi(r^2),$$

où $\chi(u)$ est indéfiniment dérivable pour $u \geq 0$ et à décroissance rapide à l'infini,

$$\psi(r, \theta, \omega) = \varphi(r \sin\theta \cos\omega, \, r \sin\theta \sin\omega, \, r \cos\theta)$$

est indéfiniment dérivable en r, θ, ω si $r \geq 0$. Donc $R_{l,m}(r)$ est indéfiniment dérivable en r pour $r \geq 0$.

Calculons son développement de Mac Laurin à l'origine jusqu'à l'ordre $l + 2n$. Nous avons d'après Mac Laurin (en r)

$$\psi(r, \theta, \omega) = \psi(0, \theta, \omega) + r\psi'_r(0, \theta, \omega) + \ldots + \frac{r^l}{l!}\psi_r^l(0, \theta, \omega) + \ldots$$
$$+ \frac{r^{l+2n}}{(l+2n)!}\psi_r^{l+2n}(0, \theta, \omega) + \frac{r^{l+2n+1}}{(l+2n+1)!}\psi^{l+2n+1}(kr, \theta, \omega)$$

(où $0 < k < 1$, k dépendant de r, θ, ω); or

$$\psi(0, \theta, \omega) = \varphi(0, 0, 0),$$
$$\psi'_r(0, \theta, \omega) = \varphi'_x(0, 0, 0)\sin\theta\cos\omega + \varphi'_y(0, 0, 0)\sin\theta\sin\omega + \varphi'_z(0, 0, 0)\cos\theta,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\psi_r^{(p)}(0, \theta, \omega) = [\varphi'_x(0, 0, 0)\sin\theta\cos\omega + \varphi'_y(0, 0, 0)\sin\theta\sin\omega + \varphi'_z(0, 0, 0)\cos\theta]^p.$$

Nous constatons que $\psi_r^{(p)}(0, \theta, \omega)$ est un *polynome homogène* de degré p en $e^{i\omega}\sin\theta$, $e^{-i\omega}\sin\theta$, $\cos\theta$ à coefficient constant. Or, un tel polynome est une combinaison linéaire de fonctions sphériques $S_{l,m}$ où les indices l sont $\leq p$ et de *même parité* que p.

Autrement dit,

$$\psi_r^{(p)}(0, \theta, \omega) = \sum_{\substack{0 \leq l \leq p \\ l \equiv p \pmod 2}} A_{l,i} S_{l,i}(\theta, \omega),$$

les $A_{l,i}$ étant des constantes.

Alors étant donné l'orthogonalité des fonctions sphériques

$$\int_{S_1} \psi_r^{(p)}(o, \theta, \omega)\, \bar{S}_{l,m}\, d\sigma = o \quad \begin{cases} \text{si } p < l, \\ \text{ou si } p > l, \end{cases}$$

p et l étant de parité différente. Nous avons donc

$$\begin{aligned} R_{l,m}(r) = \frac{r^l}{l!} \int_{S_1} \psi_r^{(l)}(o, \theta, \omega)\, \bar{S}_{l,m}\, d\sigma + \dots \\ + \frac{r^{l+2n}}{(l+2n)!} \int_{S_1} \psi_r^{(l+2n)}(o, \theta, \omega)\, \bar{S}_{l,m}\, d\sigma \\ + \frac{r^{l+2n+1}}{(l+2n+1)!} \int_{S_1} \psi_r^{(l+2n+1)}(kr, \theta, \omega)\, \bar{S}_{l,m}\, d\sigma ; \end{aligned}$$

$\psi_r^{(l+2n+1)}(kr, \theta, \omega)$ étant bornée, on a pour $R_{l,m}(r)$ un développement de Mac Laurin du type

$$R_{l,m}(r) = r^l [a_0 + a_1 r^2 + \dots + a_n r^{2n} + r^{2n}\, \varepsilon(r)].$$

Comme $R_{l,m}(r)$ est indéfiniment dérivable pour $r \geqq o$, il en résulte que $\frac{R_{l,m}(r)}{r^l}$ est également indéfiniment dérivable pour $r \geqq o$ et que son développement de Mac Laurin est

$$a_0 + a_1 r^2 + \dots + a_n r^{2n} + r^{2n}\, \varepsilon(r),$$

ce qui montre qu'elle est indéfiniment dérivable comme *fonction de* r^2 pour $r \geqq o$ et que comme fonction de $r^2 = u$ son développement de Mac Laurin est

$$\chi_{l,m}(u) = a_0 + a_1 u + \dots + a_n u^n + u^n\, \varepsilon_1(u),$$

donc

$$R_{l,m}(r) = r^l \chi_{l,m}(r^2).$$

Revenons à $\psi_{l,m} = \left[\int_{S_1} \psi \bar{S}_{l,m}\, d\sigma \right] S_{l,m}$,

$$\begin{aligned} \psi_{l,m} &= r^l \chi_{l,m}(r^2)\, S_{l,m}(\theta, \omega) \\ &= \chi_{l,m}(r^2)\, r^l S_{l,m}(\theta, \omega), \end{aligned}$$

donc

$$\varphi_{l,m} = \chi_{l,m}(x^2 + y^2 + z^2)\, P_{l,m}(x, y, z)$$

$P_{l,m}(x, y, z)$, polynome harmonique, est donc indéfiniment dérivable en x, y, z.

D'autre part,

$$R_{l,m}(r) = \int_{S_1} \psi\, \bar{S}_{l,m}\, d\sigma$$

étant à décroissance rapide à l'infini, $R_{l,m}(r)\, S_{l,m}(\theta, \omega)$, aussi $S_{l,m}$ et ses

dérivées étant bornées sur la sphère. Donc

$$P_{l,m}(\varphi) \in \mathcal{S}_{R^3} = D_0,$$

donc

$$P_{l,m}(D_0) = D_0 \cap \mathcal{H}_{l,m}$$

est *dense* dans $\mathcal{H}_{l,m}$. H *et* $P_{l,m}$ *sont permutables*.

On a

$$H[P_{l,m}(\varphi)] = H(\varphi_{l,m})$$
$$= \left[\frac{d^2}{dr^2} R_{l,m} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} R_{l,m} + \frac{R_{l,m}}{r}\right] S_{l,m} + \frac{1}{r^2} S_{l,m} \Delta_{S_2} S_{l,m}$$
$$= \left[\frac{d^2}{dr^2} R_{l,m} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} R_{l,m} + \left(\frac{1}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) R_{l,m}\right] S_{l,m} \in \mathcal{H}_{l,m}.$$

Donc si $\varphi \in \mathcal{H}_{l,m}$, $H(\varphi) \in \mathcal{H}_{l,m}$; $\mathcal{H}_{l,m}$ est stable et puisque H est hermitique et défini sur une partie dense de $\mathcal{H}_{l,m}$,

$$H[P_{l,m}(\varphi)] = P_{l,m}[H(\varphi)]$$

(ce que l'on peut d'ailleurs vérifier directement).

Conséquence : Si $\varphi \in D_0$,

$$\varphi = \sum_{l,m} P_{l,m}(\varphi) \qquad = \sum_{l,m} \varphi_{l,m},$$

$$H(\varphi) = \sum_{l,m} P_{l,m}[H(\varphi)] = \sum_{l,m} H(\varphi_{l,m}),$$

série qui est donc convergente dans $\mathcal{H}_{R^3}$.

La restriction $H_{l,m}$ de H à $\mathcal{H}_{l,m}$ est hermitique dans $\mathcal{H}_{l,m}$ et définie sur une partie dense de $\mathcal{H}_{l,m}$.

Toute extension autoadjointe de H jouit des mêmes propriétés vis-à-vis de $P_{l,m}$ (et $\mathcal{H}_{l,m}$) et sa restriction donne une extension *autoadjointe* de $H_{l,m}$ dans $\mathcal{H}_{l,m}$.

Réciproquement si pour chaque $\mathcal{H}_{l,m}$ on définit une extension $\overline{H}_{l,m}$ autoadjointe de $H_{l,m}$ en posant

$$H(\varphi) = \sum_{l,m} \overline{H}(\varphi_{l,m}),$$

c'est-à-dire si H est défini sur φ si et seulement s'il est défini sur $\varphi_{l,m}$ et si la série $\sum_{l,m} \overline{H}(\varphi_{l,m})$ est convergente, $\overline{H}$ est *autoadjoint* et jouit des propriétés précédentes.

Opérateurs H_l. — $A\psi_{l,m} = R_{l,m}(r) S_{l,m}(\theta, \omega)$ correspond d'une façon biunivoque $R_{l,m}(r)$ définie pour $r \geqq 0$ tel que $r R_{l,m}(r)$ soit de carré sommable de 0 à $+\infty$.

L'application $\varphi_{l,m} \to r\mathrm{R}_{l,m} = \mathrm{I}(\varphi_{l,m})$ est *une isométrie* car

$$\varphi_{l,m}(\ ) = \int_0^{+\infty} r\mathrm{R}_{l,m}(r)$$

qui nous permet de transporter $\mathrm{H}_{l,m}$ dans $\mathcal{H}_{\mathrm{R}^-}$ en posant pour $\xi \in \mathcal{H}_{\mathrm{R}^+}$

$$\mathrm{H}_l(\xi) = \mathrm{I}\left\{\mathrm{H}_{l,m}\left[\mathrm{I}^{-1}(\xi)\right]\right\},$$
$$\mathrm{I}^{-1}(\xi) = \frac{\xi}{r}\mathrm{S}_{l,m} \in \mathcal{H}_{l,m};$$

H_l est défini sur ξ si et seulement si $\mathrm{H}_{l,m}$ est défini sur $\frac{\xi}{r}\mathrm{S}_{l,m}$. H_l est hermitique et défini sur la partie de $\mathcal{H}_{\mathrm{R}^+}$ qui est l'image par I de $\mathrm{D}_0 \cap \mathcal{H}_{l,m}$, c'est-à-dire sur les fonctions $\xi(r) = r^{l+1}\chi(r^2)$, où $\chi(u)$ est un indéfiniment dérivable par rapport à u pour $u \geq 0$, qui est une partie dense de $\mathcal{H}_{\mathrm{R}^-}$.

Nous avons

$$\mathrm{H}_{l,m}\left[\mathrm{I}^{-1}(\xi)\right] = \mathrm{H}_{l,m}\left(\frac{\xi}{r}\mathrm{S}_{l,m}\right)$$
$$= \left[\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{\xi}{r}\right) + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{\xi}{r}\right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\frac{\xi}{r}\right]\mathrm{S}_{l,m}$$

et

$$\mathrm{H}_l(\xi) = \mathrm{I}\left\{\mathrm{H}_{l,m}\left[\mathrm{I}^{-1}(\xi)\right]\right\} = r\left[\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{\xi}{r}\right) + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{\xi}{r}\right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\frac{\xi}{r}\right],$$

donc

$$\mathrm{H}_l(\xi) = \xi'' + \left(\frac{1}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\xi.$$

Extension de la définition des opérateurs H_l dans $\mathcal{H}_{\mathrm{R}^+}$. — La définition de H autoadjoint se ramène à la définition des opérateurs H_l autoadjoints.

Pour la commodité des démonstrations, nous allons étendre le domaine initial de H_l, $\mathrm{I}(\mathrm{D}_0 \cap \mathcal{H}_{l,m})$ en un domaine D_l. Nous verrons par la suite que cette extension était inutile en ce qui concerne la définition de H, mais elle nous apportera quelques résultats. Le domaine D_l sera constitué par les fonctions $\xi(r) = r^{l+1}\chi(r)$, où $\chi(r)$ est indéfiniment dérivable de $-\infty$ à $+\infty$ et à décroissance rapide (c'est-à-dire $\chi(r) \in \mathcal{S}_{\mathrm{R}}$). $\mathrm{D}_l \supset \mathrm{I}(\mathrm{D}_0 \cap \mathcal{H}_{l,m})$, car une fonction $\chi(r^2)$ [où $\chi(u)$ est indéfiniment dérivable pour $u \geq 0$] peut toujours être prolongée pour $r < 0$ de telle sorte qu'elle appartienne à $\mathcal{S}_{\mathrm{R}}$.

H_l (dans l'espace $\mathcal{H}_{\mathrm{R}^-}$) est défini et hermitique sur D_l.

En effet

$$\mathrm{H}_l\left[r^{l+1}\chi(r)\right] = r^{l+1}\chi'' + 2(l+1)r^l\chi' + r^l\chi$$

est défini et continu origine comprise, de carré sommable puisque $\chi(r)$ est à décroissance rapide. Il est hermitique : si ξ_1 et $\xi_2 \in \mathrm{D}_l$,

$$\int_0^{+\infty}\left[\xi_1'' + \left(\frac{1}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\xi_1\right]\bar{\xi}_2\,dr = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_\varepsilon^{+\infty}\left[\xi_1''\bar{\xi}_2 + \left(\frac{1}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\xi_1\bar{\xi}_2\right]dr$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_\varepsilon^{+\infty}\xi_1\bar{\xi}_2'' + \left(\frac{1}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\xi_1\bar{\xi}_2\,dr\right.$$
$$\left. - \xi_1'(\varepsilon)\bar{\xi}_2(\varepsilon) - \xi_1(\varepsilon)\bar{\xi}_2'(\varepsilon)\right];$$

on remarquera que

$$\bar{\xi}_1 \xi_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) = r^l [r - l(l+1)] \chi_1 \chi_2$$

reste borné à l'origine. Or

$$\bar{\xi}'_1 \bar{\xi}_2 - \bar{\xi}'_2 \xi_1 = r^{2l-2} (\chi'_1 \bar{\chi}_2 - \chi'_2 \chi_1) \to 0, \quad \text{avec } r,$$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{H}_l(\xi_1) \bar{\xi}_2 \, dr = \int_0^{+\infty} \bar{\xi}_1 \mathrm{H}_l(\xi_2) \, dr.$$

Étude de l'adjoint H_l^* de H_l défini précédemment. — A chaque $\xi \in \mathcal{H}_R$, nous faisons correspondre la distribution

$$\mathrm{T} = r^l \xi \in \mathcal{S}'_R$$

plus précisément *la distribution définie par*

$$\mathrm{T}(\chi) = \int_0^{+\infty} r^l \xi(r) \chi(r) \, dr \qquad \text{pour} \quad \chi \in \mathcal{S}_R.$$

Autrement dit, T est une fonction identiquement nulle pour $r < 0$ et égal à $r^l \xi(r)$ pour $r \geq 0$.

Nous avons

$$\frac{d}{dr}[\mathrm{T}(\chi)] = -\mathrm{T}\left(\frac{d\chi}{dr}\right) = -\int_0^{+\infty} r^l \xi \frac{d\chi}{dr} \, dr,$$

$$\frac{d^2\mathrm{T}}{dr^2} = \int_0^{+\infty} r^l \xi \frac{d^2\chi}{dr^2} \, dr \qquad \text{et} \qquad r \frac{d^2\mathrm{T}}{dr^2}[\chi(r)] = \frac{d^2\mathrm{T}}{dr^2}(r\chi) = \mathrm{T}\left(r \frac{d^2\chi}{dr^2} + 2 \frac{d\chi}{dr} \right)$$

$$= \int_0^{+\infty} r^{l+1} \xi \frac{d^2\chi}{dr^2} \, dr + 2 \int_0^{+\infty} r^l \xi \frac{d\chi}{dr} \, dr.$$

Par conséquent,

$$\langle \xi, \mathrm{H}_l(\xi_1) \rangle = \int_0^{+\infty} \xi \mathrm{H}_l(\xi_1) \, dr,$$

avec $\xi_1 \in \mathrm{D}_l$

$$\xi_1 = r^{l+1} \chi(r),$$

$$\langle \xi, \mathrm{H}_l(\xi_1) \rangle = \int_0^{+\infty} \xi [r^{l+1} \chi''_1 + 2(l+1) \chi'_1 r^l + r^l \chi_1] \, dr = \mathrm{T}[r\chi''_1 + 2(l+1)\chi'_1 + \chi_1]$$

$$= r \frac{d^2\mathrm{T}}{dr^2}(\chi_1) - 2l \frac{d\mathrm{T}}{dr}(\chi_1) + \mathrm{T}(\chi_1) = \left(r \frac{d^2}{dr^2} - 2l \frac{d}{dr} + 1 \right) \mathrm{T}(\chi_1),$$

donc

$$\langle \xi, \mathrm{H}_l(\xi_1) \rangle = u(\chi_1) \qquad \text{si} \quad \xi_1 \in \mathrm{D}_l,$$

où

$$u = r \frac{d^2\mathrm{T}}{dr^2} - 2l \frac{d\mathrm{T}}{dr} + \mathrm{T}, \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathrm{T} = r^l \xi & \text{si} \quad r \geq 0, \\ = 0 & \text{pour} \quad r < 0. \end{cases}$$

Or si sur ξ, H_l^* est défini,

$$\langle \xi, \mathrm{H}_l(\xi_1) \rangle = \langle \xi_0, \xi_1 \rangle.$$

où $\xi_0 = H_l^*(\xi)$ et réciproquement. Or

$$\langle \xi_0, \xi_1 \rangle = \int_0^{+\infty} r^{l+1} \xi_0 \bar{\chi}_1 \, dr = r\, T_0(\bar{\chi}_1), \qquad \text{avec} \quad T_0 = r^l \xi_0,$$

donc ceci entraîne que

$$u = r \frac{d^2 T}{dr^2} - 2l \frac{dT}{dr} + T = r T_0,$$

puisque $u(\bar{\chi}_1) = r T_0(\bar{\chi}_1)$ quel que soit $\chi_1 \in \mathcal{S}_R$. Réciproquement si

$$u = r T_0, \qquad \text{où} \quad u = r \frac{d^2 T}{dr^2} - 2l \frac{dT}{dr} + T,$$

T et T_0 correspondant à ξ et ξ_0, on a

$$\langle \xi, H_l(\xi_1) \rangle = u(\bar{\chi}_1) = r T_0(\bar{\chi}_1) = \langle \xi_0, \xi_1 \rangle$$

quel que soit $\xi_1 \in D_l$. Donc l'égalité $H^*(\xi) = \xi_0$ se traduit par

$$r \frac{d^2 T}{dr^2} - 2l \frac{dT}{dr} + T = r T_0.$$

Cherchons à résoudre les équations

$$H_l^*(\xi) \mp i\xi = 0,$$

elles se traduisent par

$$\text{(III)} \qquad r \frac{d^2 T}{dr^2} - 2l \frac{dT}{dr} + (1 \mp ir)\, T = 0,$$

où T est une distribution qui est une fonction identiquement nulle si $r < 0$ égale à $r^l \xi$, si

$$r \geqq 0, \qquad \xi \in \mathcal{H}_{R^+}.$$

T appartenant à $\mathcal{S}'_R$ nous faisons une transformation de Fourier pour discuter cette équation. Posons $s = \mathcal{F}(T)$ et nous appellerons t' la nouvelle variable, transformation symboliquement définie par

$$s = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi r t'} T \, dr.$$

Alors s vérifie l'équation (IV)

$$\frac{ds}{dt'} [4\pi^2 t'^2 \mp i] + s[8\pi^2 (l+1) t' - 2i\pi] = 0.$$

Le coefficient de $\frac{ds}{dt'}$ ne s'annule pas sur l'axe réel, on n'a comme solution que les solutions classiques

$$s(t') = \left(\frac{t'-k}{t'+k} \right)^{\frac{l}{4\pi k}} \frac{1}{(t'^2 - k^2)^{l+1}}, \qquad k = \frac{e^{\mp \frac{i\pi}{4}}}{2\pi}$$

qui sont des fonctions sommables dont on peut, par conséquent, prendre la transformée de Fourier $\overline{\mathcal{F}}(s)$ par la formule classique ordinaire. Mais puisque $\overline{\mathcal{F}}(s)$ qui est une fonction $r^l\xi$, où ξ est de carré sommable pour $r \geqq 0$, doit être nulle pour $r < 0$, $s(t')$ comme fonction analytique de la variable t' doit être *holomorphe au-dessus de l'axe réel.* (En posant $2i\pi t' = -t$, on a en effet la *transformation de Laplace* qui est holomorphe pour $\mathcal{R}(t) > 0$.) Or toutes les solutions $\not\equiv 0$ de (IV) ont une singularité en

$$t' = \frac{e^{\mp \frac{i\pi}{4}}}{2\pi} \quad \text{et} \quad \frac{e^{\mp \frac{3i\pi}{4}}}{2\pi}.$$

Donc aucune des solutions de (III) ne convient (sauf celle qui est identiquement nulle). Donc l'équation

$$H_l^*(\xi) \mp i\xi = 0$$

n'a que la solution $\xi = 0$; H_l^* est *autoadjoint.*

Définition de H^* autoadjoint. — Transportons H_l^* dans $\mathcal{H}_{l,m}$ par l'isométrie I. Nous obtenons l'adjoint $H_{l,m}^*$ de $H_{l,m} = \overline{I}^{-1}(H_l)$, c'est-à-dire l'adjoint de $H_{l,m}$ défini sur les fonctions du type

$$\varphi_{l,m} = \psi_{l,m}\left[\overline{\mathfrak{L}}^{-1}(M)\right], \qquad \text{où} \quad \psi_{l,m} = r^l \chi(r) S_{l,m}, \qquad \text{où} \quad \chi(r) \in \mathcal{S}_R$$

(on ne considère que sa restriction pour $r \geqq 0$), $H_{l,m}^*$ est autoadjoint. Il est alors considéré comme défini sur les combinaisons linéaires finies des fonctions $\varphi_{l,m}$ (qui forment le domaine D_1) et son adjoint H^* est alors autoadjoint et est défini sur une fonction φ si et seulement si $H_{l,m}^*$ est défini sur $\varphi_{l,m} = P_{l,m}(\varphi)$ et si $\sum_{l,m} H_{l,m}^*(\varphi_{l,m})$ converge :

$$H^*(\varphi) = \sum_{l,m} H_{l,m}^*(\varphi_{l,m});$$

$D_1 \supset D_0$, car D_0 n'est pas seulement composé de combinaison linéaire *finie* de fonction du type $\psi_{l,m}\left[\overline{\mathfrak{L}}^{-1}(M)\right]$, où

$$\psi_{l,m} = r^l \chi(r^2) S_{l,m},$$

mais l'étude de H définie dans D_0 montre que $H^*(\varphi)$ coïncide sur $\varphi \in D_0$ avec la première définition de H [puisque $\sum_{l,m} H_{l,m}(\varphi_{l,m})$ converge vers $H(\varphi)$, si $\varphi \in D_0$].

Étude de l'opérateur H^*.

Recherche des fonctions propres. — Si φ est une fonction propre de H^* relative

à la valeur propre λ, $\varphi_{l,m} = P_{l,m}(\varphi)$ est une fonction propre pour la même valeur propre λ de $H^*_{l,m}$ et $I(\varphi_{l,m})$ est une fonction propre de H^*_l pour λ.

Nous cherchons donc les fonctions propres de H^*_l.

On doit avoir $H^*_l(\xi) = \lambda\xi$, ce qui se traduit en considérant la distribution T correspondante par l'équation

$$r\frac{d^2T}{dr^2} - 2\frac{dT}{dr} + T = \lambda r T \qquad \text{(III)}$$

(qui est la même que celle de la première partie).

Il n'est pas nécessaire de faire une transformation de Fourier pour discuter cette équation. En effet, nous cherchons une fonction solution au sens des distributions. Celle-ci doit coïncider avec une des solutions classiques dans chacune des deux demi-droites complémentaires de l'origine. Nous savons d'après la première partie que la solution régulière à l'origine ne convient sur la demi-droite $r \geq 0$, c'est-à-dire ne sont du type $r^l\xi$, $\xi \in \mathcal{H}_R$, que si $\lambda = \frac{1}{4n^2}$, $n \geq l+1$; quant aux autres solutions, étant dû type $F(r) + G(r)\operatorname{Log} r$ [10] où $F(0) \neq 0$, elles ne vérifient pas l'équation (III) en tant que distribution [mais l'équation : $r\frac{d^2}{dr^2}T - 2l\frac{d}{dr}T + T = K\delta$, δ, mesure de Dirac; K, une constante $= -2lF(0)$].

Conclusion. — Nous obtenons les mêmes fonctions propres que dans la première partie.

Détaillons : H^*_l a pour valeurs propres les nombres

$$\lambda = \frac{1}{4n^2} \quad (n \geq l+1); \qquad H^*(\xi) = \frac{1}{4n^2}\xi$$

à une seule solution $e^{-\frac{2n}{r}} L_{n-(l+1),2(l+1)}\left(\frac{r}{2n}\right)$ (spectre simple pour H^*_l). Donc $H^*_{l,m}$ a pour fonction propre pour la même valeur de λ la seule solution

$$\varphi_{l,m} = \psi_{l,m}\left[\mathfrak{F}^{-1}(M)\right], \qquad \psi_{l,m} = r^l e^{-\frac{2n}{r}} L_{n-(l+1),2(l+1)}\left(\frac{r}{2n}\right) S_{l,m}(\theta, \omega),$$

$$\varphi_{l,m} = e^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2n}} L_{n-(l+1),2(l+1)}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2n}\right) P_{l,m}(x, y, z)$$

$$[P_{l,m}(x, y, z) = \text{polynome harmonique}].$$

et finalement, H^* a les variétés propres pour chaque valeur $\lambda = \frac{1}{4n^2}$ qui sont engendrées par les $\varphi_{l,m}$ pour $l \leq n-1$, $|m| \leq l$.

---

[10] $G(r)$ est éventuellement nulle.

DOMAINE DE DÉFINITION DE H^*. — Supposons que H^* soit défini sur $\psi \in \mathcal{H}_{R^3}$. Si $\varphi \in D_0 = \mathcal{D}_R$

$$\int_{R^3} \varphi\, H^*(\psi)\, dx\, dy\, dz = \int_{R^3} \psi\, H(\varphi)\, dx\, dy\, dz,$$

où

$$H(\varphi) = \Delta\varphi + \frac{\varphi}{r}$$

(opérateur différentiel ordinaire). $\frac{\varphi}{r}$ est localement sommable (à l'origine φ et $\frac{1}{r}$ étant de carré sommable, $\frac{\varphi}{r}$ est sommable) et de carré sommable en dehors d'un voisinage de l'origine, c'est donc une distribution $\in \mathcal{D}'_{R^3}$, donc

$$\int_{R^3} \varphi\, H^*(\psi)\, dx\, dy\, dz = \int_{R^3} \psi\, \overline{\Delta\varphi}\, dx\, dy\, dz + \int_{R^3} \frac{\psi}{r}\, \overline{\varphi}\, dx\, dy\, dz,$$

ou

$$\int_{R^3} \varphi \left| H^*(\psi) - \frac{\psi}{r} \right| dx\, dy\, dz = \int_{R^3} \psi\, \overline{\Delta\varphi}\, dx\, dy\, dz$$

quel que soit $\varphi \in \mathcal{D}_{R^3}$. Donc

$$H^*(\psi) = \Delta\psi - \frac{\psi}{r}, \qquad \text{car} \quad H^*(\psi) - \frac{\psi}{r} = \Delta\psi.$$

où $\Delta\psi$, laplacien de ψ au sens des distributions, est une fonction localement sommable.

Donc si H^* est défini sur ψ, $\Delta\psi$ au sens des distributions est une fonction localement sommable, de carré sommable en dehors d'un voisinage de l'origine, $\Delta\psi + \frac{\psi}{r}$ est une fonction de carré sommable et

$$H^*(\psi) = \Delta\psi + \frac{\psi}{r}.$$

Conséquence. — Si ψ a un laplacien au sens habituel $\{\Delta\psi\}$ continue sauf peut-être à l'origine, possédant les propriétés qui viennent d'être énoncées plus haut pour $\Delta\psi$ au sens des distributions, alors sur ψ, H^* n'est pas défini, si $\{\Delta\psi\} \neq \Delta\psi$ au sens des distributions.

Supposons H^* défini sur ψ. On a alors

$$\int_{R^3} \overline{\varphi}\, \Delta\psi\, dx\, dy\, dz = \int_{R^3} \psi\, \overline{\Delta\varphi}\, dx\, dy\, dz.$$

Mais étant donné les hypothèses sur $\{\Delta\psi\}$,

$$\int_{R^3 - B(\varepsilon)} \psi\, \overline{\Delta\varphi}\, dx\, dy\, dz = \int_{R^3 - B(\varepsilon)} \varphi\, \{\Delta\psi\}\, dx\, dy\, dz + \int_{S(\varepsilon)} \left(\psi\, \overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, \overline{\varphi} - \varphi\, \overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, \overline{\psi}\right) \vec{n}\, d\sigma.$$

où $B(\varepsilon)$ et $S(\varepsilon)$ sont respectivement les boule et sphère de rayon ε centrées à

l'origine. Puisque $\{\Delta\psi\}$ est localement sommable, si $\varepsilon \to 0$, les intégrales triples tendent vers une limite et l'intégrale de surface également

$$\int_{S(\varepsilon)} \left(\psi \overrightarrow{\operatorname{Grad}}\, \bar{\varphi} - \bar{\varphi} \overrightarrow{\operatorname{Grad}}\, \psi\right) \vec{n}\, d\sigma \to L(\varphi), \quad \text{et} \quad L = \Delta\psi - \{\Delta\psi\}$$

est une distribution $\in \mathcal{S}'_{R^3}$, comme $\Delta\psi$ et $\{\Delta\psi\}$, et est $\neq 0$ par hypothèse.

Cette distribution a pour support l'origine, ce qui est impossible puisque $\Delta\psi$ et $\{\Delta\psi\}$ sont des *fonctions*.

Or les fonctions φ_n de la *famille abhérente* de la première partie sont telles que

$$H(\psi) = \{\Delta\psi\} + \frac{\psi}{r}$$

est de carré sommable, donc $\{\Delta\psi\}$ vérifie les hypothèses. Or H ainsi défini n'étant pas hermétique $\{\Delta\psi\} \neq \Delta\psi$ au sens des distributions. Donc sur les fonctions φ_n, H^* n'est pas défini. Il existe donc des fonctions sur lesquelles H^* n'est pas défini.

Existence du spectre continu. — Supposons que le système des fonctions propres soit complet dans $\mathcal{H}_{R^3}$. Alors on aurait pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_{R^3}$

$$\varphi = \sum_n a_n \varphi_n,$$

où φ_n est une fonction propre normalisée relative à la valeur

$$\lambda = \frac{1}{4n^2}, \qquad \text{avec} \quad \sum_n |a_n|^2 < +\infty,$$

mais

$$\sum_n a_n H(\varphi_n) = \sum_n \frac{a_n}{4n^2} H^*(\varphi_n)$$

serait *convergente* et l'on aurait

$$H^*(\varphi) = \sum_n \frac{a_n}{4n^2} H^*(\varphi_n);$$

H^* serait défini sur toute fonction, ce qui n'est pas exact. Donc H^* possède un *spectre continu*.

L'existence de ce spectre est affirmée sans preuve dans un certain nombre de traités de Physique théorique et je pense que le fait que le système des valeurs propres ne soit pas complet a été effectivement démontré, mais, à ma connaissance, l'existence du spectre continu n'a jamais été prouvée faute de définition précise de H en tant qu'opérateur autoadjoint. En effet, si un opérateur hermétique A n'est pas autoadjoint, il n'a pas forcément de spectre réel.

DÉFINITION SIMPLIFIÉE DE H^*. — Nous avons vu que, si $H^*(\psi)$ existe, $\Delta\psi$ au sens des distributions est une fonction et $\Delta\psi + \frac{\psi}{r}$ est de carré sommable. Démontrons la *réciproque*. Soit $\psi \in \mathcal{H}_R$, tel que $\Delta\psi + \frac{\psi}{r}$ au sens des distributions soit une *fonction* de carré sommable. Par conséquent, on a

$$\int_{R^3} \varphi\left(\Delta\psi + \frac{\psi}{r}\right) dx\, dy\, dz = \int_{R^3} \psi\left(\Delta\varphi + \frac{\varphi}{r}\right) dx\, dy\, dz$$

quel que soit $\varphi \in \mathcal{S}_{R^3} = D_0$.

Pour prouver la réciproque, il faut en principe démontrer que cette égalité reste vraie, quel que soit $\varphi \in D_1$.

Mais nous allons directement prouver que si H est supposé défini sur D_0, H_1^* son adjoint coïncide avec le précédent, et pour cela il suffit de prouver que cet adjoint est *autoadjoint* [III] : ayant alors il a un domaine de définition plus étendu que le précédent, il coïncide avec lui.

Le raisonnement reste le même. Il faut prouver qu'il n'existe que la fonction identiquement nulle qui vérifie l'équation

$$H_1^*(\varphi) \mp i\varphi = 0,$$

c'est-à-dire que dans $\mathcal{H}_R$, si H_l est l'opérateur

$$H_l(\xi) = \xi'' + \left[\frac{1}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\xi$$

défini sur les fonctions $\xi = r^l \chi(r^2)$, où $\chi(u)$ est indéfiniment dérivable pour $u \geq 0$, il a un adjoint $H_{1,l}^*(\xi)$ autoadjoint, c'est-à-dire que l'équation

$$H_{1,l}^*(\xi) \mp i\xi = 0$$

n'a comme solution que la fonction identiquement nulle.

Nous employons le même procédé que plus haut. Toute fonction $\chi(r^2)$ étant la restriction à $r \geq 0$ d'une fonction de $\mathcal{S}_R$ à chaque $\xi \in \mathcal{H}_R$, nous associons $T = r^l \xi$ si $r \geq 0$ et identiquement nulle si $r < 0$. L'équation $H_l^*(\xi) + i\xi = 0$ se traduit par

$$\text{(V)} \qquad T\left[r\frac{d^2\chi}{dr^2} + 2(l+1)\frac{d\chi}{dr} + \chi \mp ir\chi\right] = 0.$$

car, suivant les mêmes calculs que plus haut,

$$\langle H_{1l}^*(\xi),\ r^{l+1}\overline{\chi}\rangle = \langle \xi,\ H_l(r^{l+1}\overline{\chi})\rangle = T\left[r\frac{d\chi_2}{dr^2} + 2(l+1)\frac{d\chi}{dr} + \chi\right]$$

quelle que soit la fonction $\chi \in \mathcal{S}_R$ dont la restriction à $r \geq 0$ est une fonction de r^2 indéfiniment dérivable. Or ces fonctions χ sont les fonctions qui, à l'origine, ont toutes leurs dérivées impaires nulles. Elles forment la variété $v \subset \mathcal{S}_R$

orthogonale aux distributions, δ', δ''', ..., $\delta^{(2p+1)}$, ... (dérivées d'ordre impair de δ).

Si nous posons

$$J(\chi) = r\frac{d^2\chi}{dr^2} + 2(l+1)\frac{d\chi}{dr} + (1 \mp ir)\chi$$

(opérateur continu dans $\mathcal{S}_R$), l'équation (V) signifie que T est orthoyonal à $J'(c)$, c'est-à-dire que $J'(T)$ est orthogonal à c, J' est le transposé de J défini par

$$J'(T)[\chi] = T[J(\chi)];$$

donc

$$J'(T) = r\frac{d^2T}{dr^2} - 2l\frac{dT}{dr} + (1 \mp ir)T$$

doit être orthogonal à c. Or les distributions orthogonales à c sont à support ponctuel (origine) et sont des combinaisons linéaires finies de δ et ses dérivées. Donc ici des combinaisons linéaires finies des dérivées d'ordre impair de δ : $\sum_{p' \leq p_0} A_{p'}\delta^{(2p+1)}$, donc nous avons

$$J'(T) = \sum_{p \leq p_0} A_p \delta^{(2p+1)}.$$

Autrement dit, T doit vérifier l'équation

$$r\frac{d^2T}{dr^2} - 2l\frac{dT}{dr} + (1 \mp ir)T = \sum_{p \leq p_0} A_p \delta^{(2p+1)}.$$

Nous cherchons comme solution une fonction. En dehors de l'origine, elle coïncide avec une solution classique. D'après le théorème de Fuchs, il y a une solution régulière à l'origine qui, commençant par des termes en r^{2l+1} vérifie l'équation avec le deuxième membre nul. Cette fonction, annulée pour $r < 0$ vérifie l'équation sans deuxième membre en tant que distribution et ne peut convenir puisque nous savons d'après ce qui précède qu'il n'y a pas de solution lorsque le deuxième membre est nul [équation (III) plus haut]. Les autres solutions fonctions annulées pour $r < 0$ vérifient l'équation avec un deuxième membre égal à $k\delta$ (*voir* plus haut, p. 140), donc ne peuvent convenir. Il n'y a donc pas de solution convenable et H^*_{1l} est autoadjoint.

Nous avons alors la définition simple de H^* : H^* est défini sur $\varphi \in \mathcal{D}_{R^3}$ si et seulement si $\Delta\varphi + \frac{\varphi}{r}$, où $\Delta\varphi$ est le laplacien au sens des distributions, est une fonction de carré sommable.

Donc, en *particulier*, si le laplacien ordinaire coïncidant avec le laplacien au sens des distributions est de carré sommable et si φ est bornée à l'origine, $H^*(\varphi)$ est égale à l'expression classique.

CHANGEMENT DU CHAMP INITIAL DE DÉFINITION. — Si un opérateur A est autoadjoint dans un espace de Hilbert, il existe une partie dense de $\mathcal{H}$, soit D tel que si $\varphi \in D$, $A^p(\varphi)$ existe et $\in D$ quel que soit p; D pouvant servir de champ initial de définition pour A (c'est-à-dire que l'adjoint de la restriction de A à D coïncide avec A).

Nous allons définir un tel champ pour H^*.

Définissons le champ pour H_l^*

$$H_l(\varphi) = \varphi'' + \left[\frac{1}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\varphi,$$
$$\varphi = r^{l+1}\chi(r), \qquad \chi \in \mathcal{S}_R,$$

D_{2l} va être constitué des fonctions de ce type tel que $H_l^p(\varphi)$ soit du même type, quel que soit p,

$$H_l^p(\varphi) = r^{l+1}\chi_p(r), \qquad \text{où} \quad \chi_p(r) \in \mathcal{S}_R.$$

Nous poserons le développement de *Mac Laurin de* $\chi(r)$ égal à

$$a_0 + a_1 r + \ldots + a_n r^n + \ldots,$$

et celui de $\chi_p(r)$ à

$$a_0^p + a_1^p r + \ldots + a_n^p r^n + \ldots$$

Supposons que

$$H_l^p(\varphi) \sim r^{l+1}[a_0^p + \ldots + a_n^p r^n + \ldots] \sim r^{l+1}\chi_p(r),$$
$$H_l^{p-1}(\varphi) = H_l[H_l^p(\varphi)] = r^{l+1}\chi_p'' + 2(l+1)r^l\chi_p' + r^l\chi_p$$

qui a le développement de Mac Laurin

$$r^l[a_0^p + 2(l+1)a_1^p] - [2(2l+2)a_2^p + a_1^p]r^{l+1} + \ldots$$
$$+ [a_n^p + (n+1)(2l+2+n)a_{n+1}^p]r^{l+n} + \ldots$$

dont il faut et il suffit que

$$a_0^p + 2(l+1)a_1^p = 0$$

et alors

$$a_n^{p+1} = a_{n+1}^p + (n+2)(2l+3+n)a_{n+2}^p.$$

La relation de récurrence montre que a_n^p est une combinaison linéaire de $a_{n+p}, \ldots, a_{n+2p}$. En effet, on a

$$a_n^1 = a_{n+1} + (n+2)(2l+3+n)a_{n+2}, \qquad \text{pour} \quad p = 1.$$

Si a_n^p est une combinaison de $a_{n+p}, \ldots, a_{n+2p}$,

$$a_n^{p+1} = a_{n+1}^p + (n+2)(2l+3+n)a_{n+2}^p$$

est une combinaison linéaire de $a_{n+p+1}, \ldots, a_{n+2p+1}$, donc a_n^p est une combinaison linéaire de $a_p, \ldots, a_{2p}$ et a_1^p est une combinaison linéaire de $a_{p+1}, \ldots, a_{2p+1}$, donc $a_0^p + 2(l+1)a_1^p$ est une combinaison linéaire de $a_p, \ldots, a_{2p+1}$:

$$a_0^p + 2(l+1)a_1^p = \sum_{i=0}^{i=p+1} \Lambda_i^p a_{p+i}.$$

Si bien que la condition pour que

$$H_l^p(\varphi) = r^{l-1}\chi_p(r)$$

quel que soit p s'exprime par une infinité de relations linéaires :

Pour $p = 0, 1, \ldots, p, \ldots$

$$\sum_{i=0}^{i=p+1} \Lambda_l^p a_{p+i} = 0.$$

Pour $p = 0$, la première relation étant

$$a_0 + 2(l-1)a_1 = 0.$$

Comme

$$a_{p-1} = \frac{d^{p-i}}{dr^{p-i}}[\chi(0)]\frac{1}{(p+i)!},$$

les conditions s'écrivent

$$\sum_{i=0}^{i=p+1} \frac{\Lambda_l^p}{(p+i)!}\frac{d^{p+i}}{dr^{p+i}}[\chi(0)],$$

ce que l'on peut exprimer en disant que dans $\mathcal{S}_R$ les fonctions $\chi(r)$ convenables appartiennent à la variété v_{2l} fermée orthogonale aux distributions

$$T_p = \sum_{i=0}^{i=p+1} \frac{\Lambda_l^p}{(p+i)!}\delta^{(p+i)}, \qquad (p = 0, 1, \ldots, p).$$

Nous remarquerons que les combinaisons sont du type triangulaire, ce qui assure leur indépendance linéaire.

Considérons H_l défini dans $D_{2,l} \subset D_l$ et montrons que son adjoint $H_{2,l}^*$ est auto-adjoint.

Par le même calcul déjà fait deux fois ci-dessus,

$$\langle H_{2,l}^*(\xi), r^{l+1}\overline{\chi}\rangle = T\left[r^2\frac{d^2\chi}{dr^2} + 2(l+1)\frac{d\chi}{dr} + \chi\right],$$

T correspond à ξ toujours de la même façon ($\chi \in v_{2l}$).

Si ξ vérifie la relation

$$H_{2l}^*(\xi) \mp i\xi = 0,$$

c'est que

$$T\left[r\frac{d^2\chi}{dr^2} + 2(l+1)\frac{d\chi}{dr} + (1 \mp ir)\chi\right] = 0$$

quel que soit $\chi \in v_{2l}$. T doit donc être orthogonal à la variété $J(v_{2l})$, où

$$J = r\frac{d^2}{dr^2} - 2l\frac{d}{dr} + (1 \mp ir)$$

comme plus haut, donc $J^l(T)$ est orthogonale à $\mathcal{C}_{2,l}$

$$J^l(T) = r\frac{d^2T}{dr^2} - 2l\frac{dT}{dr} - (1 - ir)T$$

appartient à variété orthogonale à $\mathcal{C}_{2,l}$. Or cette variété est engendrée par les T_p qui ont pour support l'origine, donc $J^l(T)$ a pour support l'origine et est une combinaison linéaire finie de δ et ses dérivées, donc c'est une combinaison linéaire finie des distributions T_p. On a donc l'équation

$$(III_2) \qquad r\frac{d^2T}{dr^2} - 2l\frac{dT}{dr} + (1 - r)T = \sum_{p=p_0} B_p T_p,$$

équation du même type que (III_1) et nous cherchons des solutions du même type. Or cette équation n'a pas de solution convenable à moins que, peut-être, le deuxième membre se réduise à $k\delta$.

Or, etant donné le type triangulaire des expressions des T_p en fonction de δ et de ses dérivées, aucune combinaison des T_p ne peut donner $k\delta[T_0 = S - 2(l-2)\delta']$. Donc il n'y a aucune solution à l'équation

$$H_{2,l}(\xi) - i\xi = 0$$

qui soit $\neq 0$. Donc $H^*_{2,l}$ est autoadjoint et comme $D_{2,l} \subset D_l$, $H^*_{2,l} = H^*_l$. Finalement H peut être considérée comme définie initialement sur les combinaisons linéaires finies de fonction du type

$$\varphi_{l,m}\left[\mathfrak{F}^{-1}(M)\right] = \varphi_{l,m}, \qquad \text{où} \quad \psi_{l,m} = r^l\chi_l(r)\,S_{l,m}(\theta, \omega),$$

c'est-à-dire sur le domaine $D_2 \subset D$ qui est le domaine engendré algébriquement par les $I(D_{2,l})$ et qui est dense dans $\mathcal{H}_{R^3}$,

$$D_2 \subset D_0 = \mathcal{S}_{R^3}.$$

Remarque. — On ne peut pas choisir dans $\mathcal{S}_R$ un domaine $D_3 \subset D_0$ *de définition* sur lequel $H^{*p}(\varphi)$ existe et $\in D_3$ quel que soit p. En effet, si $H^{*p}(\varphi) \in \mathcal{S}_R$ quel que soit p, $H^*(\varphi) = H(\varphi)$ au sens ordinaire et est donc indéfiniment dérivable. Si $\varphi_{l,m}$ est sa projection sur $\mathcal{H}_{l,m}$,

$$\varphi_{l,m} = \psi_{l,m}\left[\mathfrak{F}^{-1}(M)\right] \qquad \text{et} \qquad \psi_{l,m} = r^l\chi(r^2)\,S_{l,m}.$$

$H^p(\psi_{l,m})$ doit être du même type, donc

$$H^p_l[r^{l+1}\chi(r^2)] = r^{l+1}\chi_p(r^2),$$

$\chi_p(r^2)$ considéré comme appartenant à $\mathcal{S}_R$ doit donc appartenir à la fois à $D_{2,l}$ et $I(D_0 \cap \mathcal{H}_{l,m})$. Donc χ_l doit être orthogonale en tant que fonction de $\in \mathcal{S}_R$ aux distributions T_p et aux distributions $\delta^{(2q+1)}$. Par conséquent, si l'on prend pour domaine initial le domaine $D_{2,l} \cap I(D_0 \cap \mathcal{H}_{l,m})$ pour H_l, pour que ξ vérifie

l'équation

$$H^*_{2,l}(\xi) \mp i\xi = 0.$$

$H^*_{2,l}$ étant l'adjoint de H_l avec ce domaine initial, il faut et il suffit que la distribution T correspondante vérifie une équation du type

$$(III_3) \qquad r\frac{d^2T}{dr^2} - 2l\frac{dT}{dr} + (1 \pm ir)T = \sum_{p \leq p_0} B_p T_p + \sum_{\eta \leq q_0} \delta^{(2q+1)}.$$

Or, parmi ces équations, nous avons

$$(III_3) \qquad r\frac{d^2T}{dr^2} - 2l\frac{dT}{dr} + (1 \mp ir)T = \delta,$$

car $\delta = T_0 - 2(l+1)\delta'$ et il y a effectivement une solution convenable $\neq 0$ pour $l = 0$.

Posons, en effet, $s = \mathcal{F}(T)$ (transformation de Fourier). L'équation III_3 devient l'équation

$$(4\pi^2 t'^2 \mp i)\frac{ds}{dt'} + s(8\pi^2 t' - 2i\pi) = 2i\pi,$$

où

$$4\pi^2(t'^2 - k^2)\frac{ds}{dt'} + s(8\pi^2 t - 2i\pi) = 2i\pi.$$

Donc la solution générale s'écrit

$$k = \frac{e^{-\frac{i\pi}{k}}}{2\pi} \quad \text{ou} \quad k = \frac{e^{-\frac{3i\pi}{k}}}{2\pi}.$$

$$2i\pi\left[\int\left(\frac{t'-k}{t'+k}\right)^{-\frac{i}{4\pi k}} dt'\right]\left(\frac{t'-k}{t'+k}\right)^{-\frac{i}{4\pi k}} \frac{1}{t'^2 - k^2}.$$

Une de ses solutions est holomorphe au-dessus de l'axe réel et toutes les solutions sont de module de carré sommable sur l'axe réel.

En effet, si l'on pose $t' = -k + h$, l'équation devient

$$4\pi^2 h(h+2k)\frac{ds}{dh} + s[8\pi^2 h + 8\pi^2 k - 2i\pi] = 2i\pi$$

qui a une solution développable en série entière

$$s = a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n + \ldots,$$

ce qui donne

$$a_0 = \frac{2i\pi}{8\pi^2 k - 2i\pi}$$

et la relation de récurrence

$$a_n[4\pi^2(2+n) - 2i\pi] + 8n\pi^2 a_{n-1} = 0$$

définissant un développement convergent.

La solution holomorphe $s(t')$ au point $t' = -k$ n'a comme seul point singulier que $t' = k$ au-dessous de l'axe réel. Sa transformée de Fourier $\overline{\mathcal{F}}(s)$ vérifie donc (III_3) pour $l = 0$, c'est la fonction ξ de carré sommable *nulle* pour $r < 0$.

Car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi rt'} s(t')\, dt' = 0 \qquad \text{si} \quad r < 0 ;$$

et alors ξ vérifie une des équations

$$\mathrm{H}^{*}_{3,l}(\xi) \mp i\xi = 0,$$

donc $\mathrm{H}^{*}_{3,l}(\xi)$ n'est pas autoadjoint

Donc on ne peut choisir comme domaine de définition pour H un ensemble de fonctions contenu dans $\mathcal{S}_0$, sur lequel $\mathrm{H}^{p}(\varphi) \in \mathrm{D}_0$ quel que soit p.

BIBLIOGRAPHIE.

[I] Weitzel, *Lehrbuch des Theorischen Physik*, Springer, 1950.

[II] J. V. Neumann, *Fondements mathématiques de la mécanique quantique*, Alcan, 1946, traduction Proca.

[III] Béla V. Nagy, *Spectral Darstellung linearer transformationen des Hilbertschen Raumes*, Springer, 1942.

[IV] L. Schwartz, *Théorie des Distributions* (Hermann, *Actualités Scientifiques et Industrielles*, t. 1091 et 1122).

[V] L. Schwartz, *Transformation de Laplace des distributions* (Communication du Séminaire de Mathématiques de l'Université de Lund, tome supplémentaire, 1952, dédié à M. Riesz).

[VI] J. Colmez, *Définition de certains opérateurs différentiels dans un espace de Hilbert de fonction de carré sommable* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 240, 1955, p. 37-39).

SUR

QUELQUES ASPECTS GLOBAUX

DU

THÉORÈME DE PICARD

PAR M. JAMES A. JENKINS.

1. Selon le fameux théorème de Picard, si une fonction est uniforme et méromorphe au voisinage d'une singularité essentielle, il y a au plus deux valeurs (y compris l'infini) qu'une fonction ne prend pas dans ce voisinage. De telles valeurs sont ce qu'on appelle des valeurs exceptionnelles locales de Picard. Récemment M. Dugué [2] souleva la question très intéressante des relations entre les valeurs locales exceptionnelles de Picard au voisinage de différentes singularités essentielles d'une fonction donnée. Dans le Mémoire cité, il établissait qu'une fonction avec n singularités essentielles peut avoir au plus $n+1$ valeurs exceptionnelles de Picard distinctes pour ces n points. Malheureusement, une inexactitude dans la démonstration en fausse le résultat.

L'objet du présent article est de prouver qu'il peut y avoir $2n$ valeurs exceptionnelles de Picard, pour n singularités essentielles sans autre restriction. La méthode consiste, dans le cas le plus simple de deux singularités essentielles, à combiner deux surfaces de Riemann paraboliques simplement connexes, chacune d'entre elles recouvrant la sphère complexe excepté deux points, pour obtenir une surface de Riemann doublement connexe dont on montre alors qu'elle est conformément équivalente à une sphère moins deux points. La représentation conforme de cette dernière sphère sur la surface doublement connexe fournit alors l'exemple cherché dans le cas où $n=2$. L'extension au cas général est immédiate. Les mêmes idées peuvent être utilisées pour discuter les questions analogues soulevées par M. Dugué de la relation entre les ensembles localement exceptionnels d'une fonction dans le voisinage de deux courbes singulières disjointes ou dans le voisinage de deux

arcs d'une seule courbe singulière. Elles permettent aussi de répondre a d'autres questions posées dans le même Mémoire.

Je désire remercier M. Dugué qui a bien voulu traduire en français cet article et dire que j'ai eu avec lui une correspondance très profitable sur ce sujet.

2. Nous établirons le résultat suivant :

Théorème 1. — *Étant donné quatre valeurs complexes a, b, c, d, (pouvant être infinies) avec $a \neq b$, $c \neq d$, il existe une fonction uniforme $f(z)$, méromorphe excepté à l'origine et à l'infini qui sont des singularités essentielles, et telles que a et b soient des valeurs exceptionnelles locales de Picard à l'origine et c et d des valeurs exceptionnelles de Picard à l'infini.*

Désignons par $S(a, b)$ la surface universelle de recouvrement de la w-sphère ponctuée en $w = a$ et $w = b$, c'est-à-dire la surface de Riemann de $\log\left(\frac{w-a}{w-b}\right)$ pour a et b finis, (avec une expression semblable si l'un est infini) et par $S(c, d)$ la surface universelle de recouvrement de la w-sphère ponctuée en $w = c$ et $w = d$.

Fendons un feuillet de $S(a, b)$ le long d'un segment σ_1, et un feuillet de $S(c, d)$ le long d'un segment σ_2, σ_1 et σ_2 recouvrant le même segment du w-plan, un segment qui ne rencontre aucun des points a, b, c, d. Raccordons $S(a, b)$ et $S(c, d)$ le long de σ_1 et σ_2, nous obtenons une surface de Riemann R recouvrant la w-sphère. On voit immédiatement que la surface R est doublement connexe et de genre o et que les points le long desquels les surfaces initiales sont raccordées constituent sur R une courbe fermée simple Σ frontière des deux parties de R.

D'après le théorème général d'uniformisation R peut être représenté conformément sur un domaine annulaire D dans le plan z :

$$0 \leq \rho_1 < |z| < \rho_2 \leq \infty .$$

Montrons maintenant que chaque frontière se réduit à un point. En fait Σ correspond à une courbe fermée simple C séparant les deux frontières de D. La partie D^* de D bornée par C et par $|z| = \rho_1$ correspond à $S(a, b)$ fendue le long de σ, ou à $S(c, d)$ fendue le long de σ_2. Supposons que ce soit $S(a, b)$. La fonction $\mathfrak{h} = \log\left(\frac{w-a}{w-b}\right)$ applique $S(a, b)$ fendue le long de σ, sur le $\mathfrak{h}$-plan fini fendu le long d'un arc analytique σ' (pourvu que a et b soient finis avec une expression semblable si l'un est infini)

Dans la représentation conforme du $\mathfrak{h}$-plan sur le z-plan ce dernier domaine correspond à D avec $\mathfrak{h} = \infty$ correspondant à la frontière $|z| = \rho_1$. Cette dernière doit donc se réduire au point $z = 0$ puisque dans une représentation

conforme un point frontière ne peut correspondre à une courbe frontière. Donc $\rho_1 = 0$. De même la frontière $|z| = \rho_2$ de D se réduit au point $z = \infty$. D est donc simplement la z-sphère ponctuée en $z = 0$ et $z = \infty$. La fonction $w = f(z)$ appliquant la sphère ainsi ponctuée sur R est donc uniforme et méromorphe sauf aux points $z = 0$ et $z = \infty$. La structure de la surface R montre que ces points sont des singularités essentielles de $f(z)$. De plus a et b sont des valeurs locales exceptionnelles de Picard au voisinage de $z = 0$ et c et d des valeurs exceptionnelles locales de Picard au voisinage de $z = \infty$. Le théorème 1 est donc démontré.

Corollaire 1. — *Il existe une fonction uniforme sur la sphère complexe ayant deux singularités essentielles et quatre valeurs exceptionnelles locales de Picard distinctes en ces deux singularités.*

Il suffit de prendre a, b, c, d distinctes dans ce qui précède. Une généralisation immédiate conduit au résultat suivant :

Théorème 2 — *Étant donné 2 n valeurs complexes a_j, b_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ avec $a \not\equiv b$ il existe une fonction uniforme $f(z)$ méromorphe sur la z- sphère complexe excepté en n singularités essentielles $p_1, \ldots, p_n$ et telles que a_j et b_j soient des valeurs exceptionnelles locales de Picard dans le voisinage de p_j, $(j = 1, 2, \ldots n)$.*

Soit $S(a_j, b_j)$ la surface universelle de recouvrement de la w-sphère ponctuée en $w = a_j$ et $w = b_j$. Comme plus haut nous racorderons ces surfaces (ce que l'on peut faire de plusieurs façons) pour obtenir une surface de Riemann R recouvrant le w-plan. Il est nécessaire de s'arranger pour que les différentes lignes de connexion ne se coupent pas, ce qui peut se faire en prenant des lignes de connexion distinctes sur des segments disjoints du w-plan.

On voit immédiatement que R est n-uplement connexe et de genre 0 et la même démonstration que ci-dessus montre qu'elle est conformément équivalente à la z-sphère ponctuée en n points $p_1, \ldots, p_n$ correspondant aux n parties de la frontière idéale de la surface R.

La fonction $w = f(z)$ représentant conformément la z-sphère ainsi ponctuée sur R est uniforme et méromorphe excepté aux points $p_1, \ldots, p_n$. On voit immédiatement que ce sont des singularités essentielles de $f(z)$ et que a_j et b_j sont des valeurs locales exceptionnelles au voisinage de p_j $(j = 1, \ldots, n)$.

Corollaire 2. — *Il existe une fonction uniforme sur la sphère complexe avec n singularités essentielles et 2 n valeurs exceptionnelles locales de Picard en ces n-singularités.*

On peut réaliser de plusieurs façons une fonction méromorphe définie pour z fini avec une singularité essentielle à z infini et telle qu'elle ait ou non des

valeurs exceptionnelles locales de Picard à $z=\infty$. Elle représentera conformément le z-plan fini sur une surface de Riemann parabolique sur le plan w. Dans le cas où il y a une valeur exceptionnelle cette dernière peut être choisie arbitrairement. En se servant de telles surfaces au lieu de surfaces S (a_j, b_j) dans la construction employée dans la démonstration du théorème 2 nous voyons que pour une fonction à n singularités essentielles le comportement des valeurs locales exceptionnelles de Picard est complètement indépendant. En chaque singularité il peut y avoir 0, 1 ou 2 telles valeurs exceptionnelles et ces valeurs avec différentes singularités peuvent être choisies arbitrairement. Cela complète la réponse à une question partiellement traitée par Dugué ([2], p. 76-79). Nous résumons tout cela dans le théorème suivant :

Théorème 3. — *Il existe une fonction uniforme sur la sphère complexe ayant n singularités essentielles telles que en chaque singularité il puisse y avoir* 0, 1 *ou* 2 *valeurs locales exceptionnelles de Picard et ces valeurs avec différentes singularités sont sans restrictions mutuelles.*

3. La méthode précédente peut être utilisée aussi bien pour traiter au lieu des valeurs exceptionnelles de Picard, les valeurs régulières par rapport à 2([2], p. 80). Soit $f(z)$ ayant le point p pour singularité essentielle et soit la valeur finie a telle que dans le voisinage de p chaque racine de $f(z)-a$ est double. On appellera alors a, une valeur locale régulière par rapport à 2 de $f(z)$ au voisinage de p. Pour a infini on remplacera $f(z)-a$ par $\frac{1}{f(z)}$ dans la définition.

On peut facilement construire une surface de Riemann parabolique sur la w-sphère n'ayant aucun point en $w=a$ et tel que tout point sur cette surface au-dessus de $w=b$ et de $w=c$ soit un point de ramification d'ordre 2. Par exemple on prendra la surface de Riemann sur laquelle la fonction

$$w=\frac{a(b-c)\cos z+(ab+ac-2bc)}{(b-c)\cos z+(2a-b-c)}$$

représente le z-plan fini dans le cas où a, b, c sont finis et avec expression analogue si l'un d'eux est infini. Pour cette fonction a est une valeur exceptionnelle de Picard et b et c sont régulières par rapport à 2. On peut de même construire une surface de Riemann parabolique sur la w-sphère et telle que tout point sur cette surface au-dessus des points distincts $w=a$, b, c et d soit un point de ramification du second ordre. Telle est la surface de Riemann de l'intégrale elliptique

$$\eta=\int^{w}\frac{dw}{\sqrt{(w-a)(w-b)(w-c)(w-d)}}$$

au cas où a, b, c, d sont finis avec une expression correspondante si l'un d'eux est infini.

En associant n surfaces ($n \geqq 2$) de ces types par des raccordements analogues à ceux du paragraphe 2 on obtient une surface de Riemann recouvrant la w-sphère conformément équivalente à la z-sphère complexe ponctuée en n points et la fonction $f(z)$ représentant l'une sur l'autre a n singularités essentielles. Par construction nous pouvons avoir en chacune de ces singularités essentielles soit une valeur locale de Picard exceptionnelle et deux valeurs localement régulières par rapport à 2 ou quatre valeurs localement régulières par rapport à 2. Ces valeurs peuvent évidemment être choisies sans restrictions mutuelles. Ceci répond à une question posée par Dugué([2], p. 80). Nous résumons ces remarques dans le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — *Il existe une fonction uniforme sur la sphère complexe ayant n singularités essentielles telles qu'en chaque singularité particulière il y ait soit une valeur locale exceptionnelle de Picard et deux valeurs localement régulières par rapport à 2 soit quatre valeurs localement régulières par rapport à 2 et ces valeurs sont sans restrictions mutuelles.*

Plus généralement, en utilisant les surfaces du type considéré au paragraphe 2, nous pouvons avoir en certaines des singularités deux valeurs locales exceptionnelles de Picard indépendantes des autres.

4. De plus M. Dugué a soulevé la question ([2], p. 80) de savoir si une fonction sur la z-sphère ayant une infinité de singularités essentielles pouvait avoir une infinité de valeurs exceptionnelles locales de Picard distinctes. Une telle fonction aurait naturellement aussi d'autres singularités de type plus compliqué. Nos méthodes peuvent servir à établir l'existence de telles fonctions ayant une infinité de valeurs exceptionnelles locales de Picard distinctes. En fait nous allons construire maintenant une surface telle qu'il y ait juste une singularité de plus que l'infinité de singularités essentielles. Cette singularité de type plus compliqué sera la limite des singularités essentielles pour lesquelles il y a deux valeurs exceptionnelles de Picard, toutes étant distinctes.

Prenons une suite de surfaces $S(a_j, b_j)$ $(j = 1, 2, \ldots)$, $S(a_j, b_j)$ étant la surface universelle de recouvrement de la w-sphère ponctuée en a_j et b_j $(a_j \neq b_j)$. Supposons qu'aucun des points a_j, b_j n'est à une distance $\sqrt{2}$ de l'axe positif réel dans le plan w. Soit la surface $S(a_1, b_1)$ fendue le long d'un segment σ_1, sur un feuillet recouvrant le segment $(0, 1)$ de l'axe réel et soit la surface $S(a_j, b_j)$ $(j > 1)$, fendue le long de segments σ_{j-1}' et σ_j sur le même feuillet recouvrant respectivement les segments $(2j-4, 2j-3)$ et $(2j-2, 2j-1)$.

Raccordons les surfaces $S(a_j, b_j)$ et $S(a_{j-1}, b_{j+1})$ $(j = 1, 2, \ldots)$ le long des segments respectifs σ_j et σ_j'. De cette façon nous obtenons une surface de Riemann R de type plan recouvrant la w-sphère et de connectivité infinie. Par le théorème général d'uniformisation on peut la représenter conformément sur un domaine D consistant en $|Z| < R \leqq \infty$ (qui est *à priori* soit un cercle, soit le

plan fini) fendu le long d'un ensemble infini $\mathfrak{S}$ d'arcs circulaires centrés en $z=0$ que nous prenons pour image d'un point sur $S(a_1, b_1)$. Nous allons prouver que R est infini et que les arcs circulaires se réduisent à des points qui ont pour unique point d'accumulation $z=\infty$. A $S(a_1, b_1)$ fendue comme ci-dessus le long de σ_1 correspond un sous-domaine doublement connexe Δ_1 de D. Une composante de la frontière de Δ_1 est un arc circulaire dans l'ensemble $\mathfrak{S}$ tandis que l'autre est une courbe C analytique par morceaux correspondant à σ_1 et séparant le point $z=0$ du reste de la frontière de D. On voit que la première composante se réduit à un point que nous appellerons p, comme dans les considérations du § 2. A $S(a_j, b_j)$ $(j>1)$ fendue le long de σ'_{j-1} et σ_j correspond un sous domaine triplement connexe Δ_j de D. Deux composantes de la frontière de Δ_j sont des courbes C_{j-1} et C_j analytiques par morceaux et correspondant à σ'_{j-1} et σ_j respectivement. La troisième est un arc circulaire de l'ensemble $\mathfrak{S}$ dont on voit comme ci-dessus qu'il se réduit à un point que nous appellerons p_j. Chaque courbe C_j sépare $z=0$, tous les $C_i (i<j)$, et tout p_i $(i\leq j)$ du reste de la frontière de D.

Soit D_j $(j>1)$, le domaine doublement connexe borné par C_{j-1} et C_j et soit M_j son module conforme, c'est-à-dire, si D_j est représenté conformément sur un anneau circulaire de rayons r_j et R_j, $M_j=\frac{1}{2}\log\frac{R_j}{r_j}$. Il est bien connu que ceci est de même le module de D_j pour la famille de courbes dans D_j séparant C_{j-1} et C_j [3, 1, 5]. Nous allons montrer que les nombres M_j ont une borne différente de zéro.

Considérons en effet le rectangle sur $S(a_j, b_j)$ couvrant le rectangle du w-plan défini par $2j-5<\mathcal{R}w<2j$, $-1<\mathcal{I}w<1$ et situé sur le même feuillet que σ'_{j-1} et σ_j. Un tel rectangle existe étant donné la condition imposée à a_j et b_j. Ce rectangle fendu le long de σ'_{j-1} et de σ_j est un domaine triplement connexe. Faisons jouer aux composantes de sa frontière σ'_{j-1}, σ_j et au périmètre du rectangle le rôle de $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$ dans ([4], p. 347). Alors pour la valeur spéciale M [1, 1, 0] de l'invariant conforme défini là nous déduisons d'une manière habituelle (*voir* [4], p. 349) $M(1, 1, 0)<M_j$. Ce module du domaine triplement connexe ci-dessus est positif et a une valeur indépendante de j. Cela prouve que les nombres M_j ont une borne inférieure positive. Il s'en suit maintenant d'un principe bien connu de Grötzch [3] que R est infini et de plus que les courbes C_j tendent vers $z=\infty$ quand $j\to\infty$. En particulier par conséquent les points p_j tendent vers l'infini. Finalement R est conformément équivalent à la z-sphère ponctuée aux points p_j $(j=1, 2, \ldots)$ et $z=\infty$. La fonction $f(z)$ représentant conformément ce domaine sur R est par conséquent méromorphe excepté aux points $z=p_j, \ldots$ $(j=1, 2, \ldots)$ et $z=\infty$. On voit maintenant que les points p_j sont des singularités essentielles de $f(z)$ avec a_j et b_j comme valeurs exceptionnelles locales de Picard au voisinage de p_j. Le point $z=\infty$ est une singularité plus compliquée, la seule en dehors des singularités essen-

tielles. Ainsi il peut y avoir une infinité de valeurs distinctes parmi les a_j et les b_j. Toutes peuvent même être distinctes. Nous résumerons ces résultats dans l'énoncé suivant :

THÉORÈME 5. — *Il existe une fonction uniforme sur la sphère complexe avec une infinité dénombrable de singularités essentielles qui ont un point unique d'accumulation, telle que en chacune des singularités essentielles particulières il y ait deux valeurs locales exceptionnelles de Picard et telles que toutes ces valeurs pour les différentes singularités essentielles soient distinctes.*

5. Nous observons aussi que nous pouvons faire des constructions semblables pour obtenir des fonctions définies non sur la sphère complexe mais sur des surfaces de genre plus élevé. Par exemple si nous prenons les surfaces $S(a, b)$ et (c, d) dont nous nous sommes occupés au paragraphe 2 et si nous les raccordons non suivant un mais suivant deux segments nous obtenons une surface R couvrant la w-sphère conformément équivalente à une surface τ de genre 1 (tore) ponctuée en deux points. La fonction représentant conformément τ ainsi ponctuée sur R aura en ces points des singularités essentielles et sera ailleurs méromorphe. Au voisinage de l'un de ces points a et b seront des valeurs locales exceptionnelles de Picard et au voisinage de l'autre c et d le seront aussi. Ainsi nous pouvons avoir le maximum possible *a priori* de valeurs locales exceptionnelles de Picard dans ce cas également.

Des constructions semblables peuvent être effectuées pour le cas de davantage de singularités et pour des surfaces de genre supérieures à 1.

6. Examinons maintenant les ensembles exceptionnels d'une fonction au voisinage d'un continuum. Soit Γ un continuum sur la z-sphère et D un de ses domaines complémentaires simplement connexes. Par voisinage de Γ dans D nous entendons le complément relativement à D d'un sous-ensemble compact de D. Soit $f(z)$ uniforme et méromorphe au voisinage de Γ dans D. Par valeur exceptionnelle locale de $f(z)$ au voisinage de Γ ([2], p. 72) nous entendons une valeur a telle que $f(z) - a$ n'a pas de zéro dans quelque voisinage [peut-être plus petit que le domaine de définitions de $f(z)$] de Γ dans D (pour la valeur ∞ nous remplaçons $f(z) - a$ par $\frac{1}{f(z)}$ dans cette définition).

Nous allons maintenant montrer que pour une fonction dans un domaine borné par des continuums disjoints, les ensembles de valeurs exceptionnelles dans les voisinages des différentes parties de la frontière sont essentiellement indépendants. Nous montrerons d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME 6. — *Soit E_i l'ensemble des valeurs locales exceptionnelles dans le voisinage de la frontière d'un domaine D_i hyperbolique simplement connexe pour une fonction méromorphe $f_i(z)$ définie dans ce domaine $(i = 1, 2)$. Il existe un do-*

maine doublement connexe D^* borné par deux continuums C_1 et C_2 et une fonction $f(z)$ uniforme et méromorphe dans D^* telle que E_i est l'ensemble des valeurs locales exceptionnelles de $f(z)$ dans le voisinage de C_i $(i = 1, 2)$.

Soit R_i $(i = 1, 2)$ la surface de Riemann recouvrant la w-sphère sur laquelle D_i est représentée par f_i. Appelons $\mathcal{S}$ une surface de Riemann elliptique recouvrant uniformément la w- sphère. Raccordons chacune des deux surfaces R_1 et R_2 à $\mathcal{S}$ le long d'un segment de la manière habituelle (les deux segments ne se coupant pas) nous obtenons une surface de Riemann doublement connexe R de type planaire et recouvrant la w-sphère. Si R_1 et R_2 couvrent des points communs sur la w-sphère l'introduction de $\mathcal{S}$ n'est pas nécessaire. Comme au paragraphe 2, R peut être représenté conformément sur un domaine doublement connexe D^* dans le z-plan, soit une couronne circulaire. Soient C_i, $(i = 1, 2)$ la partie de la frontière de D^* adjacente à la portion de D^* provenant de R_i. La démonstration du paragraphe 2 appliquée à ce cas montre que chacun des C_1, et C_2 est un continuum non dégénéré. Soit $f(z)$ la fonction représentant D^* conformément sur R. Alors $f(z)$ est uniforme et méromorphe dans D^* et nous vérifions immédiatement que E_i $(i = 1, 2)$ est l'ensemble de valeurs locales exceptionnelles de $f(z)$ au voisinage de C.

D'une manière analogue nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 7. — *Soit E_i l'ensemble des valeurs locales exceptionnelles au voisinage de la frontière d'un domaine D_i hyperbolique simplement connexe pour une fonction méromorphe $f_i(z)$ définie dans ce domaine $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Il existe un domaine D de connexion n borné par des continuums C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et une fonction $f(z)$ uniforme et méromorphe dans D^* telle que E_i est l'ensemble des valeurs exceptionnelles de $f(z)$ au voisinage de C_i.*

Corollaire 3. — *Soit E_i l'ensemble des valeurs locales exceptionnelles au voisinage de la frontière d'un domaine simplement connexe D_i avec une frontière analytique Γ_i pour une fonction méromorphe $f_i(z)$ définie dans ce domaine et ayant Γ_i comme courbe singulière $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Il existe un domaine D^* d'ordre de connexion borne par des courbes analytiques C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et une fonction $f(z)$ uniforme et méromorphe dans D^* telle que E_i soit l'ensemble des valeurs locales exceptionnelles de $f(z)$ au voisinage de C_i et C_i une courbe singulière de $f(z)$.*

Cela se déduit immédiatement du théorème 7 avec la remarque additionnelle que le prolongement de $f(z)$ à travers C_i impliquerait le prolongement de $f(z)$ à travers Γ_i. En particulier l'ensemble des valeurs locales exceptionnelles peuvent n'avoir aucun élément en commun.

De plus nous pouvons traiter de même les ensembles locaux exceptionnels pour deux arcs frontières sur une partie de la frontière donnée. Soit D un

domaine simplement connexe et Γ un arc frontière de D (au sens naturel de correspondance frontière, c'est-à-dire, de bouts premiers, si nous permettons le type le plus général de frontière pour D). Par voisinage de Γ nous comprenons un voisinage dans la topologie de D fermée comme un espace topologique par l'adjonction de bouts premiers. La définition de valeur locale exceptionnelle est alors analogue à celle pour la totalité de la frontière, en observant que nous ne pouvons parler que des valeurs de la fonction aux points du voisinage intérieur de D. Le résultat suivant montre que les ensembles de valeurs locales exceptionnelles pour deux arcs frontières sont indépendants.

THÉORÈME 8. — *Soit* E_i *l'ensemble des valeurs locales exceptionnelles au voisinage de la frontière d'un domaine hyperbolique simplement connexe* D_i, *pour une fonction méromorphe* $f_i(z)$ *définie dans ce domaine* $(i = 1, 2)$. *Alors il existe un domaine* D *simplement connexe avec des arcs frontières* Γ_1, Γ_2, *tels que* $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ *est la frontière de* D* *et* $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ *consiste seulement en des extrémités de* Γ_1 *et* Γ_2 *et une fonction* $f(z)$ *méromorphe dans* D* *telle que* E_i *est l'ensemble des valeurs locales exceptionnelles de* $f(z)$ *au voisinage de* Γ_i $(i = 1, 2)$.

Soit R_i la surface de Riemann recouvrant la w-sphère sur laquelle le D_i est représenté conformément par f_i $(i = 1, 2)$. Nous pouvons faire l'hypothèse que R_1 et R_2 recouvrent un point commun sur la w-sphère puisque autrement on pourrait y remédier en raccordant à l'une d'elle une surface de Riemann elliptique recouvrant uniformément la sphère (sans changer les valeurs locales exceptionnelles correspondantes). Soit $w = a$ le point ainsi recouvert. Soit τ_i un arc semi-ouvert dans R_i $(i = 1, 2)$, recouvrant un arc dans la w-sphère, allant d'un point p_i sur R_i recouvrant a à un point frontière de R_i sans passer par un point de ramification algébrique de R_i. Fendons les surfaces R_i $(i = 1, 2)$, respectivement le long de τ_i et raccordons-les le long des segments σ_i ayant une extrémité à p_i, recouvrant le même segment dans le w-plan et ne rencontrant pas τ_i. De cette façon nous obtenons une surface de Riemann R simplement connexe et du type hyperbolique. Il y a alors un domaine D* simplement connexe hyperbolique dans le z-plan qui est représenté conformément sur R par une fonction méromorphe $f(z)$. Ce domaine a deux éléments frontières provenant des points p_i et ces derniers divisent sa frontière en deux arcs Γ_1 et Γ_2 pour lesquels $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ ont évidemment les propriétés de l'énoncé du théorème 8. Soit Γ_1 l'arc contenant des éléments correspondants aux éléments frontières de D_1.

Nous allons montrer que E_i est l'ensemble des valeurs locales exceptionnelles de $f(z)$ au voisinage de Γ_i $(i = 1, 2)$. En fait les valeurs qui ne sont pas des valeurs locales exceptionnelles de $f(z)$ dans le voisinage de Γ_i sont des valeurs prises une infinité de fois par $f(z)$ dans tout voisinage de Γ_i. Les valeurs prises par $f(z)$ dans un voisinage V de Γ_i consistent dans les valeurs de la w-sphère couvertes par un voisinage V_1 de la frontière de R_i les points de τ_i étant enlevés

et dans les valeurs couvertes par un voisinage V_2 sur R_i d'un sous arc fermé de τ_i. Puisque aucune valeur n'est prise par $f(z)$ plus d'un nombre fini de fois dans la portion de V correspondant à V_2 aucune valeur locale exceptionnelle de E_i n'est perdue. D'un autre côté puisque chaque point de τ_i couvre au plus un point de la w-sphère, aucune valeur locale exceptionnelle n'est ajoutée. Ainsil'ensemble des valeurs locales exceptionnelles de $f(z)$ au voisinage de Γ_i est E_i $(i = 1, 2)$, ce qui prouve le théorème 8.

Corollaire 4. — *Soit* E_i *l'ensemble des valeurs locales exeptionnelles au voisinage de la frontière d'un domaine simplement connexe* D_i *à frontière analytique pour une fonction méromorphe* $f_i(z)$ *définie dans ce domaine et ayant sa frontière pour courbe singulière* $(i = 1, 2)$.

Il existe un domaine simplement connexe D^* *à une frontière analytique* Γ *composee de deux arcs* Γ_1 *et* Γ_2 *dont l'intersection consiste uniquement en leurs extrémités et une fonction* $f(z)$ *méromorphe dans* D^*, *ayant comme* Γ *courbe singulière et telle que* E_i *est l'ensemble des valeurs locales exceptionnelles de* $f(z)$ *dans le voisinage de* Γ_i $(i = 1, 2)$.

Dans ce but nous n'avons qu'à choisir τ_i dans la construction du théorème 8 $(i = 1, 2)$ de telle sorte que τ_i recouvre un arc de Jordan non analytique sur la w-sphère. Alors $f(z)$ ne peut être prolongée à travers les arcs provenant des arcs τ_i et comme dans la preuve du corollaire 3 elle ne peut être prolongée à travers les arcs de Γ provenant des frontières de D_i. En particulier les ensembles E_1 et E_2 peuvent ne pas avoir d'éléments communs. Remarquons enfin que ces résultats peuvent être combinés de bien des façons avec ceux des sections précédentes. En fait la méthode développée ici sert à traiter de telles questions pour les propriétés de fonctions dépendant essentiellement de la géométrie des surfaces de Riemann et non de considérations analytiques telles que certains procédés d'exhaution, etc. bien que des résultats puissent aussi être obtenus dans cette dernière direction.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] L. Ahlfors et A. Beurling, *Invariants conformes et problèmes extrémaux* (*X^e Congrès des Mathématiciens scandinaves*, 1946).

[2] Daniel Dugué, *Vers un théorème de Picard global* (*Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.*, t. 69, 1952, p. 65-81).

[3] H. Grötzsch, *Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung, I* (*Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse*, vol. 80, 1928, p. 367-376).

[4] James A. Jenkins, *Some problems in conformal mapping* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 67, 1949, p. 327-350).

[5] James A. Jenkins, *Some results related to extremal length* (*Contributions to the Theory of Riemann Surfaces, Annals of Mathematics Studies*, n° 30, 1953, p. 87-94).

NOTE SUR L'ARTICLE PRÉCÉDENT

Par M. Daniel DUGUÉ.

Je remercie M. Jenkins de cette rectification de l'erreur contenue dans le Mémoire cité. Je voudrais très rapidement indiquer l'origine de cette erreur et ce qui subsiste des résultats que j'avançais. La relation ($\mathcal{R}$), à laquelle doit satisfaire la fonction considérée (p. 68) subsiste. La conclusion erronée que j'en ai déduite provient de l'existence possible des deux points doubles raccordant le voisinage d'un point singulier au voisinage de l'autre point singulier sur la surface de Riemann. Ceci modifie le comportement du radical qui intervient page 69. Ces points doubles jouent un rôle très particulier pour ces fonctions et les fonctions analogues, puisque, sur l'exemple de M. Jenkins, il existe un contour les rejoignant qui isole les deux singularités. Il ne saurait évidemment exister d'autres couples ayant cette propriété. D'une manière précise, si, sur la surface de Riemann, il existe un feuillet ayant une ramification logarithmique en a ou en b (valeurs exceptionnelles au premier point) ayant deux ramifications algébriques avec un feuillet ayant une ramification logarithmique en c ou d (valeurs exceptionnelles au second point), il ne saurait exister un autre couple de feuillets ayant les mêmes propriétés. On peut décrire superficiellement le phénomène en disant que la ligne joignant ces deux points doubles raccorde deux fonctions ayant une seule singularité.

Subsistent également les exemples des autres cas de répartition des valeurs exceptionnelles. En particulier, le cas de deux valeurs exceptionnelles en chaque singularité mais l'une étant commune aux deux points. Dans ce cas, l'exemple que je donne montre que la surface peut être sans point de ramification de Jenkins.

Il serait intéressant de construire effectivement les fonctions ayant cette répartition des singularités. Les résultats de M. Jenkins sont des théorèmes d'existence fondés sur la théorie la plus générale de la représentation conforme. Il serait utile de trouver un procédé permettant de calculer ces fonctions avec une approximation arbitraire.

SUR LES

FONCTIONS HOLOMORPHES

DONT

LES DÉRIVÉES ADMETTENT UNE VALEUR EXCEPTIONNELLE

PAR M. KING-LAI HIONG.

Concernant la théorie des familles normales, les valeurs lacunaires de Picard jouent un rôle important. Dans une étude précédente (1), nous avons essayé d'introduire des valeurs exceptionnelles au sens de M. Borel. Mais comme il n'est pas commode, pour le problème qui nous occupait, d'utiliser directement une telle valeur, à cause de l'intervention de l'ordre de la fonction dans sa définition, c'était au moyen d'une conséquence de l'hypothèse que les fonctions considérées admettent deux valeurs exceptionnelles que nous avons pu arriver à obtenir quelques résultats.

Ici nous considérons une catégorie de valeurs exceptionnelles que nous définissons sans intervention de l'ordre de la fonction et que nous convenons d'appeler *valeurs exceptionnelles* B. Nous démontrons que si une fonction $f(z)$ méromorphe dans le cercle unité, telle que $T(r) : \log\frac{1}{1-r}$ tend vers l'infini pour $r \to 1$, c'est-à-dire que le théorème de Picard-Borel s'applique, elle ne peut admettre plus de deux valeurs exceptionnelles B.

Par considération des valeurs exceptionnelles ainsi définies, nous trouvons, avec plus de précision, des résultats analogues à tous ceux obtenus antérieurement concernant les valeurs exceptionnelles de Picard-Borel. Puis nous pouvons étudier le cas où intervient la dérivée de chaque fonction considérée, même le cas où la dérivée intervenue est d'un ordre quelconque.

Nous nous plaçons notamment dans ce dernier cas pour le présent Mémoire.

(1) *Ann. Éc. Norm. sup.*, (3), t. LXX, fasc. 2, 1953, p. 149-180.

Pour éliminer les valeurs initiales des dérivées qui peuvent s'introduire dans l'inégalité que nous prenons comme point de départ, nous commençons par établir une inégalité permettant de majorer $m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right)$, inégalité qui est plus précise que celle que nous avons donné dans le travail précédent et qui ne contient que la valeur initiale $f(0)$ comme celle de M. R. Nevanlinna relative à $m\left(r, \frac{f'}{f}\right)$. Ensuite, nous trouvons pour $m\left(r, \frac{f^{k}-1}{f^{k-1}}\right)$ une limitation qui ne contient pas de valeurs initiales des dérivées, et qui est plus précise aussi que celle déjà obtenue antérieurement (2).

Pour établir le théorème de base sur la croissance d'une fonction, nous partons d'une identité due à M. Bureau comme dans la démonstration de Valiron pour le théorème de M. Miranda. Au moyen des résultats précédents, nous majorons alors les valeurs moyennes logarithmiques que contient l'inégalité déduite de cette identité. Puis, l'application d'un lemme que nous avons établi ailleurs nous conduit au résultat en vue.

En ce qui concerne les familles de fonctions, nous introduisons une nouvelle notion pour bien préciser un fait, c'est celle d'une *valeur également exceptionnelle*. En nous appuyant sur le théorème de base et à l'aide d'un résultat de M. Paul Montel, nous arrivons alors à obtenir des critères de normalité ou de quasi-normalité (3).

En terminant, je tiens à exprimer mes vifs remerciements à tous ceux qui sont venus en aide dans mon état de santé gravement ébranlée, en particulier à la Commission des Fonds de l'Université de Tsing-Hua dont la subvention me facilite grandement la continuation de mon traitement en même temps que celle de mes recherches.

CHAPITRE I.

Préliminaires.

I. — Rappel de deux propositions déjà établies et d'une inégalité connue.

1. Concernant les fonctions croissantes, nous avons démontré (4) selon le principe de M. Borel les lemmes suivants qui sont plus généraux que celui de M. Bureau et plus commodes à appliquer.

Lemme A. — *Soient* $U(r)$ *une fonction positive continue non décroissante pour* $0 < r < 1$ *et* $\omega(r)$ *une fonction positive et finie pour cet intervalle de* r *; si, en dési-*

(2) *C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 2279.

(3) Une partie des résultats du présent travail a été communiquée à l'Académie des Sciences de Paris (séance du 25 avril 1955).

(4) *C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 1939-1941.

gnant par a, b, c des constantes numériques et en supposant $a \geq 0$, $b > 0$, $c > 0$, l'inégalité

$$(1) \qquad U(r) \leq a\,\omega(r) + b \log \frac{1}{R - r} + c \overset{+}{\log} U(R) \qquad (r < R < 1)$$

est vérifiée pour $r \geq r_0 > 0$, on aura alors pour $r \geq r_0$ l'inégalité

$$(2) \qquad U(r) < A\,\omega(r) + B \log \frac{2}{1 - r},$$

où A, B *sont des constantes numériques.*

Lemme B. — *Soient $U(r)$ une fonction positive continue non décroissante pour $0 < r < 1$ et $\omega(r)$ une fonction positive et finie pour le même intervalle; si, en désignant par p, α, β, γ des constantes numériques et en supposant $p \geq 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 1$, $\gamma > 1$, on a*

$$(3) \qquad U(r) < \frac{1}{(R - r)^p}\left[\alpha\,\omega(r) + \beta \log \frac{1}{R - r} + \gamma \overset{+}{\log} U(R)\right]$$

pour $0 < r_0 \leq r < R < 1$, alors on aura pour $r \geq r_0$ et $r' = \frac{r + 1}{2}$,

$$(4) \qquad U(r) < \frac{1}{(1 - r)^p}\left[A\big(\omega(r) + \omega(r') + 1\big) + B \log \frac{2}{1 - r}\right],$$

A, B *étant deux constantes numériques dont* A *ne dépend que de p, α, β, γ, tandis que* B *ne dépend que de p, β et γ.*

Remarque. — Soit R' une valeur inférieure à 1; au lieu de (4), on peut prendre aussi, pour $r_0 \leq r < R'$ et $r' = \frac{r + R'}{2}$, l'inégalité

$$(4') \qquad U(r) < \frac{1}{(R' - r)^p}\left[A\big(\omega(r) + \omega(r') + 1\big) + B \log \frac{2}{R' - r}\right].$$

2. Rappelons encore une inégalité connue dont nous aurons besoin fréquemment.

Soit $F(z)$ une fonction méromorphe; si l'on désigne par b_ν ses pôles dans le cercle $|z| < R$, on a

$$(5) \qquad \log|F(z)| \leq \frac{R + r}{R - r} m(R, F) - \frac{R - r}{R + r} m\left(R, \frac{1}{F}\right) + \sum_\nu \log \left|\frac{R^2 - \bar{b}_\nu z}{R(z - b_\nu)}\right|$$

pour $|z| = r < R < 1$.

II. — Limitations de certaines valeurs moyennes logarithmiques.

3. Nous avons obtenu antérieurement (5) deux lemmes qui fournissent le

(5) Mémoire cité dans l'Introduction.

premier pour $\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right)$ une limitation ne contenant aucune valeur initiale et le second pour $\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right)$ une limitation ne contenant que la première valeur initiale $f(0)$ sous la forme $\log|f(0)|$. Nous nous sommes aperçu que ces énoncés ne sont pas suffisamment précis et qu'ils manquent de rigueur pour certains points de la démonstration. Nous les rappelons améliorés ici avec une démonstration complémentaire.

LEMME I. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité qui ne s'annule que p fois. On suppose que $f(0)\neq 0$ et l'on désigne par $a_\nu (\nu = 1, \ldots, p)$ ses zéros; de chaque a_ν comme centre on décrit un cercle (γ_ν) de rayon arbitrairement petit δ_ν. Puis soient d un nombre positif tel que*

$$|a_1| \geq d, \qquad |1 - a_p| \geq d, \qquad |a_i - a_j| \geq d \qquad (a_i \neq a_j)$$

et δ_0 le plus petit des δ_ν. Alors, on a pour $0 < r < \rho < 1$ l'inégalité

$$(6) \qquad m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < A_k\left(p + \log\frac{1}{r} + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \log\frac{1}{\delta_\nu}\right) + B_k \log\frac{1}{\rho - r} + C_k \log V_0(\rho, f),$$

où

$$V_0(r, f) = m(r, f) + T\left(r, \frac{1}{f}\right),$$

A_k, B_k, C_k sont des constantes numériques ne dépendant que de d à part k (6).

De la formule de Poisson-Jensen, nous avons déduit l'égalité

$$(7) \qquad \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[\frac{f'}{f}\right] = \frac{k!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \frac{2Re^{i\varphi}}{(Re^{i\varphi} - z)^{k+1}} d\varphi + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left[\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(z - a_\nu)^k} + \frac{(k-1)!\,\bar{a}_\nu^{k-1}}{(R^2 - \bar{a}_\nu z)^k}\right].$$

Désignons par (C_r) le cercle $|z| = r$ et faisons d'abord varier r entre 0 et $R_1 = |a_p|$. Pour chaque valeur de r, choisissons une valeur R de façon que $\frac{d}{2} \leq R - r < d$ et que pour les zéros a_ν intérieurs au cercle $|z| < R$, on ait

$$R - |a_\nu| \geq \frac{d}{2}.$$

Séparons la sommation de (7) en deux parties; l'une S_1 s'étendant aux zéros a_ν dont les modules $|a_\nu| \leq r$, et l'autre S_2 concernant les zéros $a_{\mu\nu}$ tels que $r < |a_\nu| < R$. En excluant éventuellement de la circonférence $|z| = r$ les points

(6) Dans la suite, nous désignerons toujours par A_k, B_k, C_k, A'_k, ..., α_k, M_k, ... des constantes numériques ne dépendant que de k, s'il n'y a pas d'autres précisions.

situés dans certains (γ_ν), on a

$$|S_1|<(k-1)!\sum_{\nu=1}^{n(r,a)}\left[\frac{1}{\delta_\nu^k}+\frac{1}{2r(R-r)^k}\right],$$

et

$$S_2|<(k-1)!\sum_{\nu}\left[\frac{1}{\delta_0^k}+\frac{|a_\nu|^{k-1}}{|a_\nu|^k(R-r)^k}\right]<(k-1)!\,p\left(\frac{1}{\delta_0^k}+\frac{1}{r(R-r)^k}\right).$$

Il en résulte que l'on peut écrire

$$\left|\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[\frac{f'}{f}\right]\right|<P_k\left[p,\frac{1}{r},\frac{1}{\delta_0},\sum_{\nu=1}^{n(r,a)}\frac{1}{\delta_\nu^k},\frac{1}{R-r},V\right], \tag{8}$$

P_k étant un polynome des arguments dont $V=m(r,f)+m\left(r,\frac{1}{f}\right)$.

De cette inégalité, on déduit aisément

$$\log^+\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right|<A_k'\left(p-\log\frac{1}{r}+\sum_{\nu=n_0}^{n(r,a)}\log\frac{1}{\delta_\nu}\right)+B_k'\log\frac{1}{R-r}+C_k'\log^+V(R,f), \tag{9}$$

où A_k', B_k', C_k' sont des constantes numériques ne dépendant que de k.

En observant alors que $R-r\geq\frac{d}{2}(\rho-r)$ pour $0<r<\rho<1$ et que

$$V(r,f)<V_0(r,f),$$

on arrive à obtenir une inégalité de forme (6).

Maintenant, pour $R_1<r<1$, la sommation de (7) devient plus facile à majorer; on voit de suite que son module est inférieur à

$$(k-1)!\sum_{\nu=1}^{n(r,a)}\left[\frac{1}{|z-a_\nu|^k}+\frac{1}{r(R-r)^k}\right]$$

et l'on trouve l'inégalité

$$\log^+\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right|<A_k''\left(p-\log\frac{1}{r}+\sum_{\nu=1}^{n(r,a)}\frac{1}{\delta_\nu}\right)+B_k''\log\frac{1}{R-r}+C_k''\log^+V(R,f)$$

pour $r<R<1$. Ici R est arbitraire et r peut être aussi voisin de 1 que l'on veut; il suffit de changer R en ρ.

La démonstration s'achève alors immédiatement.

Remarque. — 1° Dans le cas où la fonction a une infinité de zéros, le lemme est valable avec un peu de modification. On considère un cercle (C') de centre O et de rayon $R'(<1)$ aussi voisin de 1 que l'on veut. Dans l'énoncé, on remplace alors $1-|\alpha_p|$ par $R'-|a_\nu|$ $(|a_\nu|<R')$ et p par $\Delta(R',r)=n^*(R',0)-n(r,0)$, $n^*(R,0)$ désignant le nombre des zéros a_ν tels que $|a_\nu|<R$ et dans la démonstration, on prend pour a_p le zéro qui est le plus proche de la circonférence (C').

2° En observant que l'on peut prendre un nombre λ assez grand pour que $n^*(R, o) < \lambda[1 + n(r, o)]$ et en traçant, des centres a_ν, des cercles de même rayon arbitrairement petit δ, l'inégalité analogue à (6) peut être mise sous la forme plus simple

$$(6') \qquad m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < A_k\left(\log\frac{1}{r} + n(r, o)\log\frac{1}{\delta}\right) + B_k \log\frac{1}{\rho - r} + C_k \log V_0(\rho, f)$$

valable pour $o < r < \rho < R'$. H_k et K_k dépendent alors de λ par suite de $n(R', o)$.

4. A l'aide du lemme précédent, on peut établir le suivant :

Lemme II. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité qui ne s'annule que p fois; on conserve les notations et les hypothèses du lemme* I. *En se donnant un cercle (C') de centre O et de rayon quelconque $R'(<1)$ et en désignant par δ_0 le plus petit des δ_ν, ou bien on a pour $o < r < R'$ l'inégalité*

$$(10) \qquad m(r, f) < H_k\left(\log|f(o)| + p + \log\frac{1}{r} + \sum_{\nu=0}^{n(r,0)} \log\frac{1}{\delta_\nu}\right) + K_k \log\frac{2}{\rho - r},$$

ou bien, il existe alors au moins un point z_1 tel que $|f^{(k)}(z_1)| \geq 1$, et en prenant une valeur R_0 telle que $\log|f(z_1)| < \frac{1}{1-r}\log\frac{1}{1-r}$ pour $r \geq R_0$, on a, pour $r_0 \geq R_0$ et $R' < r_0 \leq r < \rho < 1$, l'inégalité

$$(11) \qquad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_k\left(\overset{+}{\log}|f(o)| + p + \log\frac{1}{r} + \sum_{\nu=0}^{n(r,0)} \log\frac{2}{\delta_\nu}\right) + \beta_k \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_k \overset{+}{\log} V_0(\rho, f)\right],$$

où H_k, K_k, α_k, β_k et γ_k sont des constantes numériques dont les deux premières ne dépendent que de d et k et les trois dernières ne dépendent que de k, d et R_0, dans le cas général et de d seulement dans le cas où $k = 1$.

Désignons par (D') le domaine limité par (C') et les circonférences (γ_ν) dont les centres sont intérieurs à (C').

Supposons d'abord que $|f^{(k)}(z)| < 1$ quel que soit le point z intérieur à (D'). Prenons d'une façon arbitraire un nombre positif M. Si l'on a $|f^{(k-1)}(z)| \geq M$ quel que soit z dans (D'), alors on a dans ce domaine

$$\left|\frac{1}{f}\right| \leq \frac{1}{M}\left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right|,$$

puisque f ne s'y annule pas. Eu égard à une propriété de $m(r, f)$ (7), on déduit

(7) Il est facile de démontrer que si l'on exclut de la circonférence $|z| = r$ un nombre fini d'arcs arbitrairement petits, la variation subie par $m(r, f)$ est aussi arbitrairement petite.

de cette inégalité la suivante :

$$(12)\quad m\left(r,\frac{1}{f}\right)<m\left(r,\frac{1}{M}\frac{f^{(k-1)}}{f}\right)<m\left(r,\frac{f^{(k-1)}}{f}\right)+\log\frac{1}{M}+\Delta m \qquad \text{pour} \quad 0<r\leq R',$$

Δm désignant une quantité positive arbitrairement petite pour les δ_ν arbitrairement petits. Or, d'après la formule de Jensen, on a

$$(13)\qquad m(r,f)=m\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log|f(0)|,$$

ce qui s'écrit

$$(14)\qquad m(r,f)<m\left(r,\frac{1}{f}\right)+p\log\frac{1}{d}+\log|f(0)|.$$

Donc en appliquant le lemme I à $m\left(r,\frac{f^{k}}{f}\right)$, on déduit de (12) et (14) une inégalité de la forme

$$(15)\quad V_0(r,f)<A_k\left(\log|f(0)|+p+\log\frac{1}{r}+\sum_{\nu=0}^{\nu=\nu_0}\log\frac{1}{\delta_\nu}\right)+B_k\log\frac{1}{\rho-r}+C_k\log V_0(\rho,f)$$

et l'application du lemme A à cette inégalité donne de suite une inégalité de forme (10).

Supposons maintenant qu'il existe dans (D') au moins un point ζ_{k-1} pour lequel $|f^{(k-1)}(z)|<M$. En intégrant $f^{(k)}(z)$ le long d'une courbe qui joint ζ_{k-1} à un point quelconque z de (D'), nous trouvons comme antérieurement

$$|f^{k-1}(z)|<M+2(\pi+1)=M.$$

Alors on recommence le même raisonnement; en le répétant, on arrive soit à une inégalité de la forme (10), soit finalement à une inégalité qui est

$$|f'(z)|<M_{k-1},$$

$M_1, M_2, \ldots, M_k$ sont des valeurs numériques ne dépendant que de k. Enfin en intégrant $f'(x)$ le long d'un arc de courbe qui joint O à z, on obtient pour tous les points de (D')

$$|f(z)|<|f(0)|+M_k,$$

et par suite

$$(16)\qquad m(r,f)<\overset{+}{\log}|f(0)|+K,$$

K étant une constante numérique qui ne dépend que de k. Cette inégalité entre aussi dans (10).

Maintenant si l'hypothèse que l'on a faite au début n'a pas lieu, il existe alors dans (D') au moins un point z_1 pour lequel $|f^{(k)}(z)|\geq 1$. Distinguons deux cas :

1° $z_1 = 0$. D'après la formule de Jensen, et le lemme I, on obtient

$$(17)\quad m\left(r, \frac{f}{f^{k}}\right) < A_k\left(\log|f(0)| + r + \log\frac{1}{r} + \sum_{\nu=0}^{n(r,0)} \log\frac{1}{\delta_\nu}\right) + B_k \log\frac{1}{\rho - r} + C_k \log V_0(\rho, f);$$

2° $|z_1| > 0$. Appliquons l'inégalité (5) à la fonction $\frac{f^k}{f}$ pour le point z_1; il vient, en posant $r_1 = |z_1|$,

$$(18)\quad m\left(R, \frac{f}{f^{k}}\right) < \frac{4}{(R - r_1)^2} m\left(R, \frac{f^k}{f}\right) + \frac{2}{R - r_1}\left[\log|f(z_1)| + \sum_{\nu} \log\frac{2}{|z_1 - a_\nu|}\right]$$
$$[\nu = 1, \ldots, n(R, 0)].$$

Pour éliminer z_1, on peut prendre une valeur $R_0 > r_1$ suffisamment grande, telle que

$$\log|f(z_1)| < \frac{1}{1 - R}\log\frac{1}{1 - R} \qquad \text{pour} \quad R_0 \leq R < 1,$$

et l'on porte cette borne dans (18). Mais il faut remarquer que R_0 dépend alors de f.

Maintenant, choisissons arbitrairement entre R' et 1 une valeur R'_0 qui ne dépend que de R', par exemple $R'_0 = R' + \frac{1 - R'}{100}$ et posons $H = \frac{1 - R'_0}{R'_0 - R'}$; en prenant une valeur r_0 telle que $r_0 \geq R_0$ et $r_0 \geq R'_0$, on a alors

$$\rho - R < H(R - r_1) \qquad \text{pour} \quad r_0 \leq R < \rho < 1$$

et l'on arrive à écrire (18) sous la forme (11) en changeant R en r.

Dans le cas où $k = 1$, l'élimination de z_1 peut s'effectuer sans introduire la valeur R_0. Supposons que z_1 soit le plus voisin de 0 parmi les points où $|f'(z)| \geq 1$. Joignons de 0 à z_1 par un arc de courbe L pour tout point duquel $|f'(z)| \leq 1$; en intégrant $f'(z)$ le long de L, on a l'inégalité

$$\log|f(z_1)| < \log|f(0)| + \text{const. numériq.}$$

Remarque. — 1° Dans le cas où f s'annule une infinité de fois, le lemme reste vrai avec les modifications indiquées dans la remarque sur le lemme I.

2° Si l'on fait $\delta_\nu = \delta$, l'inégalité (11) peut s'écrire

$$(11')\quad m\left(r, \frac{f}{f^{k}}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_k\left(\log|f(0)| + \log\frac{1}{r} + n(r, 0)\log\frac{1}{\delta}\right) + \beta_k \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_k \log V_0(\rho, f)\right].$$

5. Dans les lemmes précédents nous avons considéré des cercles de rayons arbitrairement petits; pour le cas où la valeur initiale $f(0)$ peut intervenir sous la forme $\log\left|\frac{1}{f(0)}\right|$, nous pouvons avoir des limitations plus précises sans

introduction de tels cercles. En ce qui concerne $m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right)$, nous établissons dans le cas plus général d'une fonction méromorphe une inégalité de même forme que celle de M. R. Nevanlinna relative à $m\left(r, \frac{f'}{f}\right)$ par la méthode de récurrence (*) et nous avons l'énoncé :

LEMME I'. — *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité, en supposant que la valeur $c_0 = f(0)$ soit finie et différente de zéro, on a*

$$(19)\qquad m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < a_k + a'_k \overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + b_k \log\frac{1}{r} + b'_k \log\frac{\rho}{r} + b''_k \log\frac{\rho}{\rho - r} + c_k \overset{+}{\log} T(\rho, f)$$

pour $0 < r < \rho < 1$. Les coefficients $a_k, \ldots, c_k$ sont des constantes numériques ne dépendant que de k.

Si $k = 1$, c'est le lemme dû à M. R. Nevanlinna; améliorée par Valiron et modifiée par M. Milloux, l'inégalité qui s'y trouve est mise sous la forme

$$(20)\quad m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 16 + 4\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \log\frac{1}{\rho} + 2\log\frac{\rho}{r} + 3\log\frac{\rho}{\rho - r} + 4\overset{+}{\log} T(\rho, f).$$

Supposons que l'inégalité de forme

$$(21)\quad m\left(r, \frac{f^{(p)}}{f}\right) < a_p + a'_p \overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + b_p \log\frac{1}{r} + b'_p \log\frac{\rho}{r} + b''_p \log\frac{\rho}{\rho - r} + c_p \overset{+}{\log} T(\rho, f)$$

soit vraie pour $p = 1, 2, \ldots, k-1$; nous allons démontrer qu'elle est encore vraie pour $p = k$.

De la formule de Poisson-Jensen, il est facile de déduire

$$(22)\qquad \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[\frac{f'}{f}\right] = \frac{k!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(R e^{i\varphi})| \frac{2R e^{i\varphi}}{(R e^{i\varphi} - z)^{k+1}} d\varphi + (k-1)! \sum_{|a_\nu| < R}\left[\frac{(-1)^{k-1}}{(z - a_\nu)^k} + \frac{\bar{a}_\nu^{k-1}}{(R^2 - \bar{a}_\nu z)^k}\right] + (k-1)! \sum_{|b_\mu| < R}\left[\frac{(-1)^{k-1}}{(z - b_\mu)^k} + \frac{\bar{b}_\mu}{(R^2 - b_\nu z)^k}\right].$$

Considérons le premier crochet; son module est inférieur à

$$(23)\qquad \frac{2^k R^{2k-1}(R+1)}{|R^2 - \bar{a}_\nu z|^{2k}}\left|\frac{R^2 - \bar{a}_\nu z}{R(z - a_\nu)}\right|^k < \frac{2^k R^{k-1}(R+1)}{(R-r)^{2k}}\left|\frac{R^2 - \bar{a}_\nu z}{R(z - a_\nu)}\right|^k,$$

ou encore à $\frac{2^{k+1}}{(R-r)^{2k}}\left|\frac{R^2 - \bar{a}_\nu z}{R(z - a_\nu)}\right|$ en nous plaçant dans le cas où $R < 1$. Et l'on a

(*) M. Milloux a établi par une autre voie une inégalité de même nature.

une limitation analogue pour le second crochet. Par conséquent, en posant

$$V(r, f) = m(r, f) + m\left(r, \frac{1}{f}\right),$$

il vient

$$(24)\quad \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[\frac{f'}{f}\right] < k!\,\frac{2}{(R-r)^{k+1}}V(R, f) + \frac{2^{k+1}}{R(R-r)^{2k}}\left[\sum_{|a_\nu|<R}\left|\frac{R^2 - \bar{a}_\nu z}{R(z-a_\nu)}\right|^k + \sum_{|b_\mu|<R}\left|\frac{R^2 - \bar{b}_\mu z}{R(z-b_\mu)}\right|^k\right].$$

On voit qu'en désignant par Σ_1 et Σ_2 les deux sommes du crochet, le second membre est un polynome P en $\frac{1}{R}$, $\frac{R}{R-r}$, Σ_1, Σ_2 et V.

Maintenant, si l'on développe le premier membre de (24), on en déduit

$$(25)\quad \overset{+}{\log}\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| < \sum_{p=1}^{k-1}\log\left|\frac{f^{(p)}}{f}\right| + \overset{+}{\log}P + C_k,$$

C_k étant une constante numérique.

Or nous avons supposé que (21) soit vrai pour $p = 1, \ldots, k-1$ et l'on a, d'après la forme de P,

$$\overset{+}{\log}P < A_k + B_k \log\frac{1}{R} + B'_k \log\frac{\rho}{r} + B''_k \log\frac{R}{R-r} + \overset{+}{\log}V(R, f) + \overset{+}{\log}\Sigma_1 + \overset{+}{\log}\Sigma_2.$$

Donc eu égard à $V(r, f) \leq 2T(R, f) + \log\left|\frac{1}{c_0}\right|$, on déduit de (25)

$$(26)\quad m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < \bar{a}_k + \bar{a}'_k \overset{+}{\log}\log\left|\frac{1}{c_0}\right| + \bar{b}_k \log\frac{1}{R} + \bar{b}'_k \log\frac{R}{r} + \bar{b}''_k \log\frac{R}{R-r} + \overset{+}{\log}T(r, f) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_R(re^{i\theta}, f)\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_R\left(re^{i\theta}, \frac{1}{f}\right)d\theta + \overset{+}{\log}\left|n(R, f) + n\left(R, \frac{1}{f}\right)\right|,$$

où $V_R(re^{i\theta}, f)$ et $V_R\left(re^{i\theta}, \frac{1}{f}\right)$ sont les deux fonctions harmoniques

$$V_R\left(re^{i\theta}, \frac{1}{f}\right) = \sum_{|a_\nu|<R}\log\left|\frac{R^2 - a_\nu z}{R(z-a_\nu)}\right| \quad \text{et} \quad V_R(re^{i\theta}, f) = \sum_{|b_\mu|<R}\log\left|\frac{R^2 - \bar{b}_\mu z}{R(z-b_\mu)}\right|$$

considérées par M. R. Nevanlinna dans sa théorie. En utilisant la formule de Gauss, on trouve aisément que la somme des deux intégrales est égale à

$$N(R, f) + N\left(R, \frac{1}{f}\right) - N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

On a ensuite à éliminer ces indices de densité et le dernier terme de (26).

En procédant comme M. R. Nevanlinna l'a fait dans son lemme et en posant $R-r=\frac{\rho-r}{2T(\rho)+\log\left|\frac{1}{c_0}\right|+2}\frac{r}{\rho}$, on est conduit à la conclusion.

Remarque. — Dans le cas où $f(z)$ est méromorphe dans tout le plan à distance finie, l'énoncé du lemme est tout à fait analogue et l'inégalité a la même forme, seulement au lieu de $\log\frac{1}{r}$, on a $\overline{\log}\frac{1}{r}$.

Cas particulier. — Si la fonction est privée de zéros, en modifiant légèrement la démonstration, on peut mettre l'inégalité sous la forme suivante :

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)<A_k+B_k\log\frac{1}{\rho-r}+C_k\log V(\rho,f)$$

qui est déjà connue (9).

6. Au moyen du lemme I', on trouve le suivant analogue au lemme II, mais plus précis.

LEMME II'. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité et l'on suppose $f(0)\neq 0$ et $f^{(k)}(0)\neq 0$. On désigne par $a_\nu(\nu=1,2,\ldots)$ ses zéros: de chaque a_ν dont $|a_\nu|\leq r$ comme centre, on décrit un cercle (γ_ν) de rayon arbitrairement petit δ. En se donnant un cercle (C') de centre O et de rayon quelconque $R'(<1)$, on a ou bien, pour $0<r<R$,*

$$m(r,f)<H_k\left[N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\omega_0+\log\frac{1}{r}\right]+K_k\log\frac{2}{1-r}, \tag{27}$$

ou bien, il existe alors au moins un point z_1 où $|f^{(k)}(z)|\geq 1$, et en prenant R_0 tel que $\log|f(z_1)|<\frac{1}{1-r}\log\frac{1}{1-r}$ pour $r\geq R_0$, on a, pour $R'<r_0\leq r<\rho<1$, avec $r_0\geq R_0$, l'inégalité

$$m\left(r,\frac{f}{f^{(k)}}\right)<N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\frac{1}{(\rho-r)^2}\left[\alpha_k\left(\omega_0+\omega(r,n,\delta)\right)+\beta_k\log\frac{1}{\rho-r}+\gamma_k\overline{\log}m(\rho,f)\right], \tag{28}$$

où

$$\omega_0=\overline{\log}|c_0|+\overline{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| \quad\text{et}\quad \omega(r,n,\delta)=\log\frac{1}{r}+n(r,0)\log\frac{1}{\delta'}, \tag{29}$$

H_k, K_k, α_k, β_k et γ_k étant des constantes numériques dont les deux premières ne dépendent que de k et les trois dernières ne dépendent que de R' et R_0 à part k dans le cas général et seulement de R' dans le cas où $k=1$.

(9) *Voir* VALIRON, *Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions ...* (*Act. Scient. et Ind.*, n° 570, 1937, p. 12).

Reprenons le raisonnement du lemme II. Supposons d'abord $|f^{(k)}(z)| < 1$ pour tout point z intérieur à (D'). Deux cas sont possibles :

1° On est conduit à une inégalité qui peut être mise sous la forme

$$(30) \qquad m(r, f) < N\left(r, \frac{1}{f}\right) + A_k\left(\omega_0 + \log\frac{1}{r}\right) + B_k \log\frac{1}{\rho - r} + C_k \log m(\rho, f).$$

Si l'on prend $A_k > 1$ et applique le lemme A à cette inégalité en posant

$$\omega(r) = N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \omega_0 + \log\frac{1}{r},$$

il vient

$$(31) \qquad m(r, f) < H_k\left[N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \omega_0 + \log\frac{1}{r}\right] + K_k \log\frac{2}{1 - r}.$$

2° On obtient finalement

$$m(r, f) < \overset{+}{\log}|c_0| + \text{const. numériq.},$$

inégalité qui entre dans (27).

Supposons ensuite que $|f^{(k)}(z_1)| > 1$. Si $z_1 = 0$, la formule de Jensen donne

$$m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log|f(0)|,$$

ce qui peut s'écrire, en vertu du lemme I',

$$(32) \qquad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < N\left(r, \frac{1}{f}\right) + A_k\left(\log|c_0| + \log\left|\frac{1}{c_0}\right| + \log\frac{1}{r}\right) + B_k \log\frac{1}{\rho - r} + C_k \log m(\rho, f).$$

Il est évident que cette inégalité entre dans (28).

Si $|z_1| > 0$, alors, on applique l'inégalité (5) à la fonction $\frac{f^{(k)}}{f}$ pour le point z_1 et l'on a

$$(33) \qquad m\left(R, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{1}{(R - r_1)^2} m\left(R, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + \frac{2}{R - r_1}\left[\log|f(z_1)| + \sum_{\nu} \log\frac{2}{|z_1 - a_\nu|}\right]$$
$$(\nu = 1, \ldots, n(R, 0)).$$

Nous utilisons ici le lemme I' pour limiter le premier terme. Pour éliminer $f(z_1)$, on procède comme dans le lemme II, et nous majorons le dernier terme en écrivant

$$(34) \qquad \sum_{|a_\nu| < R} \log\left|\frac{2}{z_1 - a_\nu}\right| < n(R, 0)\log\frac{2}{\delta} < 2n(R, 0)\log\frac{1}{\delta} \qquad \text{dès que} \quad \delta < \frac{1}{2}.$$

Alors, en choisissant une valeur R_0 comme dans le lemme II, l'inégalité (34)

prend la forme

$$(35)\quad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_k\left(\omega_0 + \omega(r, n, \delta)\right) + \beta_k \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_k \overset{+}{\log}\, m(\rho, f)\right],$$

on voit qu'elle entre dans (28).

Cas où f est privé de zéros. — Les inégalités (27) et (28) se réduisent respectivement à

$$(27')\qquad m(r, f) < H_k\left(\overset{+}{\log}|c_0| + \log\frac{1}{r}\right) + H_k \log\frac{2}{1 - r}$$

et

$$(28')\quad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_k\left(\log|c_0| + \log\frac{1}{r}\right) + \beta_k \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_k \overset{+}{\log}\, V(\rho, f)\right].$$

7. Pour l'étude du cas où intervient $f^{(k)}$, nous avons besoin encore de limiter $m\left(r, \frac{f^{(k)} - 1}{f^{(k+1)}}\right)$. Nous démontrons d'abord le lemme suivant :

Lemme III. — *Soient $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité et α un nombre. On suppose $f(0) \neq 0$ et $f^{(k)}(0) \neq 0, \alpha$; on désigne par $b_\mu (\mu = 1, 2, \ldots)$ les zéros de $f^{(k)} - \alpha$, par $n_k(r, \alpha)$ le nombre des b_μ dont $|b_\mu| \leq r$, et par $n_k^*(R, \alpha)$ celui des b_μ dont $|b_\mu| < R$; puis de chaque b_μ comme centre, on décrit un cercle (σ_μ) de rayon arbitrairement petit η. Alors en se donnant un cercle (C') de centre O et de rayon quelconque $R'(<1)$, on a ou bien, pour $0 < r < R'$, l'inégalité*

$$(36)\qquad m(r, f) < H_k\left[N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overset{+}{\log}|c_0| + \log\left|\frac{1}{c_0}\right| + \log\frac{1}{r}\right] + K_k \log\frac{2}{1 - r},$$

ou bien, pour $R' < r_0 \leq r < \rho < 1$, l'inégalité

$$(37)\quad m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)} - \alpha}\right) < A_k\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \omega_k(r, n_k^*, \eta)\right) + B_k \log\frac{1}{\rho - r} + C_k \overset{+}{\log}\, m(\rho, f),$$

avec $R = \frac{1}{2}(r + \rho)$ et

$$(38)\qquad \omega_k(r, n_k^*, \eta) = \log\frac{1}{r} + n_k^*(R, \alpha)\log\frac{1}{\eta},$$

où H_k, K_k, A_k, B_k et C_k sont des constantes numériques dont les deux premières ne dépendent que de α et k, et les trois dernières ne dépendent que de α et R' à part k.

Appliquons la formule de Poisson-Jensen à la fonction $f^{(k)} - \alpha$; on trouve, par dérivation,

$$(39)\qquad \left|\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)} - \alpha}\right| < \frac{2R}{(R - r)^2} V(R, f^{(k)} - \alpha) + \sum_{\mu=1}^{n_1(R,1)} \frac{R^2 - |b_\mu|^2}{|z - b_\mu| \cdot |R^2 - b_\mu z|}.$$

La sommation qui figure dans cette inégalité peut être divisée en deux : une σ s'étend aux b_μ dont $|b_\mu| \leq r$ et l'autre σ' s'étend aux b_μ tel que $r < |b_\mu| < R$. Si l'on exclut éventuellement de la circonférence (C_r) les points

intérieurs à certain (σ_μ), on a

$$\sigma < \sum_{|b_\mu|<R} \frac{R^2-|b_\mu|^2}{|z-b_\mu|\,r(R-|b_\mu|)} < \frac{2}{r}\,n_k(r,\alpha)\frac{1}{\eta_i},$$

$$\sigma' < \sum_{r<|b_\mu|<r'} \frac{R^2-|b_\mu|^2}{|z-b_\mu|\,(R^2-|b_\mu|^2)} < \Delta_k(R,r)\frac{1}{\eta_i},$$

où l'on pose

$$\Delta_k(R,r) = n_k^*(R,\alpha) - n_k(r,\alpha).$$

L'inégalité (39) s'écrit alors

$$(40)\qquad \left|\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-\alpha}\right| < P_k\left[\frac{1}{r},\ n_k(r,\alpha)\frac{1}{\eta_i},\ \Delta_k(R,r)\frac{1}{\eta_i},\ \frac{1}{R-r},\ V\right],$$

P_k étant un polynome des arguments qui figurent dans le crochet. Les coefficients de P_k sont numériques et ne dépendent que de k, et l'on déduit de cette inégalité

$$(41)\qquad m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-\alpha}\right) < A_k'\left[\log\frac{1}{r} + n_k^*(R,\alpha)\log\frac{1}{\eta_i}\right] + B_k'\log\frac{1}{R-r} + C_k'\log V(R, f^{k}-\alpha)$$

pour $0<r<R<R'$.

Transformons le dernier terme. Considérons le domaine (D'') limité par (C'), (γ_ν) et $(\sigma_\mu)[\nu=1,\dots,p;\ \mu=1,\dots,n_k(n,\alpha)]$ et supposons d'abord que pour tout point z intérieur à (D'') on ait $|f^{(k)}-\alpha|<1$ et, par suite, $|f^{(k)}(z)|<|\alpha|+1=h_1$, h_1 étant un nombre positif qui dépend de α. Si l'on procède comme dans le lemme II en considérant la fonction $\frac{1}{h_1}f(z)$, on trouve une inégalité de forme (36) dont les coefficients dépendent ici de α à part k et d.

Dans le cas contraire, il existe au moins un point ζ_1 dans (D'') pour lequel $|f^{(k)}(\zeta_1)-\alpha|\geq 1$. Distinguons encore deux cas :

1° $\zeta_1=0$. D'après la formule de Jensen, on a

$$(42)\qquad m\left(R,\frac{1}{f^{(k)}-\alpha}\right) < m(R,f^{(k)}-\alpha) + \log\left|\frac{1}{f^{(k)}(0)-\alpha}\right| = m(R,f^{(k)}-\alpha),$$

par suite

$$V(R,f^{(k)}-\alpha) < 2m(R,f^{(k)}-\alpha) < 2m(R,f^{(k)}) + \log|\alpha| + 2\log 2 < 2\left[m(R,f) + m\left(R,\frac{f^{(k)}}{f}\right) + \log|\alpha| + \log 2\right].$$

En appliquant à $m\left(R,\frac{f^{(k)}}{f}\right)$ le lemme I', on trouve pour $r<R<\rho<1$,

$$(43)\qquad V(R,f^{(k)}-\alpha) < 2\left[m(R,f) + A_k\left(\log\left|\frac{1}{f(0)}\right| + \log\frac{1}{R}\right) + B_k\log\frac{1}{\rho-R} + C_k\log m(\rho,f)\right],$$

A_k, B_k et C_k ne dépendent que de d et α à part k. En remplaçant $m(R, f)$ par $m(\rho, f)$ et en prenant les $\log$ des deux membres, puis en posant $\rho - R = \frac{1}{2}(\rho - r)$, il vient une inégalité de la forme

$$\log V(R, f^{(k)} - \alpha) < \log \log \left| \frac{1}{c_0} \right| + \log \log \frac{1}{r} - \log \log \frac{1}{\rho - r} + C'_k \log \log m(\rho, f).$$

a fortiori

$$\log V(R, f^{(k)} - \alpha) < \log \left| \frac{1}{c_0} \right| + \log \frac{1}{r} + \log \frac{1}{\rho - r} + C'_k \log m(\rho, f). \tag{44}$$

En portant cette borne dans (41), on obtient une inégalité de la forme (37).

2° $|\zeta_1| = \rho_1 > 0$. En appliquant l'inégalité (5) à la fonction $f^{(k)} - \alpha$ pour le point ζ_1, on obtient

$$m\left(R, \frac{1}{f^{(k)} - \alpha}\right) < \frac{4}{(R - \rho_1)^2} m(R, f^{(k)} - \alpha),$$

ce qui peut s'écrire

$$m\left(R, \frac{1}{f^{(k)} - \alpha}\right) < \frac{4}{(R - R')^2} \left[m\left(R, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + m(R, f) + \log^+ |\alpha| + \log 2 \right].$$

Appliquons le lemme I′ au premier terme du crochet et prenons entre R′ et 1 une valeur r_0 ne dépendant que de R′; en posant $H = \frac{1 - r_0}{r_0 - R'}$, il vient, pour $R' < r_0 < R < \rho < 1$,

$$m\left(R, \frac{1}{f^{(k)} - \alpha}\right) < \frac{1}{(\rho - R)^2} \left[\alpha_k \left(\log \left| \frac{1}{c_0} \right| + \log \frac{1}{R} \right) + \beta_k \log \frac{1}{\rho - R} + \gamma_k \log m(\rho, f) \right], \tag{45}$$

α_k, β_k, γ_k ne dépendant que de R′ et α à part k.

D'autre part, on a

$$m(R, f^{(k)} - \alpha) < m\left(R, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + m(R, f) + \log^+ |\alpha| + \log 2. \tag{46}$$

De (45) et (46), on déduit aisément

$$V(R, f^{(k)} - \alpha) < m(R, f) + A'_k \left(\log \left| \frac{1}{f(0)} \right| + \log \frac{1}{R} \right) + B'_k \log \frac{1}{\rho - R} + C'_k \log V(\rho, f).$$

Cette inégalité nous conduira comme (43) à une inégalité de forme (37) et le lemme se trouve démontré.

8. Établissons maintenant le lemme :

LEMME IV. — *Soient $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité et α un*

nombre. On suppose que $f(0)=c_0\neq 0$ *et* $f^{(k)}(0)=c_k\neq\alpha$. *On conserve les hypothèses et les notations du lemme précédent. En se donnant un cercle* (C′) *de centre* O *et de rayon* R′, *on a ou bien pour* $0<r<R'$, l'inégalité

$$(47)\qquad m(r,f)<H_k\left[N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{\log}|c_0|+\overline{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right|+\log\frac{1}{r}\right]+K_k\log\frac{2}{1-r}$$

ou bien, pour $R'<r_0\leq r<\rho<1$, *l'inégalité*

$$(48)\quad m\left(r,\frac{f^{(k)}-\alpha}{f^{(k+1)}}\right)<N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-\alpha}\right)+\frac{1}{(\rho-r)^2}\left[\alpha_k\left(\overline{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right|+\omega_k(r,n_k^*,\eta_1)\right)+\beta_k\log\frac{1}{\rho-r}+\gamma_k\overline{\log}\,m(\rho,f)\right],$$

où

$$(49)\qquad \omega_k(r,n_k^*,\eta_1)=\log\frac{1}{r}+n_k^*(R,\alpha)\log\frac{1}{\eta_1},\qquad \text{avec}\quad R=\frac{1}{2}(r+\rho);$$

H_k, K_k, α_k, β_k *et* γ_k *sont des constantes numériques dont les deux premières ne dépendent que de* α *et* k *et les trois dernières ne dépendent que de* α *et* R′ *à part* k.

Désignons par (D″) le domaine limité par (C′) et les circonférences (γ_ν) et (σ_μ) dont les centres se trouvent dans (C′). Supposons d'abord que $\left|\frac{f^{(k+1)}(z)}{f^{(k)}(z)-\alpha}\right|<1$ quel que soit le point z dans (D″). Considérons $f^{(k)}(z)-\alpha$ et distinguons deux cas :

1° $|f^{(k)}(z)-\alpha|\geq|\alpha|+1$ quel que soit z dans (D″). On a alors $|f^{(k)}(z)|>1$ quel que soit z dans (D″) et l'on démontre comme au début de la démonstration du lemme II que pour $0<r<R'$, on a une inégalité de forme (47).

2° Il existe dans (D″) une valeur ζ_1 telle que

$$|f^{(k)}(\zeta_1)-\alpha|<|\alpha|+1=h_1.$$

En intégrant la fraction $\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-\alpha}$, le long d'un arc de courbe L qui joint du point ζ_1 à un point quelconque z et qui est située dans (D″), on trouve

$$\log\left|\frac{f^{(k)}(z)-\alpha}{f^{(k)}(\zeta_1)-\alpha}\right|<1+2(\pi+1)<10,$$

ce qui donne

$$(50)\qquad |f^{(k)}(z)|<|\alpha|+h_1e^{10}$$

pour tout point z de (D″). Alors le raisonnement que l'on a fait dans la première partie de la démonstration du lemme II conduira encore à une inégalité de forme (47), dont les coefficients numériques H_k, K_k dépendent de α à part k.

Maintenant, si l'hypothèse que l'on a fait au début n'a pas lieu, il existe alors dans (D'') une valeur z_1 pour laquelle on a $\left|\frac{f^{(k+1)}(z)}{f^{(k)}(z)-\alpha}\right| \geqq 1$. Il y a deux cas à distinguer :

1° $z_1 = 0$. En vertu de la formule de Jensen, on obtient

$$m\left(R, \frac{f^{(k)}-\alpha}{f^{(k+1)}}\right) < m\left(R, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-\alpha}\right) + N\left(R, \frac{1}{f^{(k)}-\alpha}\right)$$

et en appliquant le lemme précédent, il vient

$$(51) \qquad m\left(r, \frac{f^{(k)}-\alpha}{f^{(k+1)}}\right) < N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-\alpha}\right) + A_k\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \omega_k(r, n_k^*, \gamma_i)\right) + B_k \log\frac{1}{\rho - r} + C_k \overset{+}{\log} m(\rho, f);$$

2° $|z_1| > 0$. En appliquant l'inégalité (5) à la fonction $\frac{f^{(k+1)}(z)}{f^{(k)}(z)-\alpha}$ pour le point z_1, et en posant $|z_1| = r_1$, il vient

$$(52) \qquad m\left(R, \frac{f^{(k)}-\alpha}{f^{(k+1)}}\right) < \frac{4}{(R-r_1)^2} m\left(R, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-\alpha}\right) + \frac{2}{R-r_1}\sum_{\mu} \log\frac{2}{|z_1 - b_\mu|} \quad [\mu = 1, \ldots, n_k^*(R, \alpha)].$$

Appliquons le lemme III à la valeur moyenne logarithmique qui figure au second membre et comme dans ce lemme, choisissons entre R′ et 1 une valeur r_0 qui ne dépend de R′. En posant $H = \frac{1-r_0}{r_0 - R'}$, nous avons alors ou bien pour $0 < r < R'$ une inégalité de forme (47), ou bien, pour $R' < r_0 \leqq R < \rho < 1$, l'inégalité

$$(53) \qquad m\left(R, \frac{f^{(k)}-\alpha}{f^{(k+1)}}\right) < \frac{4H^2}{(\rho - R)^2}\left[A_k\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \omega_k(R, n_k^*, \gamma_i)\right) + B_k \log\frac{1}{\rho - R} + C_k \overset{+}{\log} m(\rho, f)\right] + \frac{2H}{\rho - R} n_k^*(R, \alpha) \log\frac{2}{\gamma_i},$$

où

$$\omega_k = \log\frac{1}{R} + n_k^*(\rho', \alpha)\log\frac{1}{\gamma_i}, \qquad \text{avec} \quad \rho' = \frac{1}{2}(R + \rho).$$

Il est évident que (53) peut s'écrire

$$(54) \qquad m\left(R, \frac{f^{(k)}-\alpha}{f^{(k+1)}}\right) < \frac{1}{(\rho - R)^2}\left[\alpha_k\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \omega_k(R, n_k^*, \gamma_i)\right) + \beta_k \log\frac{1}{\rho - R} + \gamma_k \overset{+}{\log} m(\rho, f)\right],$$

α_k, β_k, γ_k dépendant de α et R′ à part k.

En changeant R en r, on voit que les inégalités (51) et (54) entrent toutes les deux dans (48).

CHAPITRE II.

Valeurs exceptionnelles B d'une fonction méromorphe. Propositions sur la croissance d'une fonction.

I. — Définition et propriétés asymptotiques.

9. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre quelconque définie dans le cercle unité; convenons d'appeler *valeur exceptionnelle d'ordre zéro au sens de Borel ou valeur exceptionnelle* B *relative à* f une valeur α telle que

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{N(r,\alpha)}{\log\frac{1}{1-r}} \leq \tau. \tag{55}$$

τ étant un nombre fini.

Considérons une fonction $f(z)$ méromorphe dans le cercle unité et supposons qu'elle admette $p \geq 3$ valeurs exceptionnelles B. Prenons trois de ces valeurs $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$; et leur appliquons le second théorème fondamental de M. R. Nevanlinna.

$$T(r,f) < \sum_{i=1}^{3} N(r,\alpha_i) + S(r). \tag{56}$$

D'après la définition, étant donné trois nombres positifs $\varepsilon_i (i = 1, 2, 3)$, on peut trouver une valeur r_0 telle que pour $r \geq r_0$, on ait

$$N(r,\alpha_i) < (\tau_i + \varepsilon_i)\log\frac{1}{1-r} \qquad (i = 1, 2, 3); \tag{57}$$

il vient donc pour $r \geq r_0$,

$$T(r,f) < \sum_{i}^{3} (\tau_i + \varepsilon_i)\log\frac{1}{1-r} + S(r), \tag{58}$$

ce qui s'écrit, en choisissant les ε_i tels que $\sum \varepsilon_i \leq 1$,

$$T(r,f) < C + \left(\sum \tau_i + 7\right)\log\frac{1}{\rho - r} + 8\overset{+}{\log} T(\rho, f) \qquad (r_0 \leq r < \rho < 1). \tag{59}$$

En procédant comme M. R. Nevanlinna l'a fait pour une inégalité concernant la théorie des défauts (3) on arrive à une inégalité permettant d'énoncer la proposition : *Si une fonction méromorphe dans le cercle unité admet* $p \geq 3$ *valeurs exceptionnelles* B, *on a*

$$\overline{\lim} \frac{T(r,f)}{\log\frac{1}{1-r}} \leq \sum_{i=1}^{3} \tau_i + 7. \tag{60}$$

En vertu de ce résultat, $T(r, f) \leq O\left(\log \frac{1}{1-r}\right)$. Si donc une fonction $f(z)$ méromorphe dans le cercle unité est telle que le rapport $T(r, f) : \log \frac{1}{1-r}$ croît indéfiniment pour $r \to 1$, c'est-à-dire telle que le théorème analogue à celui de Picard-Borel s'applique, elle ne pourra pas admettre plus de deux valeurs exceptionnelles définies ci-dessus, ce qui justifie la dénomination.

10. Soit maintenant $f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité et supposons qu'elle admette o et $+\infty$ comme valeurs exceptionnelles B et que sa dérivée $f^{(k)}(z)$ admette 1 comme valeur de la même nature. Prenons le théorème fondamental de M. Milloux avec l'inégalité ([10])

$$T(r, f) < (k+1) N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - 1}\right) + S(r) \tag{61}$$

dont le premier coefficient du second membre peut se réduire à k ([11]) et

$$S(r) = a_k \overset{+}{\log} T(\rho, f) + b_k \log \frac{1}{\rho - r} + C \qquad \text{pour} \quad r_0 < r < \rho < 1,$$

a_k et b_k étant des constantes numériques qui dépendent seulement de k et C, une constante qui peut dépendre des valeurs initiales $f(0)$, $f^{(k)}(0)$ et $f^{(k+1)}(0)$. D'après l'hypothèse, on a

$$N(r, f) < (\tau_\infty + \varepsilon_1) \log \frac{1}{1-r}, \qquad N\left(r, \frac{1}{f}\right) < (\tau_0 + \varepsilon_2) \log \frac{1}{1-r}$$

et

$$N\left(r, \frac{1}{\rho^{(k)} - 1}\right) < (\tau_1 + \varepsilon_3) \log \frac{1}{1-r}.$$

En choisissant les ε_i tels que $k\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \leq 1$, l'inégalité (61) devient

$$T(r, f) < C + (b_k + k\tau_\infty + \tau_0 + \tau_1 + 1) \log \frac{1}{\rho - r} + a_k \overset{+}{\log} T(\rho, f) \qquad (r \geq r_0') \tag{62}$$

et le procédé de M. R. Nevanlinna conduit à l'inégalité

$$\overline{\lim} \frac{T(r, f)}{\log \frac{1}{1-r}} \leq b_k + k\tau_\infty + \tau_0 + \tau_1. \tag{63}$$

Donc *si une fonction méromorphe dans le cercle unité admet* ∞ *et* o *comme valeurs exceptionnelles* B *et si sa dérivée d'ordre* k *admet* 1 *comme valeur de la même nature, on a l'inégalité* (63).

([10]) Milloux, *Les fonctions méromorphes et leurs dérivées* (*Act. Scient. et Ind.*, n° 888, fasc. XIV, 1940, p. 21).

([11]) Hiong, *Généralisations du théorème fondamental de Nevanlinna-Milloux* (*Bull. Sc. Math.*, 2e série, fasc. LLXXVIII, 1954, p. 181).

Au lieu du théorème fondamental de M. Milloux, si l'on utilise celui que nous avons établi (11), on pourra obtenir un résultat plus général. On définit des fonctions exceptionnelles B d'une façon analogue à celle dont on a défini les valeurs exceptionnelles B, on trouve alors une inégalité analogue à (63) pour le cas très général où à la place des valeurs exceptionnelles, o pour f et 1 pour $f^{(k)}$, on considère une fonction exceptionnelle $\overset{\tau}{\infty}$ pour f et une fonction exceptionnelle $\overset{\tau}{\infty}$ pour $f^{(k)}$. En particulier, on trouve une inégalité analogue à (63) pour le cas où l'on remplace les valeurs o et 1 par deux valeurs quelconques a et b $(b \neq o)$.

II. — Limitation du module d'une fonction holomorphe.

11. Maintenant considérons une fonction holomorphe dans le cercle unité qui admet une valeur exceptionnelle B ou dont la dérivée admet une telle valeur, et cherchons pour son module une limitation qui sera valable pour tout le cercle $|z| \leq r$. Nous pouvons d'abord énoncer le théorème suivant :

Théorème A. — *Soit une fonction holomorphe définie par*

$$f(z) = c_0 + c_k z^k + \dots \qquad (c_0,\ c_k \neq o) \tag{64}$$

dans le cercle unité; on suppose qu'elle ne s'y annule que p fois et y admet 1 *comme valeur exceptionnelle* B *de sorte que l'on ait* $N(r, 1) \leq (\tau + \varepsilon) \log \frac{1}{1-r}$ *pour* $r \geq r_0$. *On désigne par* a_ν $(\nu = 1, \dots, p)$ *ses zéros; soit d un nombre positif tel que* $d \leq |a_1|$; *et l'on décrit de chaque* a_ν *comme centre un cercle* (γ_ν) *de rayon arbitrairement petit* δ. *Alors en supposant* $c_0 \neq 1$ *et en se donnant un cercle* (C') *de centre* O *et de rayon* $R'(< 1)$ *aussi voisin de* 1 *que l'on veut, on a pour tout point z du cercle* $|z| \leq r$ *avec* $o < r < R'$, *l'inégalité*

$$\log |f(z)| < \frac{1}{(R'-r)^3}\left[H\left(\Omega_0 + \omega(r, p, d, \delta)\right) + K \log \frac{2}{R'-r}\right], \tag{65}$$

avec

$$\Omega_0 = \overset{+}{\log} |c_0| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0 - 1}\right|, \qquad \omega = \log\frac{1}{r} + p \log\frac{1}{d} + p \log\frac{1}{\delta}, \tag{66}$$

H *et* K *étant deux constantes numériques qui ne dépendent que de* τ *et* r_0 *et* R'.

Pour le démontrer, on peut partir de l'inégalité utilisée antérieurement (12)

$$m(r, f) < N(r, 1) + Q(r), \tag{67}$$

avec

$$Q(r) = m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) + \left|\log|c_0 - 1|\right| + 8\log 2.$$

(12) *Voir* le Mémoire cité dans l'introduction.

Majorons le second membre de (67). Pour $N(r, 1)$, on a en prenant $\varepsilon < 1$,

$$N(r, 1) < (\tau + 1) \log \frac{1}{1 - r} < (\tau + 1) \log \frac{1}{\rho - r} \qquad \text{pour} \quad r_0 < r < \rho. \tag{68}$$

Pour le premier terme de $Q(r)$, nous cherchons une limitation au moyen du lemme II'. Comme

$$N(r, 0) < n(r, 0) \log \frac{r}{d} < p \log \frac{1}{d}, \tag{69}$$

on a pour la première alternative l'inégalité

$$m(r, f) < H_1 \left(\omega_0 + p \log \frac{1}{d} + \log \frac{1}{r} \right) + K_1 \log \frac{2}{1 - r} \qquad (0 < r < R'), \tag{70}$$

et pour la seconde, l'inégalité

$$m\left(r, \frac{f}{f'}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2} \left[\alpha_1 \left(\omega_0 + \omega(r, p, \delta) \right) + \beta_1 \log \frac{1}{\rho - r} + \gamma_1 \overset{+}{\log} m(\rho, f) \right] \tag{71}$$

valable pour $R' < r_0' \leq r < \rho < 1$. Les coefficients numériques α_1, β_1 et γ_1 ne dépendent que de R'.

Quant aux deux termes suivants, on peut les majorer avec le lemme de M. R. Nevanlinna.

Si l'on porte toutes ces bornes dans (67) en considérant la seconde alternative pour le premier terme de $Q(r)$, il vient une inégalité de la forme

$$m(r, f) < \frac{1}{(\rho - r)^2} \left[\alpha_1 \left(\Omega_0 + \omega(r, p, d, \delta) \right) + \beta_1 \log \frac{1}{\rho - r} + \gamma_1 \overset{+}{\log} m(\rho, f) \right] \tag{72}$$

valable pour $r \geq r_0'$ si l'on prend $r_0' \geq r_0$.

En appliquant à cette inégalité le lemme B, il vient

$$m(r, f) < \frac{1}{(1 - r)^2} \left[H' \left(\Omega_0 + \omega(r, p, d, \delta) \right) + K' \log \frac{2}{1 - r} \right].$$

Cette inégalité établie pour $r \geq r_0'$ restera valable pour $0 < r < r_0'$ si l'on majore éventuellement les coefficients numériques H' et K'. Seulement les nouveaux coefficients peuvent dépendre de r_0', c'est-à-dire de R' et de r_0.

En particulier, on a

$$m(r, f) < \frac{1}{(R' - r)^2} \left[H' \left(\Omega_0 + \omega(r, p, d, \delta) \right) + K' \log \frac{2}{R' - r} \right],$$

inégalité dans laquelle entre aussi (70) que nous avons laissé.

Alors l'application de l'inégalité connue

$$\log M(r, f) < \frac{R + r}{R - r} m(R, f) \qquad (r_0' < R < 1) \tag{73}$$

relative au module maximum permet d'achever la démonstration.

12. Traitons maintenant le cas où une dérivée de la fonction f joue en même temps un rôle que f. Nous allons établir le théorème :

THÉORÈME B. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité*

$$f(z)=c_0+\ldots+c_kz^k+\ldots \qquad (c_0,\ c_k\neq 0); \tag{74}$$

on suppose qu'elle ne s'y annule que p fois et que sa dérivée d'ordre k y admette 1 *comme valeur exceptionnelle* B *de sorte que l'on ait*

$$N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)<(\tau_1+\varepsilon_1)\log\frac{1}{1-r} \qquad \text{pour} \quad r\geq r_0. \tag{75}$$

On désigne par $a_\nu(\nu=1,\ \ldots,\ p)$ les zéros de f; par $b_\mu(\mu=1,\ 2,\ \ldots)$ les points 1 *de $f^{(k)}$, par $n_k(r,\ 1)$ le nombre des b_μ compris dans le cercle $|z|\leq r$; soit alors un nombre positif $d\leq|a_1|$ et de chaque b_μ dont $|b_\mu|\leq r$ comme centre, on décrit un cercle (τ_μ) de rayon arbitrairement petit τ_1; enfin on se donne un cercle (C'), de centre* O *et de rayon* R' (<1) *aussi voisin de* 1 *que l'on veut. Alors en supposant $c_k\neq 1$, on a, pour tout point du cercle $|z|\leq r$ avec $0<r<R'$, l'inégalité*

$$\log|f(z)|<\frac{1}{(R'-r)^2}\left[H_k\left(\omega_0'+\log\frac{1}{r}+p\log\frac{1}{d}+n_k(r',\ 1)\log\frac{1}{\eta}\right)+K_k\log\frac{2}{R'-r}\right], \tag{76}$$

où

$$\omega_0'=\overset{+}{\log}|c_0|+\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right|+1 \qquad \text{et} \qquad r'=\frac{1}{4}\left[r+\frac{3}{2}(R'+1)\right] \quad (^{13}), \tag{77}$$

H_k et K_k étant des constantes numériques ne dépendant que de τ, r_0 et R' à part k.

Prenons l'identité de M. Bureau

$$\frac{1}{f}=\frac{f^{(k)}}{f}-\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\frac{f^{(k+1)}}{f}. \tag{78}$$

En vertu des propriétés des valeurs moyennes logarithmiques, on peut en déduire

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)<m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)+\log 2. \tag{79}$$

D'autre part, la formule de Jensen donne

$$m(r,f)=m\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log|f(0)|;$$

il en résulte donc que

$$\begin{aligned} m(r,f)<N\left(r,\frac{1}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)\\ +m\left(r,\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\right)+\log|f(0)|+\log 2. \end{aligned} \tag{80}$$

(13) On peut prendre aussi $r'=\dfrac{R'+1}{2}$ comme dans la Note citée (3).

Cherchons une limitation pour le second membre de (80). L'inégalité (69) peut déjà fournir une borne pour le premier terme. Pour les deux termes suivants, nous les majorons au moyen du lemme I' et nous avons les inégalités

$$(81)\quad m\left(r,\frac{f^{(i)}}{f}\right)<A_i\left(\log\left|\frac{1}{c_0}\right|+\log\frac{1}{r}\right)+B_i\log\frac{1}{\rho-r}+C_i\overset{+}{\log}m(\rho,f)\qquad(i=k,\ k+1).$$

Quant au quatrième terme, nous lui appliquons le lemme IV. Pour la seconde alternative, en remarquant qu'ici

$$(82)\qquad \omega_k=\log\frac{1}{r}+n_k^*(R,1)\log\frac{1}{\eta},\qquad \text{avec}\quad R=\frac{1}{2}(r+\rho),$$

on a l'inégalité

$$(83)\quad m\left(r,\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\right)<N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)+\frac{1}{(\rho-r)^2}\left[\alpha'_k\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right|+\log\frac{1}{r}+n_k^*(R,1)\log\frac{1}{\eta_1}\right)+\beta'_k\log\frac{1}{\rho-r}+\gamma'_k\overset{+}{\log}m(\rho,f)\right]$$

valable pour $R'<r'_0\leq r<\rho<1$,

En vertu de l'hypothèse, on a en prenant $\varepsilon_1\leq 1$.

$$(84)\quad N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)<(\tau_1+1)\log\frac{1}{1-r}<(\tau_1+1)\log\frac{1}{\rho-r}\qquad\text{pour}\quad r\geq r_0.$$

Alors en choisissant $r'_0\geq r_0$, on peut écrire, pour $r\geq r'_0$,

$$(85)\quad m\left(r,\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\right)<\frac{1}{(\rho-r)^2}\left[\alpha'_k\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right|+\log\frac{1}{r}+n_k^*(R,1)\log\frac{1}{\eta_1}\right)+\beta''_k\log\frac{1}{\rho-r}+\gamma'_k\overset{+}{\log}m(\rho,f)\right].$$

Portons dans (80) la borne donnée par (85) et celles données par (69) et (81); il vient alors une inégalité de la forme

$$(86)\quad m(r,f)<\frac{1}{(\rho-r)^2}\left[\alpha_k\left(\omega_0+\log\frac{1}{r}+p\log\frac{1}{d}+n_k^*(R,1)\log\frac{1}{\eta_1}\right)+\beta_k\log\frac{1}{\rho-r}+\gamma_k\overset{+}{\log}m(\rho,f)\right]$$

valable pour $r\geq r'_0$. Les coefficients numériques α_k, β_k, γ_k ne dépendent que de τ_1 et R' à part k.

Maintenant soit $R''=R'+\frac{1-R'}{2}$ une valeur comprise entre R' et 1, et supposons $r'_0\leq r<\rho<R''$. Après avoir remplacé R par $\frac{1}{2}(r+R'')$, appliquons à l'inégalité (86) le lemme B avec la remarque. En posant $r'=\frac{1}{4}(r+3R'')$ et eu égard à ce que $\log\frac{1}{r}$ est décroissant et $n_k^*(r,1)$, croissant, on obtient ainsi

$$(87)\quad m(r,f)<\frac{1}{(R''-r)^2}\left[H_k\left(\omega'_0+\log\frac{1}{r}+p\log\frac{1}{d}+n_k^*(r',1)\log\frac{1}{\eta_1}\right)+K_k\log\frac{2}{R''-r}\right].$$

Cette inégalité établie pour $r \geq r'_0$ reste valable pour $r < r'_0$ si l'on majore éventuellement les coefficients H_k et K_k; mais les nouveaux coefficients peuvent dépendre de r'_0, c'est-à-dire de R' et de r_0.

Après la majoration éventuelle des coefficients, l'inégalité précédente est donc valable en particulier pour $0 < r < R'$. En remplaçant $R'' - r$ par $R' - r$, elle peut s'écrire *a fortiori*

$$(88)\quad m(r,f) < \frac{1}{(R'-r)^2}\left[H_k\left(\omega'_0 + \log\frac{1}{r} + p\log\frac{1}{d} + n_k(r',1)\log\frac{1}{r_1}\right) + K_k\log\frac{1}{R'-r}\right],$$

où r' est la valeur (77).

Maintenant considérons l'inégalité que donne la première alternative du lemme IV appliqué au quatrième terme de (80). En tenant compte de (77), on voit qu'elle entre dans (88) pour $0 < r < R'$.

L'inégalité (73) nous conduit alors immédiatement à la conclusion.

13. Dans le cas d'une fonction privée de zéros, on peut trouver, en modifiant la démonstration, une limitation dans laquelle la valeur initiale c_0 n'intervient que sous la forme $\log|c_0|$ et l'on a l'énoncé suivant :

THÉORÈME B_0. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe définie par (74) dans le cercle unité avec $c_k \neq 1$; on suppose qu'elle ne s'annule pas et que sa dérivée d'ordre k admette 1 comme valeur exceptionnelle* B *de sorte que la condition (75) soit vérifiée. En conservant les notations du théorème précédent, on a pour tout point z du cercle $|z| \leq r$ avec $0 < r < R'$, l'inégalité*

$$(89)\quad \log|f(z)| < \frac{1}{(R'-r)^2}\left[H_k\left(\overset{+}{\log}|c_0| + \log\frac{1}{r} + n_k(r',1)\log\frac{1}{r_1} + 1\right) + K_k\log\frac{2}{R'-r}\right];$$

r', H_k et K_k ont la même signification que dans le théorème B.

Pour la démonstration, nous procédons d'une façon analogue à celle dont Valiron a démontré le théorème de M. Miranda (14).

Posons $V(r,f) = m(r,f) + m\left(r,\frac{1}{f}\right)$; de l'inégalité (80) et de la formule de Jensen, nous déduisons

$$(90)\quad V(r,f) < 2m\left(r,\frac{f^k}{f}\right) + 2m\left(r,\frac{f^{k+1}}{f}\right) + 2m\left(r,\frac{f^k}{f^{k+1}-1}\right) - \log|f(0)| + 2\log 2.$$

D'après ce que nous avons dit dans le lemme I' à propos d'un cas particulier, on a ici

$$(91)\qquad m\left(r,\frac{f^{(i)}}{f}\right) < A_k + B_k\log\frac{1}{\rho - r} + C_k\overset{+}{\log}V(\rho,f) \qquad (i = k, k+1).$$

(14) VALIRON, *loc. cit.*

Il nous suffit donc de trouver une majorante pour le quatrième terme du second membre de (90). Pour cela, appliquons le lemme IV, on a ou bien, pour $0 < r < R'$,

$$m(r, f) < H_k'' \left(\overset{+}{\log} |c_0| + \log \frac{1}{r} \right) + K_k'' \log \frac{2}{1-r},$$

ou bien pour $R' < r_0 \leq r < \rho < 1$,

$$(92)\quad m\left(r, \frac{f^{(k)}-1}{f^{(k-1)}}\right) < N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-1}\right) + \frac{1}{(\rho-r)^2}\left[\alpha_k' \left(\log \frac{1}{r} + n_k^*(R, 1) \log \frac{1}{\tau_1} \right) + \beta_k' \log \frac{1}{\rho - r} + \gamma_k' \overset{+}{\log} V(\rho, f)\right].$$

En vertu de l'hypothèse et supposant que $\tau_1 \leq 1$, on a

$$N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-1}\right) < (\tau_1 + 1) \log \frac{1}{1-r} < (\tau_1 + 1) \log \frac{1}{\rho - r}$$

pour $r \geq r_0$. Par conséquent, l'inégalité (92) s'écrit

$$(93)\quad m\left(r, \frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\right) < \frac{1}{(\rho-r)^2}\left[\alpha_k' \left(\log \frac{1}{r} + n_k^*(R, 1) \log \frac{1}{\tau_1} \right) + \beta_k'' \log \frac{1}{\rho - r} + \gamma_k' \overset{+}{\log} V(\rho, f)\right]$$

α_k', β_k', γ_k' dépendent de τ_1, r_0 et R' à part k.

En portant dans (90) les majorantes données par (91) et (92), on obtient

$$(94)\quad V(r, f) < \frac{1}{(\rho-r)^2}\left[\alpha_k \left(\overset{+}{\log} |c_0| + \log \frac{1}{r} + n_k^*(R, 1) \log \frac{1}{\tau_1} \right) + \beta_k \log \frac{1}{\rho - r} + \gamma_k \overset{+}{\log} V(\rho, f)\right].$$

La démonstration se poursuit alors comme dans le théorème précédent.

CHAPITRE III.

Familles de fonctions holomorphes.

14. En nous appuyant sur les théorèmes du chapitre précédent, nous allons établir des critères de normalité ou de quasi-normalité pour des familles de fonctions holomorphes.

Nous commençons par donner une définition. Soit (f) une famille de fonctions méromorphes d'ordre quelconque $f(x)$; nous convenons d'appeler valeur *également* exceptionnelle B ou d'ordre zéro au sens de Borel une valeur α telle que

$$\overline{\lim_{r \to 1}} \frac{N\left(r, \frac{1}{f-\alpha}\right)}{\log \frac{1}{1-r}} \leq \tau,$$

τ étant un nombre fini et de plus qu'étant donné un nombre positif ε, on puisse trouver une valeur r_0 pour que l'inégalité $r \geq r_0$ entraîne l'inégalité

$$(95) \qquad N\left(r, \frac{1}{f-\alpha}\right) < (\tau+\varepsilon)\log\frac{1}{1-r}$$

quel que soit $f \in (f)$. Nous dirons aussi que les fonctions f de la famille admettent *également* (ou la famille admet *également*) α comme valeur exceptionnelle B ou d'ordre zéro de Borel.

15. Dans la suite nous désignerons toujours par (C_r) le cercle $|z| \leq r$ et par (C') celui de $|z| < R' (< 1)$ et pour plus de clarté, par $n(r, \alpha, f)$ le nombre des points α de la fonction f compris dans le cercle $|z| \leq r$.

Le théorème A fournit des critères analogues à tous ceux que nous avons obtenus antérieurement pour le cas des valeurs exceptionnelles au sens de Picard-Borel, par exemple on a le suivant :

Théorème I. — *Soit une famille de fonctions $f(z)$ holomorphes définie par un développement de la forme* (64) *dans le cercle unité, dont les valeurs à l'origine sont en module bornées supérieurement; si elles s'y annulent chacune p fois au plus et y admettent également* 1 *comme valeur exceptionnelle* B, *de plus si les $n(r, 1, f)$ sont bornés par un nombre $n_k(r, 1)$ ne dépendant que de r, la famille est normale dans tout cercle intérieur au cercle unité pourvu que $c_0 \neq 1$ et $|a_1| > d > 0$.*

16. En nous appuyant maintenant sur les théorèmes B_0 et B, nous allons établir d'autres critères.

Théorème II. — *Soit (f) une famille de fonctions $f(z)$ holomorphes dans le cercle unité ayant* (74) *pour développement. Si elles ne s'y annulent pas, si leurs dérivées d'ordre k y admettent également* 1 *comme valeur exceptionnelle* B *et si les $n(r, 1, f^{(k)})$ sont bornés par un nombre $\overline{n}_k(r, 1)$ ne dépendant que de r, la famille est normale dans tout cercle intérieur au cercle unité, pourvu que $|c_k| \neq 1$.*

Considérons le cercle (C_r). De toute suite infinie $f_n(z)$ de (f), je dis que l'on peut toujours en extraire une suite partielle uniformément convergente dans ce cercle. En effet, distinguons trois cas :

1° Les valeurs $f_n(0)$ ont en module une limite $\gamma_0 \neq 0, \infty$. Alors on peut en extraire une suite infinie $f_{z_n}(0)$ convergeant vers γ_0. Considérons la suite $f_{z_n}(z)$ et appliquons le théorème B_0 à la fonction $f_{z_n}(z)$; il vient, pour $0 < r < R'$,

$$(96) \quad \log|f_{z_n}(z)| < \frac{1}{(R'-r)^2}\left[H_k\left(\overset{+}{\log}|f_{z_n}(0)| + \log\frac{1}{r} + p\log\frac{1}{d} + n_k(r', 1)\log\frac{1}{\eta}\right) + K_k \log\frac{2}{R'-r}\right],$$

où

$$r' = \frac{1}{4}\left[r + \frac{3}{2}(R' + 1)\right].$$

Cette inégalité est valable pour tout point du cercle $(C_{r'})$.

Par le choix de la suite $f_{\lambda_n}(0)$ on peut supposer que les $\log f_{\lambda_n}(0)$ soient bornés par un nombre fini A_0 et comme η_1 on peut prendre une même quantité pour toutes les fonctions de la suite $f_{\lambda_n}(z)$. Et puis en vertu de la définition de la valeur également exceptionnelle on constate que les coefficients H et K sont les mêmes pour toutes ces fonctions aussi. L'inégalité (96) montre alors que les fonctions $f_{\lambda_n}(z)$ sont bornées dans leur ensemble dans $(C_{r'})$. On peut donc conclure que la suite $f_{\lambda_n}(z)$ est normale dans $(C_{r'})$ et y engendre une suite uniformément convergente.

2° Les $f_{\lambda_n}(0)$ n'ont en module qu'une limite infinie. Alors on peut en extraire une suite $f_{\nu_n}(0)$ qui croît indéfiniment en module. Considérons les fonctions $f_{\nu_n}(z)$ et posons $g(z) = \frac{1}{f(z)}$. En observant que les $g(z)$ sont holomorphes dans $(C_{r'})$ et en posant $f(z) = f(0) + \varphi(z)$, l'inégalité

$$|g(z)| < \frac{1}{|f(0)| - M(r, \varphi)}$$

montre que la suite $g_{\nu_n}(z)$ converge uniformément vers zéro dans $(C_{r'})$. Donc la suite $f_{\nu_n}(z)$ converge uniformément vers l'infini dans $(C_{r'})$.

3° Les $f_n(0)$ n'ont qu'une limite zéro. On peut en extraire une suite $f_{\mu_n}(0)$ convergeant vers zéro et l'on démontre comme dans le cas précédent que la suite $f_{\mu_n}(z)$ converge uniformément vers zéro dans $(C_{r'})$.

En résumé, on peut conclure que la famille (f) est normale dans $(C_{r'})$, par suite dans (C'), puisque r peut être aussi voisin de R' que l'on veut. Puis pour R' suffisamment près de 1, tout cercle intérieur au cercle unité se trouvera contenu dans (C') sauf au plus les points de son contour qui peuvent se coïncider entièrement ou partiellement avec ceux de la circonférence (C'). Donc la famille est normale dans tout cercle intérieur au cercle unité; on peut dire aussi d'une façon abrégée qu'elle est normale dans l'intérieur du cercle unité.

Théorème III. — *Soit (f) une famille de fonctions holomorphes dans le cercle unité qui a (74) pour développement et dont les valeurs à l'origine sont bornées supérieurement. Si les fonctions ne s'annulent que p fois au plus et si leurs dérivées d'ordre k admettent également 1 comme valeur exceptionnelle B; et si les nombres $n(r, 1, f^{(k)})$ sont bornés par un nombre $n_k(r, 1)$ ne dépendant que de r, alors la famille est normale dans tout cercle intérieur au cercle unité, pourvu que $c_k \neq 1$ et que pour les zéros a_1 des fonctions de la famille, on ait $|a_1| > d > 0$.*

Donnons-nous arbitrairement une suite infinie $f_n(z)$ des fonctions de la

famille (f). En vertu d'un résultat de M. P. Montel que nous avons mis sous forme d'un lemme ([1]), de la suite $f_n(z)$, on peut extraire une suite partielle $f_{\alpha_n}(z)$ et obtenir dans (C_r) au plus p points $A_i (i = 1, \ldots, p)$ tels qu'en traçant de chaque A_i comme centre un cercle (ω_i) de rayon arbitrairement petit ε_i, chaque $f_{\alpha_n}(z)$ ait un zéro au plus dans un (ω_i) et n'en ait aucun à l'extérieur des (ω_i).

Maintenant considérons un cercle (ω_i) et les zéros $a_{\alpha_n,i}$ des fonctions f_{α_n}, qui sont intérieurs à ce cercle (ω_i). De chaque $a_{\alpha_n,i}$ comme centre, traçons un petit cercle $(\gamma_{\alpha_n,i})$ de rayon $\delta_{\alpha_n,i}$ contenant (ω_i); puis de centre A_i et de rayon $\bar{\varepsilon}_i$ traçons une petite circonférence $(\bar{\omega}_i)$ enveloppant tous les $(\gamma_{\alpha_n,i})$ dont les centres se trouvent dans le même cercle (ω_i).

Désignons par (D) le domaine limité par (C_r) et les (ω_i).

D'après l'hypothèse, les $f_{\beta_n}(0)$ ne peuvent pas avoir l'infini comme limite et nous n'avons que deux cas à examiner.

1° Les $f_{\beta_n}(0)$ ont une limite $\gamma_0 \neq 0$. On en extrait une suite infinie $f_{\lambda_n}(0)$ tendant vers γ_0 et l'on considère la suite $f_{\lambda_n}(z)$.

De chaque point 1 de la fonction $f_{\lambda_n}^{(k)}(z)$ comme centre, traçons un cercle (σ_{λ_n}) de rayon arbitrairement petit η.

Appliquons à $f_{\lambda_n}(z)$ le théorème B; on a, en posant $r' = \frac{1}{2}(1 + r)$,

$$(97) \quad \log|f_{\lambda_n}(z)| < \frac{1}{(R'-r')^3}\left[H_k\left(\omega'_0 + \log\frac{1}{r} + p\log\frac{1}{d} + n_k(r', 1)\log\frac{1}{\eta_1}\right) + K_k \log\frac{2}{R'-r}\right].$$

Par le choix de la suite, les ω_0 ont une borne $\bar{\omega}_0$. Pour toutes les fonctions de la suite $f_{\lambda_n}(z)$, il existe un même nombre d par hypothèse et l'on peut prendre le même η_1 puisqu'il est arbitraire. De plus, en vertu des hypothèses, on constate que H_k et K_k sont également les mêmes pour toutes les fonctions $f_{\lambda_n}(z)$.

Alors en remplaçant ω_0 par $\bar{\omega}_0$, l'inégalité (97) montre que les $f_{\lambda_n}(z)$ sont en module bornés dans leur ensemble dans (C_r); et l'on arrive comme dans le théorème précédent à conclure que la suite $f_{\lambda_n}(z)$ est génératrice d'une suite partielle uniformément convergente dans (C_r).

2° Les $f_{\alpha_n}(0)$ ont seulement zéro pour limite. On peut en extraire une suite infinie $f_{\mu_n}(0)$ convergeant vers zéro et l'on considère la suite $f_{\mu_n}(z)$. Dans $(\bar{D})$, les $f_{\mu_n}(z)$ ne s'annulent pas et les fonctions $g_{\mu_n}(z) = \frac{1}{f_{\mu_n}(z)}$ y sont holomorphes. En écrivant $g(z) = g(0) + \varphi(z)$ et en désignant par $\bar{M}(r, \varphi)$ le maximum de $|\varphi_{\mu_n}(z)|$ dans $(\bar{D})$, l'inégalité

$$|f_{\mu_n}(z)| < \frac{1}{|g_{\mu_n}(0)| - \bar{M}(r, \varphi_{\mu_n})}$$

permet de prouver que la suite $f_{\mu_n}(z)$ converge uniformément vers zéro dans $(\overline{D})$.

A partir de ces résultats, on arrive de suite à conclure que la famille est quasi-normale dans (C_r) avec les A_i comme points irréguliers possibles. Prouvons que ces points sont réguliers. Soit A un de ces points; de centre A, traçons une petite circonférence (γ) ne contenant pas d'autres points A_i. Sur (γ), la famille est normale: toute suite de ses fonctions engendre une suite $f_n(z)$ uniformément convergente sur (γ). Or, d'après ce qui précède, la limite ne peut pas être la constante infinie, donc elle est une fonction holomorphe. Alors d'après un théorème de Weierstrass, la convergence uniforme de la suite $f_n(z)$ a lieu dans tout le cercle (γ). Par conséquent, A est un point régulier.

En particulier, on a le critère :

Soit une famille de fonctions holomorphe définies par

$$f(z) = A + \ldots + c_k z^k + c_{k+h} z^{k+h} + \ldots \qquad (c_k,\ c_{k+h} \neq 0) \tag{98}$$

dans le cercle unité, A étant un nombre fixe différent de 0 *et* 1. *Si elles s'y annulent p fois au plus, si leurs dérivées $f^{(k)}$ y admettent* 1 *comme valeur également exceptionelle* B *et si les $n(r, 1, f^{(k)})$ sont bornés par un nombre $\overline{n}_k(r, 1)$ ne dépendant que de r, la famille est normale dans tout cercle intérieur au cercle unité, pourvu que $c_k \neq 1$ et que pour les zéros a_1 on ait $|a_1| \geqq d > 0$.*

17. Soit (f) une famille de fonction méromophe définie par un développement de forme (74); appelons comme antérieurement famille réduite de (f) une famille (φ) dont les fonctions $\varphi(z)$ se déduisent de $f(z)$ en remplaçant $f(0)$ par un nombre fini $A \neq 0$.

En s'appuyant sur le théorème précédent, on peut démontrer le théorème suivant par le procédé que nous avons utilisé pour le théorème analogue du Mémoire cité.

Théorème IV. — *Soit (f) une famille de fonctions holomorphe* (74) *dans le cercle unité et (φ) une de ses familles réduites dont $\varphi^{(k)}(0) \neq 1$. Si les fonctions $\varphi(z)$ ne s'y annulent que p fois au plus et si leurs dérivées $\varphi^{(k)}(z)$ y admettent* 1 *comme valeur également exceptionnelle* B; *de plus, si les $n(r, 1, \varphi^{(k)})$ sont bornés par un nombre $n_k(r, 1)$ ne dépendant que de r, alors la famille (f) est normale dans tout cercle intérieur au cercle unité, pourvu que pour les zéros α_1 des φ, on ait $|\alpha_1| \geqq d > 0$.*

18. Dans le cas général on a le critère de quasi-normalité suivant :

Théorème V. — *Soit (f) une famille de fonctions $f(z)$ holomorphe définies par* (74) *dans le cercle unité. Si elles s'y annulent p fois au plus, si leurs dérivées $f^{(k)}$ y admettent* 1 *comme valeur également exceptionnelle* B *et si les*

nombres $n(r, 1, f^{(k)})$ sont bornés par un nombre $n(r, 1)$ ne dépendant que de r, alors la famille est quasi normale d'ordre p au plus, dans tout cercle $|z| < R' (< 1)$ pourvu que $f^{(k)}(0) \neq 1$ et que $|a_1| \geq d > 0$.

En reprenant le raisonnement fait pour le théorème III, nous arrivons à obtenir la suite $f_{2_n}(z)$ et les points $A_i (i = 1, \ldots, p)$. Mais en plus des deux cas considérés dans la démonstration de ce théorème, nous avons ici à examiner encore le cas où les $f_{2_n}(0)$ n'ont en module que l'infini comme limite.

Pour ce cas, on peut extraire des valeurs $f_{2_n}(0)$ une suite $f_{\nu_n}(0)$ qui croît, en module, indéfiniment et l'on montre d'une façon analogue à celle dont on a traité le second cas que la suite $f_{\nu_n}(z)$ converge uniformément en module vers l'infini.

Alors on est conduit à conclure que la famille est quasi normale dans (C_r) avec au plus les A_i comme points irréguliers et la démonstration s'achève aussitôt.

Remarque. — Au moyen de la méthode que M. P. Montel a utilisée pour établir son théorème de quasi-normalité, il est très facile de démontrer le théorème précédent et l'on peut supprimer l'hypothèse que $|a_1| \geq d > 0$.

CHAPITRE IV.

Extensions du théorème de Landau.

19. On a d'abord le théorème suivant analogue à celui que nous avons obtenu antérieurement et la démonstration se fait de la même façon.

Théorème C. — *Soit une fonction holomorphe*

$$F(Z) = C_0 + C_1 Z + \ldots \qquad (C_0, C_1 \neq 0) \tag{99}$$

dans le cercle $|Z| < R$; si elle ne s'y annule que p fois et y admet 1 comme valeur exceptionnelle B, *et si les nombres $n(r, 1, f)$ sont bornés par un nombre $n(r, 1)$ ne dépendent que de r, on a en supposant $C_0 \neq 1$,*

$$|C_1| R < K e^{H\Omega(C_0, C_1)}, \tag{100}$$

avec

$$\Omega(C_0, C_1) = \overline{\log}|C_0| + \overline{\log}\left|\frac{1}{C_0}\right| + \overline{\log}\left|\frac{1}{C_0 - 1}\right| + \overline{\log}\left|\frac{1}{C_1}\right|, \tag{101}$$

H *et* K *sont des constantes numériques.*

20. Occupons-nous du cas où intervient la dérivée et démontrons d'abord le théorème préliminaire :

Soit une fonction holomorphe dans le cercle unité ayant pour développement

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_k z^k + \ldots \qquad (c_0, c_k, c_{k-1} \neq 0). \tag{102}$$

Si elle ne s'y annule que p fois ; si sa dérivée d'ordre k y admet un nombre $\lambda (\neq 0)$ comme valeur exceptionnelle B, *de sorte que*

$$N\left(r, \frac{1}{f^k - \lambda}\right) < (\tau_1 + \varepsilon) \log \frac{1}{1 - r} \qquad \text{pour} \quad r \geq r_0 ;$$

et si les nombres $n(r, \lambda, f^{(k)})$ sont bornés par un nombre $n_1(r, \lambda)$ ne dépendent que de r, on a, en supposant $c_k \neq \lambda$, l'inégalité

$$m(r, f) < H_k\left(\Omega_k(c_0, c_k, c_{k-1}) - p \log \frac{1}{d} + \log \frac{1}{r}\right) - K_k \log \frac{2}{1 - r}, \tag{103}$$

avec

$$\Omega_k = \bar{\log} |C_0| + \bar{\log} \left|\frac{1}{c_0}\right| + \bar{\log} \left|\frac{1}{c_k}\right| + \bar{\log} \left|\frac{1}{c_{k-1}}\right| + \bar{\log} \left|\frac{1}{c_{k-1}}\right| ,$$

où d est un nombre positif, H_k *et* K_k *sont deux constantes numériques ne dépendant que de λ, τ_1 et r_0 à part k.*

Considérons l'identité

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{f^k}{f} - \frac{f^k - \lambda}{f^{k-1}} \frac{f^{k-1}}{f}\right),$$

où λ est un nombre différent de zéro. On en déduit

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) < m\left(r, \frac{f^k}{f}\right) m - \left(r, \frac{f^k - \lambda}{f^{k-1}}\right) - m\left(r, \frac{f^{k+1}}{f}\right) - \bar{\log} \left|\frac{1}{\lambda}\right| - \log 2. \tag{104}$$

En appliquant la formule de Jensen au deuxième terme du second nombre, il vient

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{1}{f}\right) < m\left(r, \frac{f^k}{f}\right) - m\left(r, \frac{f^{k+1}}{f}\right) - m\left(r, \frac{f^{k+1}}{f^k - \lambda}\right) \\ - N\left(r, \frac{1}{f^k - \lambda}\right) - \log \left|\frac{f^k(0) - \lambda}{f^{k-1}(0)}\right| - \bar{\log} \left|\frac{1}{\lambda}\right| - \log 2, \end{aligned}$$

et comme

$$m(r, f) = m\left(r, \frac{1}{f}\right) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log |f(0)| ,$$

on obtient

$$\begin{aligned} m(r, f) < m\left(r, \frac{f^k}{f}\right) - m\left(r, \frac{f^{k+1}}{f}\right) - m\left(r, \frac{f^{k+1}}{f^k - \lambda}\right) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\ - N\left(r, \frac{1}{f^k - \lambda}\right) - \log |c_0| - \log \left|\frac{c_k - \lambda}{c_{k-1}}\right| - \bar{\log} \left|\frac{1}{\lambda}\right| - \log 2, \end{aligned} \tag{105}$$

où en supposant $\left|\frac{1}{\lambda}, \infty\right| > \delta > 0$, on a $\bar{\log} \left|\frac{1}{\lambda}\right| < \log \frac{1}{\delta}$.

Appliquons le lemme I' aux trois premiers termes du second membre et

majorons le quatrième et le cinquième par $p\log\frac{1}{d}$ et $(\tau_1+1)\log\frac{1}{\rho-r}$ respectivement, cette inégalité peut être mise alors sous la forme

$$(106)\qquad m(r,f)<\overline{A}_k\left(\overline{\Omega}_k(c_0,c_k,c_{k-1})+p\log\frac{1}{d}+\log\frac{1}{r}\right)+\overline{B}_k\log\frac{1}{\rho-r}+\overline{C}_k\overset{+}{\log}m(\rho,f)$$

où

$$\overline{\Omega}_k=\overset{+}{\log}|c_0|+\overset{-}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right|+\overset{+}{\log}|c_k|+\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_k}\right|+\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_k-\lambda}\right|+\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_{k-1}}\right|.$$

Éliminons le terme $\overset{-}{\log}|c_k|$; prenons l'inégalité (19) et désignons son second membre par $P_k(r,\rho)$. Comme $T\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)$ est majoré par $P_k(r,\rho)+N\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)$ qui est égal à $P_k(r,\rho)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)$, on a *a fortiori*

$$\log\left|\frac{f^{(k)}(0)}{f(0)}\right|=T\left(0,\frac{f^{(k)}}{f}\right)<P_k(r,\rho)+N\left(r,\frac{1}{f}\right),$$

par suite

$$\begin{aligned}\overset{-}{\log}|f^{(k)}(0)|&=\overset{-}{\log}\left|f(0)\frac{f^{(k)}(0)}{f(0)}\right|<\overset{+}{\log}|f(0)|+\overset{+}{\log}\left|\frac{f^{(k)}(0)}{f(0)}\right|\\&<\overset{+}{\log}|c_0|+P_k(r,\rho)+p\log\frac{1}{d}.\end{aligned}$$

En substituant cette borne à $\overset{-}{\log}|c_k|$, l'inégalité (106) devient

$$(107)\qquad m(r,f)<A_k\,\Omega_k\left(c_0,c_k,c_{k-1}\right)+p\log\frac{1}{d}+\log\frac{1}{r}\Big)+B_k\log\frac{1}{\rho-r}+C_k\overset{+}{\log}m(\rho,f)$$

et elle est valable pour $r\geqq r_0$.

Appliquons alors le théorème A à cette inégalité ; il vient de suite, pour $r\geqq r_0$,

$$(108)\qquad m(r,f)<H_k\left(\Omega_k(c_0,c_k,c_{k-1})+p\log\frac{1}{d}+\log\frac{1}{r}\right)+K_k\log\frac{2}{1-r},$$

inégalité qui reste valable pour $r<r_0$, si l'on majore éventuellement H_k et K_k. Ces deux coefficients peuvent dépendre alors de δ, τ_1 et r_0 à part k.

21. Maintenant, nous allons établir le théorème en vue.

Théorème D. — *Soit une fonction holomorphe*

$$(109)\qquad F(Z)=C_0+C_1Z+C_2Z^2+\ldots\qquad(C_0,C_1,C_2\neq 0)$$

dans le cercle $|Z|<R$ *et l'on suppose que* $C_1\neq 1$ *et* $R|C_1|\neq 1$ *dans le cas où* $|C_1|<1$. *Si* $F(Z)$ *ne s'annule que p fois dans ce cercle ; si sa dérivée* $F'(Z)$ *y admet* 1 *comme valeur exceptionnelle* B, *de sorte que l'on ait*

$$N\left(\rho,\frac{1}{F'-1}\right)<(\tau_1+\varepsilon)\log\frac{R}{R-\rho}\qquad(0<\rho<R)$$

pour $\rho \geq \rho_0$ *; et si les nombres* $n(r, 1, f')$ *sont bornés par un nombre* $n_1(r, 1)$ *ne dépendant que de* r*, alors, en désignant par* d *un nombre positif supérieur ou égal au module du premier zéro de* F*, on a l'inégalité*

$$(110) \qquad {}_1C_1 \; R < K\, e^{H\Omega_1(C_0, C_1, C_2)},$$

avec

$$(111) \qquad \Omega_1 = \log^+ C_0 - \log^- \left|\frac{1}{C_0}\right| - \log^- \left|\frac{1}{C_1}\right| - \log^- \left|\frac{1}{C_1 - 1}\right| - \log^- \left|\frac{1}{C_2}\right| + p \log \frac{1}{d},$$

H *et* K *étant deux constantes qui dépendent seulement de* r_1 *et* ρ_0.

Posons $Z = Rz$; les cercles $Z = R$ et $Z = \rho\,(< R)$ se transforment respectivement en $z' = 1$ et $z' = r\,(< 1)$ avec $\rho = Rr$ et l'on a

$$(112) \qquad f(z) = F(Rz) = C_0 - C_1 Rz - C_2 R^2 z^2 - \ldots.$$

Cette fonction $f(z)$ est holomorphe dans le cercle unité et ne s'y annule que p fois. De plus, si β_μ est un zéro de $F - 1$ dans le cercle $Z \leq \rho$, $b_\mu = \frac{\beta_\mu}{R}$ sera un zéro de $f' - R$ dans le cercle $z \leq r$ avec le même ordre de multiplicité; il en résulte que $N\left(r, \frac{1}{f' - R}\right) = N\left(\rho, \frac{1}{F' - 1}\right)$. Comme $\frac{R}{R - \rho} = \frac{1}{1 - r}$, R est une valeur exceptionnelle B pour f'.

Alors on peut appliquer à f le théorème précédent. En observant que R peut être supposé supérieur à 1 et en tenant compte des hypothèses sur C_1, on a

$$(113) \qquad m(r, f) < H'\left(\Omega_1(C_0, C_1, C_2) - \log \frac{1}{r}\right) + K' \log \frac{2}{1 - r}.$$

D'autre part, une inégalité de Cauchy et l'inégalité (3) donnent

$$(114) \qquad f'(0) < \frac{1}{3} M\left(\frac{1}{3}, f\right) \qquad \text{et} \qquad \log M\left(\frac{1}{3}, f\right) < 3m\left(\frac{2}{3}, f\right).$$

Des inégalités (113) et (114), on déduit immédiatement (110).

SUR LES POINTS SINGULIERS

DES

SÉRIES DE DIRICHLET

D'UNE CLASSE DE CRAMER

PAR M. MAURICE BLAMBERT.

A la Mémoire de Georges Valiron.

INTRODUCTION.

Dans ce Mémoire, je suppose connues les propriétés classiques des séries de Dirichlet. Je me propose de retrouver sous certaines conditions, et de généraliser d'une certaine manière, un résultat dû à G. Pólya relatif aux points singuliers des fonctions définies par la relation fonctionnelle $\psi(s)=\sum_{r=0}^{\infty}\gamma_r\varphi^r(s)$, où les coefficients constants γ_r et la fonction $\varphi(s)$ sont donnés. Ce résultat consiste en une contribution intéressante au problème suivant : Connaissant les singularités de $\varphi(s)$, que dire des singularités de $\psi(s)$?

Il est vrai que je ne redémontre pas dans toute sa généralité la propriété en question, mais la méthode utilisée a l'avantage de me permettre de formuler d'autres résultats que je crois nouveaux à ce jour et qui, pour la classe des fonctions à laquelle je me limite, constituent une généralisation du résultat de G. Pólya. Cette méthode est, dans l'essentiel, l'application d'un important théorème dû à V. Bernstein. Les résultats obtenus sont intéressants, non seulement en eux-mêmes, mais aussi par le rôle fondamental qu'ils jouent dans certains problèmes importants de la composition des singularités des séries de Dirichlet générales [j'ai d'ailleurs mis en évidence, dans deux Mémoires et

diverses Notes (¹), l'étroite liaison entre la théorie des équations différentielles d'ordre fini ou non et des problèmes de cette espèce].

Il est vrai aussi que je modifie la forme sous laquelle G. Pólya a représenté $\psi(s)$, forme qui rattache le problème à la théorie des équations différentielles linéaires d'ordre infini non homogènes. La méthode utilisée, eu égard aux limitations qu'elle suppose, conduit tout naturellement à conserver à $\psi(s)$ la représentation dirichletienne dans les énoncés des résultats, représentation qui est du type, communément appelé maintenant, de Cramér. Cette dernière remarque justifie le titre du Mémoire. Enfin, terminons en disant que le problème en question, soit qu'on le rattache plus particulièrement à la théorie des équations différentielles ou à celle des séries de Dirichlet, est en rapport étroit avec une riche suite de travaux dus, entre autres, à F. Schürer, J. F. Ritt, H. Cramér, G. Valiron, H. Muggli, et plus récemment R. P. Boas, R. Wilson, etc.

M. Chattelun a bien voulu lire ce travail et m'adresser d'utiles remarques; qu'il en soit ici remercié.

CHAPITRE I.

Je rappelle quelques définitions et propriétés indispensables à l'intelligence du texte.

Soient $\psi(s)=\Sigma b_p e^{-\lambda_p s}$, $\mu_p \uparrow \infty$ et σ_c^ψ, σ_λ^ψ les abscisses de convergence simple, absolue de cette série. Soit $-\infty < \sigma_1 < \infty$, et soit Δ un domaine (ensemble connexe de points tous intérieurs), situé dans le demi-plan $\sigma > \sigma_1$, ayant les caractères suivants :

(A) Δ contient des points s tels que $\mathcal{R}s=\sigma>\sigma_\lambda^\psi$;

(B) la fonction $\psi(s)$ est holomorphe dans Δ, égale à la somme de la série $\Sigma b_p e^{-\lambda_p s}$ pour $s\in\Delta$, $\sigma>\sigma_\lambda^\psi$.

Soit $\Delta_\psi^{\sigma_1}$ le plus grand domaine qui contient chaque domaine Δ ayant les propriétés mentionnées, et qui possède la propriété de type (B), c'est-à-dire que $\psi(s)$ est holomorphe dans $\Delta_\psi^{\sigma_1}$ et est égale à la somme de la série $\Sigma b_p e^{-\lambda_p s}$ pour $s\in\Delta_\psi^{\sigma_1}$, $\sigma>\sigma_\lambda^\psi$. L'ensemble formé de tous les points du demi-plan $\sigma\geq\sigma_1$ qui n'appartiennent pas à $\Delta_\psi^{\sigma_1}$ est représenté par $S_\psi^{\sigma_1}$ et appelé « l'ensemble singulier de $\psi(s)$ par rapport au demi-plan $\sigma>\sigma_1$ » (²). Enfin, $\Delta_\psi^{\sigma_1}$ possède l'importante propriété suivante : $\psi(s)$ ne peut être prolongée analytiquement, à partir d'un point de son demi-plan de convergence, jusqu'à un point de $S_\psi^{\sigma_1}$ le

(¹) *Un problème de composition des singularités des séries de Dirichlet générales* (*Acta Mathematica*, t. 89, 1953, p. 217-247); *Quelques théorèmes fabériens relatifs au problème Hadamard-Mandelbrojt* (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, 2e série, t. 3, 1954, p. 214-243); *C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 1666; t. 228, 1949, p. 1915; t. 230, 1950, p. 1565 et t. 234, 1952, p. 179.

(²) S. Mandelbrojt, *Dirichlet series* (*The rice Institute Pamphlet*, vol. 31, 1944).

long d'un arc de Jordan sans point commun avec la droite $\sigma = \sigma_1$. L'ensemble $S_\varphi^{\sigma_1}$ est fermé.

Les points de la droite $\sigma = \sigma_1$ appartiennent à $S_\varphi^{\sigma_1}$. Si $\sigma_1' < \sigma_1$, on a évidemment $\Delta_\varphi^{\sigma_1} \subset \Delta_\varphi^{\sigma_1'}$.

S'il existe σ_1 tel que $S_\varphi^{\sigma_1}$ ne se réduit pas à la droite $\sigma = \sigma_1$, c'est-à-dire si l'on a pour σ_1 suffisamment petit algébriquement $\sigma_1 < \overline{\text{borne}}\,\sigma$ pour $s \in S_\varphi^{\sigma_1}$, alors la fonction $\varphi(s)$ n'est pas entière; le nombre $\sigma_{\mathcal{H}}^\varphi = \overline{\text{borne}}\,\sigma$, $s \in S_\varphi^{\sigma_1}$ est l'abscisse d'holomorphie de $\varphi(s)$.

Notons P_φ le demi-plan $\sigma \geq \sigma_1$. La branche principale de $\varphi(s)$ est holomorphe dans $\bigcap_{\overline{P}_\varphi} S_\varphi^{\sigma_1}$ et admet $S_\varphi^{\sigma_1}$ pour ensemble singulier par rapport à $P_\varphi(\sigma > \sigma_1)$.

Le point $\beta \in S_\varphi^{\sigma_1}$ est dit « accessible » ([3]) pour $\varphi(s)$ s'il existe un cercle ouvert de centre β et de rayon $\rho > 0$ tel que l'on peut choisir, dans ce cercle, un diamètre (partageant ce cercle en deux demi-cercles ouverts) partagé par le point β en deux rayons « ouverts », de sorte que la fonction $\varphi(s)$ soit régulière dans au moins un des demi-cercles et sur au moins un des rayons.

Soit $\psi(s) = \sum_r (-1)^r \frac{\gamma_r \varphi^r(s)}{\Gamma(r+1)}$; la fonction $\theta(z) = \sum \frac{\gamma_r z^r}{\Gamma(r+1)}$ est dite la « génératrice » de cet opérateur.

G. Pólya a énoncé ([4]) :

Si la « génératrice » ($\not\equiv 0$) est de type exponentiel et à diagramme indicateur se réduisant au point origine, alors :

1° *tout point régulier pour $\varphi(s)$ est régulier pour $\psi(s)$;*

2° *tout point singulier « accessible » pour $\varphi(s)$ est aussi singulier pour $\psi(s)$.*

Les notions, fonction entière de type exponentiel et diagramme indicateur d'une fonction, sont suffisamment connues pour ne pas avoir à les rappeler.

Je me propose, dans ce travail, de retrouver cette propriété pour une certaine classe de fonctions $\varphi(s)$ et une certaine classe de génératrices $\theta(z)$, et de compléter par quelques propriétés des points singuliers « non accessibles ».

Je dis qu'un point $\beta \in S_\varphi^{\sigma_1}$, avec $\mathcal{R}\beta = \sigma_{\mathcal{H}}^\varphi$, est « semi-isolé sur l'axe d'holomorphie » ([5]) de $\varphi(s)$, s'il est point frontière d'un intervalle ouvert de mesure positive, situé sur cet axe, et régulier pour $\varphi(s)$. Il est évident que si $\beta \in S_\varphi^{\sigma_1}$, $\mathcal{R}\beta = \sigma_{\mathcal{H}}^\varphi$, est « accessible », il est aussi « semi-isolé ... » et réciproquement. Me limitant à des fonctions $\varphi(s)$ définies dans un demi-plan par une série de

([3]) G. Pólya, *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen* (*Ann. Math.*, 1933).

([4]) *Loc. cit.* et *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1927, p. 187-195.

([5]) G. Pólya a introduit la notion de point « semi-isolé sur le cercle de convergence » d'un développement taylorien. Consulter à ce sujet *Untersuchungen über Lücken ...* (*Ann. Math.*, 1933).

Dirichlet générale à exposants réels et aux points singuliers situés sur l'axe d'holomorphie, j'ai préféré, dans les énoncés que je donne, substituer l'expression « semi-isolé sur l'axe d'holomorphie » au terme « accessible » (6).

Je dis que le point $\beta \in S_{\varphi}^{\sigma_1}$, avec $\mathcal{R}\beta = \sigma_{\mathfrak{sc}}^{\varphi}$, est singulier du type « coupure » pour la fonction $\varphi(s)$ s'il existe un cercle $c(\beta, \rho)$, $\rho > 0$, tel que pour tout $s \in c(\beta, \rho)$, avec $\mathcal{R}s > \sigma_{\mathfrak{sc}}^{\varphi}$, la fonction $\varphi(s)$ admet la représentation $\varphi(s) = \mathcal{R}(s) + \mathcal{L}(s)$, où $\mathcal{R}(s)$ est une fonction holomorphe dans le domaine union du demi-plan $\mathcal{R}s > \sigma_{\mathfrak{sc}}^{\varphi}$ et du cercle $c(\beta, \rho)$, et où $\mathcal{L}(s)$ holomorphe dans $\mathcal{R}s > \sigma_{\mathfrak{sc}}^{\varphi}$ admet l'axe $\sigma = \sigma_{\mathfrak{sc}}^{\varphi}$ pour frontière naturelle.

Enfin, si $\mathcal{L}(s)$ est, dans son demi-plan d'existence, définie par la somme (ou son prolongement analytique) d'une série de Dirichlet dont la suite des exposants réels est mesurable et à densité nulle, je dirais que β est singulier du type « coupure » et de classe zéro.

Soit $\{\mu_p\}$, $0 < \mu_p \uparrow \infty$, une suite mesurable ou, plus généralement, à densité maximum finie D. V. Bernstein (7) a considéré certains ensembles de segments qui contiennent tous les μ_p comme points intérieurs. Ils les a appelés « ensembles de voisinage de la suite $\{\mu_p\}$ ».

Un tel ensemble, que l'on désigne par $E(q, \{\mu_p\})$, est construit de la manière suivante :

A chaque point μ_p faisons correspondre sur l'axe portant la suite $\{\mu_p\}$ un intervalle h_p de longueur $q \leq \frac{1}{10D'}$, $D' \geq D$, de façon que le point frontière gauche de cet intervalle coïncide avec le point μ_p ou avec le point frontière droit de l'intervalle h_{p-1}, et précisément avec celui des deux points qui est situé le plus à droite. Faisons aussi correspondre à chaque point μ_p un second intervalle h'_p de longueur q de sorte que, cette fois-ci, le point frontière droit de cet intervalle coïncide avec le point μ_p ou avec le point frontière gauche de l'intervalle h'_{p+1}, et précisément avec celui de ces deux points qui est situé le plus à gauche (on démontre, qu'en fait, un intervalle h'_p peut être construit à l'aide d'un nombre « fini » d'opérations).

$E(q, \{\mu_p\})$ désigne précisément la fermeture de l'ensemble des points qui appartiennent à tous les intervalles h_p, h'_p, $p = 1, 2, 3, \ldots$. Cet ensemble est constitué par une suite de segments disjoints, chacun d'eux étant la fermeture de l'union d'un certain nombre d'intervalles h_p et h'_p. Il possède, entre autres

(6) Récemment R. Wilson a publié, au sujet de la propriété de G. Pólya, un essai apparenté à ce Mémoire, mais relatif aux développements tayloriens. Les méthodes sont totalement différentes. *Voir* à ce sujet le Mémoire de cet auteur : *A note on a theorem of Pólya's* [*Quart. J. Math.*, Oxford, (A), t. 3, 1952, p. 145-150].

(7) *Sur les points singuliers des séries de Dirichlet* (*Rend. R. Ist. Lomb. Sc. Lett.*, t. 63, 1930); *Sopra alcuni teoremi relativi ai punti singolari delle serie di Dirichlet* (*Rend. R. Acc. Lincei*, t. 16, 1932); *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet générales* (Paris, 1933, Note I).

propriétés, les suivantes :

(1) chaque segment de l'ensemble contient au moins un point μ_p, et chaque μ_p appartient à un segment;

(2) si l désigne la longueur d'un segment de l'ensemble et si ν désigne le nombre des points μ_p intérieurs à ce segment, on a $(\nu+1)q \leq l \leq 2\nu q$;

(3) si z (réel fixe situé sur l'axe portant $\{\mu_p\}$) $\notin E(q, \{\mu_p\})$, on a $\underline{\text{borne}}\,|z-\mu_p| > q$.

Ce choix, $D' \geq D$, permet de ne pas exclure la considération des suites $\{\mu_p\}$ à densité nulle. Nous n'entrerons pas dans le détail des propriétés de l'ensemble $E(q, \{\mu_p\})$, renvoyant le lecteur aux Mémoires originaux.

Une autre notion, due également à V. Bernstein, nous est utile : « l'indice de condensation de la suite $\{\mu_p\}$ ». Soient μ_{p_ν}, $\mu_{p_\nu+1}$, ..., $\mu_{p_\nu+n_\nu}$ les $n_\nu+1$ points de $\{\mu_p\}$ qui appartiennent au $\nu^{\text{ième}}$ segment de l'ensemble $E(q, \{\mu_p\})$.

Posons

$$\varepsilon_{\nu,r} = \frac{1}{\Gamma(n_\nu+1)} \prod_{\substack{t=0 \\ (t\neq r)}}^{t=n_\nu} (\mu_{p_\nu+t} - \mu_{p_\nu+r}) \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, n_\nu)$$

(ceci suppose $n_\nu \geq 1$)

$$\eta_{\nu\nu} = \overline{\text{borne}}\, \frac{1}{\mu_{p_\nu+r}} L \frac{1}{|\varepsilon_{\nu,r}|} \qquad (r = 0, 1, 2, 3, \ldots, n_\nu)$$

[si $n_\nu = 0$, c'est-à-dire si le $\nu^{\text{ième}}$ segment de l'ensemble $E(q, \{\mu_p\})$ ne contient que le point μ_{p_ν}, on posera par définition $\eta_{\nu\nu} = 0$].

Posons $\overline{\lim}\,\eta_{\nu\nu} = \Delta$. C'est ce nombre qui est « l'indice de condensation de la suite $\{\mu_p\}$ ». On sait que, si $\{\mu_p\}$ est mesurable à densité finie, on a

$$\Delta = \overline{\lim}\, \frac{1}{\mu_p} L \frac{1}{|C'(\mu_p)|},$$

où $C'(z)$ est la dérivée de

$$C(z) = \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_p^2}\right).$$

Certains auteurs appellent suite « régulière », une suite $\mu_p \uparrow \infty$ satisfaisant à la condition $\underline{\lim}\,(\mu_{p+1} - \mu_p) = h > 0$; on sait, qu'alors, elle est à densité maximum au plus égale à $\frac{1}{h}$. Dans ce Mémoire, je conviens d'appeler suite « presque régulière » une suite réelle positive strictement croissante, $\{\mu_p\}$, possédant les propriétés suivantes :

(1) elle est à densité maximum finie D (elle peut, évidemment, être mesurable);

(2) posant $D' \geq D$ ($D' > D$ si $D = 0$, $D' = D$ si $D > 0$), il existe $q_0 \left(0 < q_0 \leq \frac{1}{10\,D'}\right)$

suffisamment petit de sorte que les segments disjoints qui constituent l'ensemble de voisinage, $E(q_0, \{\mu_p\})$, soient de longueur uniformément bornée;

(3) on peut toujours extraire, de cette suite $\{\mu_p\}$, une suite partielle $\{\mu_{p_j}\}$ mesurable à densité nulle de sorte que la suite complémentaire à $\{\mu_{p_j}\}$ par rapport à $\{\mu_p\}$ soit à indice de condensation fini.

Il est évident que (2) entraîne que le nombre des points μ_p intérieurs à un même segment de $E(q_0, \{\mu_p\})$ est lui-même borné. Il est non moins évident qu'une suite « régulière » est un cas particulier d'une suite « presque régulière » : la suite $\{\mu_{p_j}\}$ de (3) est alors vide et l'indice de condensation de $\{\mu_p\}$ est nul.

CHAPITRE II.

Avant d'aborder la démonstration des théorèmes I et II notons que :

Le théorème I suppose connu le théorème de G. Pólya relatif aux points singuliers « accessibles », et a pour objet, dans un certain champ d'hypothèses, d'étendre ce théorème à tous les points singuliers de $\varphi(s)$ situés sur l'axe d'holomorphie de cette fonction. Le théorème II a pour objet de retrouver par voie analytique, toujours dans un certain champ d'hypothèses, la propriété de G. Pólya en la limitant aux points singuliers de l'axe d'holomorphie de $\varphi(s)$. La technique utilisée pour chaque théorème est dans son principe, comme je l'ai annoncé dans l'introduction, l'usage d'un théorème fondamental de V. Bernstein; toutefois la méthode comporte des modifications sensibles d'un théorème à l'autre. *On peut donner au théorème* I *une démonstration calquée sur celle du théorème* II, *démonstration qui établit l'assertion sans faire intervenir le théorème de G. Pólya.* Il n'y a pas là un grand avantage; j'ai préféré, au contraire, éviter la monotonie qui résulterait de la systématisation d'une méthode. En conclusion à ces remarques préliminaires disons que, avec les restrictions imposées par la technique utilisée, on retrouve, pour une classe intéressante de fonctions $\varphi(s)$, le théorème de G. Pólya, et que cette même technique permet d'obtenir des résultats complémentaires non formulés par cet auteur.

THÉORÈME I. — *Dans les hypothèses :*

(1) *la suite des exposants* $\{\mu_p\}$ *de la série* $\varphi(s) = \Sigma b_p e^{-s\mu_p}$, *avec* $\sigma_c^\varphi < \infty$, *est mesurable à densité finie* $D > 0$; $\varphi(s)$ *n'admet pas son axe d'holomorphie,* $\sigma = \sigma_{\mathscr{H}}^\varphi > -\infty$, *pour frontière naturelle,*

(2) $\theta(z)$ *est une fonction entière du genre zéro dont tous les zéros* (*sauf un nombre fini au plus*) *sont réels négatifs.*

Si $\beta \in S_\varphi^{\sigma_1}$, *avec* $\mathscr{R}\beta = \sigma_{\mathscr{H}}^\varphi$, *ce point est aussi singulier pour* $\psi(s) = \Sigma b_p \theta(\mu_p) e^{-s\mu_p}$

(*la démonstration ci-dessous se limite au cas où l'ordre de multiplicité des zéros de* $\theta(z)$ *est uniformément borné*) (8).

Notons $\{\rho_p\}$ la suite des zéros réels négatifs « distincts » de $\theta(z)$ ordonnée selon la suite strictement croissante de leurs modules. Soit m_p l'ordre de multiplicité du zéro ρ_p. La fonction $\theta(z)$ peut s'écrire

$$\theta(z) = P(z) \prod_p \left(1 - \frac{z}{\rho_p}\right)^{m_p} = P(z)\,\Theta(z),$$

où $P(z)$ est un polynome à zéros non négatifs.

On sait que $\lim \frac{p}{\rho_p} = 0$ et que $\theta(z)$, $\Theta(z)$ sont du type exponentiel minimum (c'est-à-dire d'ordre « apparent » inférieur à 1 ou au plus du type minimum de l'ordre « apparent » 1). Remarquons que si l'on avait supposé $\theta(z)$ du type minimum de l'ordre 1, alors $\theta(z)$ aurait eu la représentation

$$\theta(z) = P(z)\, e^{az} \prod_p \left(1 - \frac{z}{\rho_p}\right) e^{\frac{z}{\rho_p}}$$

(ici, les zéros réels négatifs figurent un nombre de fois égal à leur ordre de multiplicité et sont ordonnés selon la suite « non décroissante » de leurs modules).

On sait (théorème de Lindelöf) (9) qu'alors

$$\lim \left\{ a + \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{\rho_p} \right\} = 0, \qquad \lim \frac{m}{\rho_m} = 0, \qquad m \to \infty ;$$

par conséquent

$$\theta(z) = P(z) \lim \prod_{p=1}^{m} \left(1 - \frac{z}{\rho_p}\right),$$

expression identique à celle ci-dessus si l'on met en évidence les ordres de multiplicité des zéros distincts. En outre, les zéros ρ_p étant tous de même signe, (—), $\theta(z)$ et $\Theta(z)$ sont donc de genre zéro.

---

(8) Il est bien évident (et il est à peine besoin de l'indiquer) que sous cette assertion à forme condensée il faut entendre que β est singulier pour la fonction $\psi(s)$ définie comme il a été précisé dans l'introduction à partir de la somme de la série $\Sigma b_p \theta(\mu_p) e^{-s\mu_p}$ lorsque s finie est intérieure au demi-plan $\sigma > \sigma_{\mathcal{C}}^{\psi}$; on a $\beta \in S_{\psi}^{\sigma_1}$ (σ_1 arbitrairement petit algébriquement). Remarquons aussi que les notations $\beta \in S_{\varphi}^{\sigma_1}$, $\mathcal{R}\beta = \sigma_{\mathcal{C}}^{\varphi}$, jointes à la condition que $\sigma = \sigma_{\mathcal{C}}^{\varphi}$ n'est pas frontière naturelle pour $\varphi(s)$ supposent implicitement que σ_1 est choisi algébriquement suffisamment petit de sorte que $S_{\varphi}^{\sigma_1}$ ne se réduit pas à l'axe $\sigma = \sigma_{\mathcal{C}}^{\varphi}$. En général σ_1 sera pris aussi petit algébriquement qu'il est nécessaire pour les besoins de la technique utilisée.

(9) *Ann. Éc. Norm. Sup.*, 3e série, t. 22, 1905, p. 369-395.

Il existe un entier p_0 tel que

$$\theta(\mu_p) \neq 0, \qquad p \geq p_0, \qquad \mu_p > 0.$$

Posons

$$\psi_0(s) = \sum_{p \geq p_0} b_p \theta(\mu_p) e^{-s\mu_p}, \qquad \psi(s) = \psi_0(s) + \mathcal{P}(s),$$

$\mathcal{P}(s)$ est un polynome de Dirichlet pouvant se réduire à la constante zéro. La fonction $\psi(s)$ est régulière dans tout domaine intérieur à $\bigcap_{\overline{P}_\varphi} S_\varphi^{\sigma_1}$. On le voit très facilement en posant

$$\theta(z) = \sum \frac{(-1)^r \gamma_r z^r}{\Gamma(r+1)}, \qquad \text{où} \quad \lim \sqrt[r]{\gamma_r} = 0;$$

$\psi_0(s)$ s'écrit, en posant $\varphi_0(s) = \sum_{p \geq p_0} b_p e^{-s\mu_p}$,

$$\psi_0(s) = \sum \frac{\gamma_r \varphi_0^{(r)}(s)}{\Gamma(r+1)}.$$

Cette série converge en tout point intérieur à $\bigcap_{\overline{P}_\varphi} S_\varphi^{\sigma_1}$.

Posons

$$s = \mathfrak{Z} + \beta, \qquad \Psi_0(\mathfrak{Z}) = \psi_0(\mathfrak{Z} + \beta) = \sum_{p \geq p_0} b'_p \theta(\mu_p) e^{-\mathfrak{Z}\mu_p},$$

$$b'_p = b_p e^{-\beta\mu_p}, \qquad \mathcal{R}\mathfrak{Z} = x, \qquad \Phi(\mathfrak{Z}) = \varphi(\mathfrak{Z} + \beta).$$

Notons $\{\mu_p\}_0$ la suite des exposants de la série $\varphi_0(s)$.

Supposons fausse l'assertion du théorème. Le point β, singulier pour $\varphi(s)$, est alors centre d'un intervalle (ouvert), de longueur $2l$, $l > 0$, situé sur l'axe $\sigma = \sigma_{\mathfrak{ac}}^{\varphi}$, et dont tous les points sont réguliers pour $\psi_0(s)$. Dans le plan de la variable $\mathfrak{Z}$, la même propriété a lieu pour $\Psi_0(\mathfrak{Z})$ dans un intervalle de même longueur, de centre $\mathfrak{Z} = 0$, situé sur l'axe $\mathcal{R}\mathfrak{Z} = 0$.

Eu égard à la classe des fonctions $\varphi(s)$ considérées, il existe des points réguliers sur $\sigma = \sigma_{\mathfrak{ac}}^{\varphi}$ pour $\varphi(s)$, donc aussi pour $\varphi_0(s)$ et $\psi_0(s)$. Par conséquent, il existe des points « semi-isolés sur l'axe d'holomorphie » pour $\varphi(s)$ [donc « accessibles » pour $\varphi(s)$] et singuliers pour $\psi_0(s)$ et $\psi(s)$ (10). Ainsi, on a nécessairement $x_{\mathfrak{ac}}^{\Psi_0} = 0$.

D'après un résultat classique, on a $l \leq \pi D$.

On ne considère pas ici le plus grand intervalle ouvert de centre $\mathfrak{Z} = 0$, situé sur l'axe $\mathcal{R}\mathfrak{Z} = 0$, et dont tous les points sont réguliers pour $\Psi_0(\mathfrak{Z})$, mais de

(10) C'est pour légitimer cette assertion qu'on utilise le théorème de G. Pólya rappelé au chapitre I.

préférence un intervalle de longueur positive centré au point $\mathfrak{Z}=0$ et dont la fermeture appartient à celui-ci (ses points frontières sont alors à distance positive des points frontières du précédent).

Eu égard à cette remarque, il n'y a aucun inconvénient à représenter encore par $2l$ la longueur d'un tel intervalle, mais l'inégalité $l<\pi D$ est évidemment seule légitime.

Alors, eu égard à (1), aux remarques précédentes et à la condition nécessaire d'un théorème de V. Bernstein (11), on peut trouver, dans le plan de la variable z, une fonction $\Omega(z)$ holomorphe dans un secteur $S\left(|\arg z|\leq\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, d'ouverture $2\alpha>0$, telle que

$$(a)\qquad |\Omega(z)|<e^{[(\pi D-l)|\sin\omega|+\varepsilon]|z|},\qquad z\in S,\qquad z=|z|e^{i\omega},$$

$\varepsilon<0$ arbitraire, $|z|$ suffisamment grand;

$$(b)\qquad \Omega(\mu_p)=b'_p\theta(\mu_p)\,C'(\mu_p),\qquad p\geq p_0,$$

où $C'(z)$ est la dérivée de

$$C(z)=\prod_{p\geq p_0}\left(1-\frac{z^2}{\mu_p'^2}\right).$$

On sait que $\Psi_0(\mathfrak{Z})$ est holomorphe, non seulement dans le demi-plan $\mathcal{R}\mathfrak{Z}>x^{\Psi_0}_{\mathfrak{Z}^0}=0$ (que l'on note $\mathfrak{P}_0$), mais aussi dans le domaine $T\cup\mathfrak{P}_0$, où T est l'ensemble des points intérieurs au triangle isoscèle de base $|\mathcal{J}\mathfrak{Z}|<l$, $\mathcal{R}\mathfrak{Z}=0$, et de sommet au point d'affixe réel $-l\operatorname{tg}\alpha$, auquel on ajoute les points de l'intervalle (ouvert) de base.

Notons $\{\mu'_p\}$ l'ensemble $\{-\rho_p\}\cap\{\mu_p\}_0$ ordonné en une suite strictement croissante. Il est évident que cet ensemble peut être vide.

Posons $M(z)=\Pi\left(1+\frac{z}{\mu'_p}\right)^{\nu_p}$, ν_p étant l'ordre de multiplicité du zéro $-\mu'_p$ de $\theta(z)$; cette fonction est évidemment de type exponentiel minimum et de genre zéro, et peut se réduire à un polynome (ou à la constante 1, par définition, si $\{\mu'_p\}$ est vide).

Notons $\{-\rho'_p\}$ la suite complémentaire à la suite $\{\mu'_p\}$ par rapport à la suite $\{-\rho_p\}$; $-\rho'_p\uparrow\infty$ (cette suite peut se réduire à un ensemble fini ou vide).

On a

$$\Theta(z)=M(z)\Theta_1(z),\quad\text{avec}\quad\Theta_1(z)=\Pi\left(1-\frac{z}{\rho'_p}\right)^{m'_p};$$

m'_p étant l'ordre de multiplicité du zéro ρ'_p de $\Theta(z)$.

Posons $\theta_1(z)=\Pi\left(1-\frac{z}{\rho'_p}\right)$, chacun des ρ'_p étant zéro de $\theta_1(z)$ à l'ordre 1;

---

(11) *Sur les points singuliers des séries de Dirichlet* (*Rend. R. Ist. Lomb. Sc. Lett.*, t. 63, 1930) et *Leçons sur les progrès récents ...*, chap. V, 1933, Paris.

évidemment $\theta_1(z)$ est de genre zéro et de type exponentiel minimum [on suppose que $\Theta_1(z)$ ne se réduit pas à un polynome ou à la constante 1].

Posons

$$\Theta_1^*(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{\rho'_p}\right)^{m'_p - 1}.$$

On a

$$\Theta_1(z) = \theta_1(z)\,\Theta_1^*(z),$$

$$\theta_1(z)\,\theta_1(-z) = \Pi\left(1 - \frac{z^2}{\rho'^2_p}\right).$$

Notons $\{\mu_p^*\}$ l'ensemble $\{-\rho'_p\} \cup \{\mu_p\}_0$ ordonné en une suite strictement croissante. La suite $\{\mu_p^*\}$ est mesurable et de même densité D que la suite $\{\mu_p\}_0$.

Posons

$$\mathcal{C}_1(z) = \theta_1(z)\,\theta_1(-z)\,\mathrm{C}(z);$$

on a

$$\mathcal{C}'_1(\mu_p^*) \neq 0.$$

Considérons la fonction

$$\Omega_1(z) = \Omega(z)\,\theta_1(-z), \qquad z \in \mathrm{S}.$$

Il est évident que

$$(a') \qquad |\Omega_1(z)| < e^{[(\pi \mathrm{D} - l)|\sin\omega| + \varepsilon]|z|}, \qquad z \in \mathrm{S},$$

$\varepsilon > 0$ arbitraire, $|z|$ suffisamment grand, les nombres D et l étant les mêmes que dans (a),

$$(b') \qquad \Omega_1(\mu_p) = b'_p \mathrm{P}(\mu_p)\,\mathrm{M}(\mu_p)\,\Theta_1^*(\mu_p)\,\mathcal{C}'_1(\mu_p), \qquad p \geq p_0.$$

Considérons la série

$$\Psi_{01}(\mathfrak{Z}) = \sum \frac{\Omega_1(\mu_p^*)}{\mathcal{C}'_1(\mu_p^*)}\, e^{-\mathfrak{Z}\mu_p^*}.$$

Fixons p et considérons μ_p^*.

Si $\mu_p^* \in \{-\rho'_n\}$, alors $\Omega_1(\mu_p^*) = \Omega(\mu_p^*)\,\theta_1(-\mu_p^*) = 0$; par conséquent,

$$\Psi_{01}(\mathfrak{Z}) = \Sigma b'_p \mathrm{P}(\mu_p)\,\mathrm{M}(\mu_p)\,\Theta_1^*(\mu_p)\, e^{-\mathfrak{Z}\mu_p}.$$

On a donc

$$x_{\mathcal{C}}^{\Psi_{01}} = \overline{\lim}\, \frac{\mathrm{L}|b'_p|}{\mu_p} = \sigma_{\mathcal{C}}^{\Phi} - \mathcal{R}\beta < \infty.$$

On a, en outre, $x_{\mathcal{H}}^{\Psi_{01}} \leq 0$; en effet,

$$\Psi_{01}(\mathfrak{Z}) = \sum \frac{\gamma'_r \varphi^{(r)}(\mathfrak{Z} + \beta)}{\Gamma(r+1)},$$

où l'on pose, comme plus haut,

$$\mathrm{P}(z)\,\mathrm{M}(z)\,\Theta_1^*(z) = \sum \frac{(-1)^r \gamma'_r z^r}{\Gamma(r+1)}, \qquad \text{avec} \quad \lim \sqrt[r]{\gamma'_r} = 0 \quad (12),$$

(12) Si toutefois $\mathrm{P}(z)\mathrm{M}(z)\Theta_1^*(z)$ ne se réduit pas à un polynome, auquel cas il est immédiat que $x_{\mathcal{H}}^{\Psi_{01}} = 0$.

et, par conséquent,

$$x_{\mathcal{BC}}^{\Psi_{01}} \leq \sigma_{\mathcal{BC}}^{\varphi} - \mathcal{R}\beta = \sigma_{\mathcal{BC}}^{\psi} - \mathcal{R}\beta = x_{\mathcal{BC}}^{\Psi_0} = 0.$$

Or, si l'on écrit $\Psi_{01}(\mathfrak{Z}) = \Sigma b''_p e^{-\mathfrak{Z}\mu_p}$, on voit que

$$\Psi_0(\mathfrak{Z}) = \Sigma b''_p \theta_1(\mu_p) e^{-\mathfrak{Z}\mu_p}$$

et que tout point singulier pour $\Psi_0(\mathfrak{Z})$ situé sur $\mathcal{R}\mathfrak{Z} = x_{\mathcal{BC}}^{\Psi_0}$ est évidemment singulier pour $\Psi_{01}(\mathfrak{Z})$; d'où résulte, nécessairement, $x_{\mathcal{BC}}^{\Psi_{01}} \geq x_{\mathcal{BC}}^{\Psi_0} = 0$; par conséquent, en rapprochant l'inégalité ci-dessus, on a $x_{\mathcal{BC}}^{\Psi_{01}} = 0$.

La mesurabilité de $\{\mu_p^*\}$, $x_{\mathcal{BC}}^{\Psi_{01}} = 0$, $x_{\mathcal{C}}^{\Psi_{01}} < \infty$, (a') et (b') entraînent, eu égard à la condition suffisante du théorème déjà utilisé de V. Bernstein, que $\Psi_{01}(\mathfrak{Z})$ est holomorphe dans $T \cup \mathfrak{T}_0$.

Mais alors, eu égard à (1), $x_{\mathcal{BC}}^{\Psi_{01}} = 0$, $\Omega_1(\mu_p^*) = 0$ si $\mu_p^* \in \{-\rho'_n\}$, $x_{\mathcal{C}}^{\Psi_{01}} < \infty$, et à la condition nécessaire du théorème de V. Bernstein, il existe une fonction $\Omega_{11}(z)$ holomorphe dans $S(|\arg z| \leq \alpha)$, d'ouverture $2\alpha > 0$, telle que

$$(a'') \qquad |\Omega_{11}(z)| < e^{\varepsilon(\pi\theta - h|\sin\omega| + \varepsilon)|z|}, \qquad z \in S,$$

$\varepsilon > 0$ arbitraire, $|z|$ suffisamment grand; les nombres D, l et α étant les mêmes que dans (a') et (a);

$$(b'') \qquad \Omega_{11}(\mu_p) = b'_p P(\mu_p) M(\mu_p) \Theta_1^*(\mu_p) C'(\mu_p), \qquad p \geq p_0.$$

Posons $\theta_2(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{\rho''_p}\right)$, où $\{\rho''_p\}$ est l'ensemble des zéros distincts de $\Theta_1^*(z)$, d'ordre de multiplicité au moins égal à 2 pour $\Theta_1(z)$, ordonné en une suite strictement décroissante vers $-\infty$. Bien entendu, $\{\rho''_p\}$ peut se réduire à un ensemble fini ou même vide.

Posons $\Theta_2(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{\rho'_p}\right)^{m'_p - 2}$; bien entendu, tout ρ'_p d'ordre 1 ou 2 pour $\theta(z)$ et $\Theta_1(z)$ ne figure plus dans $\Theta_2(z)$.

On a

$$\Theta_1^*(z) = \theta_2(z)\,\Theta_2(z).$$

Considérons la fonction $\Omega_2(z) = \Omega_{11}(z)\,\theta_2(-z)$. Elle possède la propriété de type (a), (a') et (a'') dans S, et la propriété de type (b), (b') et (b'') qui s'écrit

$$(b''') \qquad \Omega_2(\mu_p) = b'_p P(\mu_p) M(\mu_p) \Theta_2(\mu_p) \mathcal{C}'_2(\mu_p), \qquad p \geq p_0,$$

en posant $\mathcal{C}_2(z) = \Pi\left(1 - \frac{z^2}{\mu_p^{**2}}\right)$, où $\{\mu_p^{**}\}$ est l'ensemble $\{-\rho''_p\} \cup \{\mu_p\}_0$ ordonné en une suite strictement croissante. Il est évident que $\{\mu_p^{**}\} \subset \{\mu_p^*\}$.

La série $\sum \frac{\Omega_2(\mu_p^{**})\, e^{-\mathfrak{Z}\mu_p^{**}}}{\mathcal{C}'_2(\mu_p^{**})}$ se réduit, pour les mêmes raisons que précédemment, à

$$\Psi_{02}(\mathfrak{Z}) = \Sigma b'_p P(\mu_p) M(\mu_p) \Theta_2(\mu_p) e^{-\mathfrak{Z}\mu_p};$$

en raisonnant comme ci-dessus au sujet de $\Psi_{01}(\mathfrak{Z})$ on constaterait que $x_{\mathcal{BC}}^{\Psi_{02}} = 0$.

Alors, puisque $\{\mu''_p\}$ est mesurable de densité D, et eu égard aux propriétés de type (a) et (b) de $\Omega_2(z)$ et au théorème de V. Bernstein, la fonction $\Psi_{02}(\mathfrak{Z})$ est holomorphe dans $T \cup \mathcal{T}_0$.

On définirait de la même façon, à partir de $\Psi_{02}(\mathfrak{Z})$, une fonction

$$\Psi_{03}(\mathfrak{Z}) = \Sigma b'_p P(\mu_p) M(\mu_p) \Theta_3(\mu_p) e^{-\mathfrak{Z}\mu_p}, \qquad p \geq p_0,$$

holomorphe dans $T \cup \mathcal{T}_0$, où $\Theta_3(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{\rho'_p}\right)^{m'_p - 3}$ ne renferme que les zéros, d'ordre au moins égal à 4 pour $\Theta_4(z)$, extraits de la suite $\{\rho'_p\}$. Plus généralement, on définira ainsi une suite de fonctions $\{\Psi_{0n}(\mathfrak{Z})\}$ telle que

$$\Psi_{0n}(\mathfrak{Z}) = \sum_{p \geq p_0} b'_p P(\mu_p) M(\mu_p) \Theta_n(\mu_p) e^{-\mathfrak{Z}\mu_p},$$

holomorphe dans $T \cup \mathcal{T}_0$, où $\Theta_n(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{\rho'_p}\right)^{m'_p - n}$ ne renferme que les zéros, d'ordre au moins égal à $n+1$ pour $\Theta_4(z)$, extraits de la suite $\{\rho'_p\}$. Bien entendu, cette suite $\{\Psi_{0n}(\mathfrak{Z})\}$ peut se réduire à un ensemble fini, ce qui se produit si borne $m_p = N < \infty$ (cas auquel on se limite).

S'il existe une infinité de zéros d'ordre N, on aura $\Theta_N(z) \equiv 1$. On est certain, en répétant un nombre fini de fois le raisonnement ci-dessus, d'aboutir à une certaine fonction holomorphe dans $T \cup \mathcal{T}_0$,

$$\Psi_{0N_1}(\mathfrak{Z}) = \Sigma b'_p P_1(\mu_p) M(\mu_p) e^{-\mathfrak{Z}\mu_p}, \qquad \text{avec} \quad N_1 \leq N,$$

où $P_1(z)$ est un certain polynome pouvant se réduire au polynome $P(z)$. Si l'ensemble $\{\mu'_p\}$ est fini ou vide, alors $M(z)$ se réduit à un polynome ou à la constante 1, et puisque $P_1(z)M(z)$ est encore un polynome la fonction $\Phi_0(\mathfrak{Z})$ définie par la série $\sum_{p \geq p_0} b'_p e^{-\mathfrak{Z}\mu_p}$ est régulière au point $\mathfrak{Z} = 0$. Alors $\Phi_0(\mathfrak{Z}) = \varphi_0(s)$ qui n'est autre que $\varphi(s)$, à un polynome de Dirichlet près, est régulière au point $s = \beta$ ainsi que $\varphi(s)$. La contradiction, dans ce cas, établit le théorème.

Soit, maintenant, le cas général où $\{\mu'_p\}$ est une suite infinie. J'utilise un mode de raisonnement dû, dans son principe, à H. Bohr [13] et généralisé par V. Bernstein [14].

On peut choisir une suite réelle positive strictement croissante vers l'infini, $\{\lambda_p\}$, ayant les propriétés suivantes :

(a) $\{\lambda_p\} \cap \{\mu_p\} = 0$;

(b) posant $\mu_p = \lambda_p + \varepsilon_p$, la série $\varepsilon(\mathfrak{Z}) = \Sigma \varepsilon_p e^{-\mathfrak{Z}\mu_p}$ admet $x^{\varepsilon}_{\lambda} = -\infty$.

---

[13] *Einige Bemerkungen über das Konvergenz Problem Dirichletschen Reihen* (*Rend. Circ. Mat.*, t. 37, 1913).

[14] *Leçons sur les progrès récents* ..., chap. II.

Posant $P_1(\mu_p)M(\mu_p) = P_1(\lambda_p)M(\lambda_p) + \eta_p$, (b) entraine, comme on le constate facilement, que la série $B(\mathfrak{Z}) = \Sigma b'_p \eta_p e^{-\mathfrak{Z}\mu_p}$ admet $x_c^u = -\infty$. Le choix d'une telle suite est évidemment possible et d'une infinité de manières.

Posons

$$\Phi^*(\mathfrak{Z}) = \Sigma b'_p P_1(\lambda_p) M(\lambda_p) e^{-\mathfrak{Z}\lambda_p},$$
$$\Phi_*(\mathfrak{Z}) = \Sigma b'_p P_1(\lambda_p) M(\lambda_p) e^{-\mathfrak{Z}\mu_p},$$
$$\mathcal{E}(\mathfrak{Z}) = \Phi_*(\mathfrak{Z}) - \Phi^*(\mathfrak{Z}).$$

Les séries sont convergentes dans le demi-plan $\mathcal{R}\mathfrak{Z} > \sigma_c^v - \mathcal{R}\beta = x_c^\Psi$; les fonctions $\Phi^*(\mathfrak{Z})$, $\Phi_*(\mathfrak{Z})$ sont holomorphes dans le demi-plan $\mathcal{R}\mathfrak{Z} > x_{\mathcal{H}}^\Phi = 0$. Il est facile d'établir que la fonction $\mathcal{E}(\mathfrak{Z})$ est entière; en effet, soit $\mathfrak{Z}$ tel que $\mathcal{R}\mathfrak{Z} > x_c^{\Phi^*} = x_c^{\Phi_*}$; on a évidemment,

$$x_A^{\Phi^*} = x_c^{\Phi^*} = x_c^{\Phi_*} = x_A^{\Phi_*}.$$

Il est légitime d'écrire :

$$\Phi_*(\mathfrak{Z}) - \Phi^*(\mathfrak{Z}) = \Sigma b'_p P_1(\lambda_p) M(\lambda_p)(e^{-\mathfrak{Z}\mu_p} - e^{-\mathfrak{Z}\lambda_p}).$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit fixe; il existe un entier $P_1 = P_1(\varepsilon)$ tel que

$$\sum_{p \geq p_1} |b'_p P_1(\lambda_p) M(\lambda_p)(e^{-\mathfrak{Z}\mu_p} - e^{-\mathfrak{Z}\lambda_p})| < \frac{e^{|\mathfrak{Z}|\varepsilon}}{\varepsilon} \sum_{p \geq p_1} |b'_p P_1(\lambda_p) M(\lambda_p) \varepsilon_p| e^{-x\lambda_p}.$$

Or, la série $\mathcal{E}^*(\mathfrak{Z}) = \Sigma b'_p P_1(\lambda_p) M(\lambda_p) \varepsilon_p e^{-\mathfrak{Z}\lambda_p}$ est convergente en tout point du plan à distance finie puisque, compte tenu de (b), on a

$$x_A^{\mathcal{E}^*} = \lim \frac{L|b'_p P_1(\lambda_p) M(\lambda_p) \varepsilon_p|}{\lambda_p} = -\infty$$

(la suite $\{\lambda_p\}$ est mesurable et de même densité D que $\{\mu_p\}$).

La fonction $\mathcal{E}(\mathfrak{Z})$ est donc entière.

Ainsi

$$\Psi_{0N_1}(\mathfrak{Z}) = \Sigma b'_p P_1(\mu_p) M(\mu_p) e^{-\mathfrak{Z}\mu_p} = \Phi_*(\mathfrak{Z}) + B(\mathfrak{Z}) = \Phi^*(\mathfrak{Z}) + B(\mathfrak{Z}) + \mathcal{E}(\mathfrak{Z}),$$

et par conséquent les singularités à distance finie par rapport à un demi-plan quelconque $\mathcal{R}\mathfrak{Z} > x_1$, $x_1 < x_{\mathcal{H}}^{\Psi_{0N_1}}$, de $\Psi_{0N_1}(\mathfrak{Z})$ ont même répartition que les singularités à distance finie de $\Phi^*(\mathfrak{Z})$ par rapport à ce même demi-plan. En effet :

Il est évident que $x_{\mathcal{H}}^{\Psi_{0N_1}} = 0$ puisque $\Phi_0(\mathfrak{Z})$ possède des points singuliers semi-isolés sur l'axe $x_{\mathcal{H}}^{\Phi_0} = 0$ qui sont aussi points singuliers semi-isolés pour $\Psi_{0N_1}(\mathfrak{Z})$ holomorphe dans $\mathcal{R}\mathfrak{Z} = x > 0$. On a $x_{\mathcal{H}}^{\Psi^*} = 0$ (15).

(15) Ce résultat s'établit très simplement en comparant $\Phi(\mathfrak{Z})$ et la fonction $A(\mathfrak{Z})$ définie par $\Sigma b'_p e^{-\mathfrak{Z}\lambda_p}$; on montre, comme pour $\mathcal{E}(z)$, que la fonction $\Phi(\mathfrak{Z}) - A(\mathfrak{Z})$ est entière. Il suffit ensuite de tenir compte de l'existence de points singuliers semi-isolés sur l'axe d'holomorphie de $\Phi(\mathfrak{Z})$ et de la nature de la suite des coefficients de $\Phi^*(\mathfrak{Z})$.

Soit x_1 tel que $-\infty < x_1 < 0$. Dans le plan de la variable $\mathfrak{Z}$, les ensembles singuliers $S^{x_1}_{\Psi_{0N_1}}$ et $S^{x_1}_{\Phi^*}$ ne se réduisent pas à l'axe $x = x_1$. L'ensemble $\{\mu_p\} \cup \{\lambda_p\}$ peut être ordonné en une suite strictement croissante, $\{\lambda^*_n\}$. La fonction $\mathcal{E}(\mathfrak{Z})$ admet alors, dans le demi-plan $\mathcal{R}\mathfrak{Z} > x^{\Phi^*}_A = x^{\Psi_0}_A$, la représentation $\sum_1^\infty b^*_n e^{-\mathfrak{Z}\lambda^*_n}$ où la suite $\{b^*_n\}$ est définie de la manière suivante : fixons n, s'il existe p_0 tel que $\lambda^*_n = \lambda_{p_0}$, alors

$$b^*_n = -b'_{p_0} P_1(\lambda_{p_0}) M(\lambda_{p_0}),$$

sinon il existe p_1 tel que $\lambda^*_n = \mu_{p_1}$ et alors

$$b^*_n = b'_{p_1} P_1(\lambda_{p_1}) M(\lambda_{p_1}).$$

On a, évidemment, $x^{\mathcal{E}}_A = x^{\Phi^*}_A = x^{\Psi_0}_A$. On peut donc définir pour la fonction $B(\mathfrak{Z}) + \mathcal{E}(\mathfrak{Z})$ son ensemble singulier par rapport au demi-plan $x > x_1$. Cet ensemble se réduit à l'axe $x = x_1$ quel que soit x_1 réel fini.

Soit $\mathfrak{Z}_0 \in \bigcap_{\bar{P}} S^{x_1}_{\Psi_{0N_1}}$, où P est le demi-plan $x \geq x_1$. Écrire cette relation d'appartenance, c'est affirmer qu'il existe un domaine Δ tel que

$$\Delta \subset \bigcap_{\bar{P}} S^{x_1}_{\Psi_{0N_1}}, \qquad \mathfrak{Z}_0 \in \Delta, \qquad \Delta \cap P^{\Psi_{0N_1}}_{\mathcal{C}} \neq \emptyset,$$

où $P^{\Psi_{0N_1}}_{\mathcal{C}}$ est le demi-plan $x > x^{\Psi_{0N_1}}_{\mathcal{C}}$, et que la fonction $\Psi_{0N_1}(\mathfrak{Z})$ est holomorphe dans $\Delta \cup P^{\Psi_{0N_1}}_{\mathcal{C}}$ et est égale à la somme de la série $\Sigma b'_p P_1(\mu_p) M(\mu_p) e^{-\mathfrak{Z}\mu_p}$ pour $\mathfrak{Z} \in (\Delta \cap P^{\Psi_{0N_1}}_{\mathcal{C}})$. Il existera donc alors un domaine Δ' tel que

$$\Delta \subset \Delta', \qquad \Delta' \subset \bigcap_{\bar{P}} S^{x_1}_{\Psi_{0N_1}}, \qquad \Delta' \cap P^{\Phi}_{\mathcal{C}} \neq \emptyset.$$

Puisque $S^{x_1}_{B+\mathcal{E}}$ se réduit à l'axe $x = x_1$, le domaine Δ' est tel que

$$\Delta' \subset \bigcap_{\bar{P}} S^{x_1}_{\Phi^*}, \qquad \Delta' \cap P^{\Phi^*}_{\mathcal{C}} \neq \emptyset, \qquad \text{avec } x^{\Phi^*}_{\mathcal{C}} = x^{\Phi}_{\mathcal{C}}.$$

Par conséquent $S^{x_1}_{\Psi_{0N_1}} \supset S^{x_1}_{\Phi^*}$. On montrerait de la même façon que $S^{x_1}_{\Psi_{0N_1}} \subset S^{x_1}_{\Phi^*}$; d'où résulte $S^{x_1}_{\Psi_{0N_1}} = S^{x_1}_{\Phi^*}$.

Les fonctions $\Psi_{0N_1}(\mathfrak{Z})$ et $\Phi^*(\mathfrak{Z})$ ont par rapport à tout demi-plan $x > x_1$, avec $-\infty < x_1 < 0$, les mêmes points singuliers.

La fonction $\Phi^*(\mathfrak{Z})$ est donc régulière à l'origine puisque $\Psi_{0N_1}(\mathfrak{Z})$ l'est. Or, la suite $\{\lambda_p\}$ étant mesurable et de densité $D > 0$, la fonction $M(\mathfrak{Z})$ étant telle que $\{\mu'_p\} \cap \{\lambda_p\} = \emptyset$, nous sommes ramenés au cas résolu ci-dessus.

Il en résulte, en itérant si besoin est, le cas de l'existence d'une infinité de

zéros multiples pour $M(z)$] la méthode utilisée, qu'on aboutit à une série de la forme

$$\sum_{p\geq p_0} b'_p P_2(\lambda_p)\, e^{-\mathfrak{Z}\lambda_p} = \sum_r \delta_r \Lambda_0^{(r)}(\mathfrak{Z}),$$

où le polynome $P_2(z) = \Sigma(-1)^r \delta_r z^r$, et où la fonction $\Lambda_0(\mathfrak{Z}) = \sum_{p\geq p_0} b'_p e^{-\mathfrak{Z}\lambda_p}$ est régulière à l'origine.

(b) entraîne que la fonction

$$\varepsilon_1(\mathfrak{Z}) = \sum_r \delta_r \Lambda_0^{(r)}(\mathfrak{Z}) - \sum \delta_r \Phi_0^{(r)}(\mathfrak{Z})$$

est entière. Donc,

$$\Phi_0(\mathfrak{Z}) = \Phi_0(s-\beta) = \varphi_0(s) = \sum_{p\geq p_0} b_p e^{-s\mu_p}$$

est régulière au point $\mathfrak{Z} = 0$, ou $s = \beta$, et $\varphi(s)$ est régulière au point β.

La contradiction, dans ce cas général, achève d'établir le théorème.

THÉORÈME II. — *Dans les hypothèses :*

(1) *la suite des exposants* $\{\mu_p\}$ *de la fonction* $\varphi(s) = \Sigma b_p e^{-s\mu_p}$, $\sigma_c^z < \infty$, *est «presque régulière», mesurable à densité finie* $D > 0$; $\varphi(s)$ *n'admet pas son axe d'holomorphie pour frontière naturelle* $(\sigma_{\mathfrak{X}}^{\varphi} > -\infty)$;

(2) $\theta(z)$ *est une fonction entière du genre zéro dont les zéros sont réels positifs (sauf un nombre fini au plus) et à ordre de multiplicité uniformément borné (on se limitera au cas où la suite des zéros réels distincts est « presque régulière »)* [16].

Alors si $\beta \in S_{\varphi}^{\sigma_1}$ *est « semi-isolé sur l'axe d'holomorphie » de* $\varphi(s)$, *ce point est aussi singulier pour* $\psi(s) = \Sigma b_p \theta(\mu_p) e^{-s\mu_p}$.

Soit $\{\rho_p\}$ la suite strictement croissante des zéros positifs distincts, soit m_p l'ordre de multiplicité de ρ_p. On a $\overline{\text{borne}}\, m_p = M < \infty$.

La fonction $\theta(z)$ admet la représentation

$$\theta(z) = P(z) \prod_p \left(1 - \frac{z}{\rho_p}\right)^{m_p},$$

où le polynome $P(z)$ est à zéros non positifs.

Comme au théorème I, on peut supposer que $\theta(z)$ est du type minimum de l'ordre 1 puisqu'on sait qu'alors, dans l'hypothèse où ses zéros sont tous du même signe (à un nombre fini près), cette fonction est nécessairement du genre zéro. On sait que $\sum \frac{1}{\rho_p} < \infty$ et que $\lim \frac{p}{\rho_p} = 0$.

---

[16] Il est évident que les trois conditions de « presque régularité » se réduisent à la condition (2).

Plus généralement, si la fonction $\theta(z)$ est du genre zéro à zéros tous réels (sauf un nombre fini au plus), elle est encore du type exponentiel minimum. Cette dernière remarque sera utilisée ultérieurement quand on combinera les résultats des théorèmes I et II.

Supposons que $\{\rho_p\}\cap\{\mu_p\}=\emptyset$ (l'intersection de ces deux suites est vide). Posons

$$\Theta(z)=\Pi\left(1-\frac{z}{\rho_p}\right)^{m_p},\qquad \Theta_1(z)=\Pi\left(1-\frac{z}{\rho_p}\right)^{m_p-1},\qquad \theta_1(z)=\Pi\left(1-\frac{z}{\rho_p}\right);$$

on a

$$\theta(z)=P(z)\,\Theta(z)=P(z)\,\Theta_1(z)\,\theta_1(z).$$

Il est évident que les zéros de la fonction $\Theta_1(z)$ sont ceux de $\Theta(z)$ dont l'ordre de multiplicité est au moins égal à 2. La fonction $\Theta_1(z)$ peut se réduire à un polynome ou à la constante 1.

Supposons fausse l'assertion du théorème; soit donc β régulier [17] pour $\psi(s)$.

Premier cas : $\sigma^{\psi}_{\mathcal{K}}=\sigma^{\varphi}_{\mathcal{K}}$. — Posons $s=\mathfrak{Z}+\beta$. On a

$$\psi(s)=\Psi(\mathfrak{Z})=\Sigma b'_p\theta(\mu_p)\,e^{-\mathfrak{Z}\mu_p},\qquad b'_p=b_p\,e^{-\beta\mu_p},$$

$\mathfrak{Z}=0$ est point régulier pour $\Psi(\mathfrak{Z})$ qui admet $x^{\Psi}_{\mathcal{K}}=0$, $\mathcal{R}\mathfrak{Z}=x$. L'origine dans le plan de la variable $\mathfrak{Z}$ est centre d'un intervalle (ouvert) de longueur $2l$, $l>0$, situé sur l'axe d'holomorphie $\mathcal{R}\mathfrak{Z}=x^{\Psi}_{\mathcal{K}}=0$, dont tous les points sont réguliers pour $\Psi(\mathfrak{Z})$. On sait, en vertu d'une propriété classique, que $l\leq\pi D$. Comme au théorème I, convenons de représenter par $2l$, $l>0$, la longueur d'un intervalle de centre $\mathfrak{Z}=0$, situé sur l'axe $\mathcal{R}\mathfrak{Z}=0$, dont tous les points de la fermeture sont réguliers pour la fonction $\Psi(\mathfrak{Z})$. Cette fermeture est donc à distance positive de l'ensemble des points singuliers de $\Psi(\mathfrak{Z})$. Il est évident que, maintenant avec cette convention, l'inégalité stricte, $l<\pi D$, est seule valide.

En vertu de la condition nécessaire du théorème de V. Bernstein, il existe, dans le plan de la variable z, un secteur $S\left(|\arg z|\leq\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, d'ouverture $2\alpha>0$, et une fonction $\Omega(z)$ holomorphe dans S et satisfaisant aux conditions

$$(a)\qquad |\Omega(z)|<e^{[(\pi D-l)|\sin\omega|+\varepsilon]|z|},\qquad z\in S,$$

$\varepsilon>0$ arbitraire, $z=|z|e^{i\omega}$, $|z|$ suffisamment grand;

---

[17] Rappelons que : dire que β est régulier pour $\psi(s)$ c'est affirmer l'existence d'un domaine Δ tel que

$$\beta\in\Delta,\qquad \Delta\cap P^{\psi}_{c}\neq\emptyset,\qquad \Delta\subset\bigcap_{\bar{P}}S^{\sigma_1}_{\psi},$$

où $\bar{P}$ est le demi-plan $\sigma\geq\sigma_1$ et où P^{ψ}_{c} est le demi-plan $\sigma>\sigma^{\psi}_{c}$, σ_1 suffisamment petit algébriquement.

$$(b) \qquad \Omega(\mu_p) = b'_p \mathrm{P}(\mu_p)\,\Theta_1(\mu_p)\,\theta_1(\mu_p)\,\mathrm{C}'(\mu_p) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots),$$

où $\mathrm{C}'(z)$ est la dérivée de $\mathrm{C}(z) = \Pi\left(1 - \frac{z^2}{\mu_p^2}\right)$.

Posons $\Omega_1(z) = \Omega(z)\,\theta_1(-z)$. La fonction $\theta_1(-z) = \Pi\left(1 + \frac{z}{\rho_p}\right)$ est de genre zéro et donc de type exponentiel minimum.

On a

$$\Omega_1(\mu_p) = b'_p \mathrm{P}(\mu_p)\,\Theta_1(\mu_p)\,\mathcal{C}'(\mu_p) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots),$$

en posant

$$\mathcal{C}(z) = \theta_1(z)\,\theta_1(-z)\,\mathrm{C}(z).$$

Remarquons que $\mathcal{C}(z)$ n'est autre que $\Pi\left(1 - \frac{z^2}{\mu_p^{*2}}\right)$, où $\{\mu_p^*\}$ est l'ensemble $\{\rho_p\} \cup \{\mu_p\}$ ordonné en une suite strictement croissante. La suite $\{\mu_p^*\}$ est d'ailleurs mesurable et de même densité D que la suite $\{\mu_p\}$. Supposons son indice de condensation Δ fini.

La fonction $\Omega_1(z)$ satisfait ainsi aux propriétés

$$(a') \qquad |\Omega_1(z)| < e^{[(\pi \mathrm{D} - l)|\sin\omega| + \varepsilon]|z|}, \qquad z \in \mathrm{S},$$

$\varepsilon > 0$ arbitraire, $|z|$ suffisamment grand;

$$(b') \qquad \Omega_1(\mu_p) = b'_p \mathrm{P}(\mu_p)\,\Theta_1(\mu_p)\,\mathcal{C}'(\mu_p) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Posons

$$\Phi(\mathfrak{Z}) = \sum \frac{\Omega_1(\mu_p)}{\mathcal{C}'(\mu_p)} e^{-\mathfrak{Z}\mu_p} = \sum b'_p \mathrm{P}(\mu_p)\,\Theta_1(\mu_p)\,e^{-\mathfrak{Z}\mu_p},$$

$$\Phi^*(\mathfrak{Z}) = \sum \frac{\Omega_1(\mu_p^*)}{\mathcal{C}'(\mu_p^*)} e^{-\mathfrak{Z}\mu_p^*}, \qquad \mathcal{L}(\mathfrak{Z}) = \sum \frac{\Omega_1(\rho_p)}{\mathcal{C}'(\rho_p)} e^{-\mathfrak{Z}\rho_p}.$$

On sait que $\mathcal{C}'(\mu_p^*) \neq 0$.

On a

$$x_{\mathcal{C}}^{\Phi} \leq x_{\mathcal{C}}^{\Phi^*} = \overline{\lim}\,\frac{1}{\mu_p^*}\,\mathrm{L}\left|\frac{\Omega_1(\mu_p^*)}{\mathcal{C}'(\mu_p^*)}\right| \leq \overline{\lim}\,\frac{1}{\mu_p^*}\,\mathrm{L}\,\frac{1}{|\mathcal{C}'(\mu_p^*)|} = \Delta.$$

Pour $\mathcal{R}\mathfrak{Z} > x_{\mathcal{C}}^{\Phi^*}$, on peut écrire

$$\Phi^*(\mathfrak{Z}) = \Phi(\mathfrak{Z}) + \mathcal{L}(\mathfrak{Z}),$$

puisque, eu égard à des résultats classiques, on a

$$x_{\mathrm{A}}^{\Phi^*} = x_{\mathcal{C}}^{\Phi^*}, \qquad x_{\mathrm{A}}^{\Phi} = x_{\mathcal{C}}^{\Phi}, \qquad x_{\mathrm{A}}^{\mathcal{L}} = x_{\mathcal{C}}^{\mathcal{L}}; \qquad x_{\mathrm{A}}^{\Phi} \leq x_{\mathrm{A}}^{\Phi^*}, \qquad x_{\mathrm{A}}^{\mathcal{L}} \leq x_{\mathrm{A}}^{\Phi^*}.$$

Je dis que $x_{\mathcal{H}}^{\Phi} = x_{\mathcal{H}}^{\Psi}$. En effet, posant

$$b''_p = b'_p \mathrm{P}(\mu_p)\,\Theta_1(\mu_p) \quad (p = 1, 2, 3, \ldots) \qquad \text{et} \qquad \theta_1(z) = \Sigma(-1)^r \delta_r z^r,$$

la série définissant $\Psi(\mathfrak{Z})$, pour $\mathfrak{Z}$ avec $\mathcal{R}\mathfrak{Z} > x_{\mathcal{C}}^{\Phi}$, s'écrit

$$\Sigma b''_p \theta_1(\mu_p)\,e^{-\mathfrak{Z}\mu_p} = \Sigma \delta_r \Phi^{(r)}(\mathfrak{Z});$$

cette dernière série converge en chaque point régulier pour $\Phi(\mathfrak{Z})$, puisque $\theta_1(z)$ est de type exponentiel minimum. On constate que $x^{\Psi}_{\mathfrak{zc}} \leq x^{\Phi}_{\mathfrak{zc}}$. Or, posant

$$P(z)\,\theta_1(z) = \Sigma(-1)^r \gamma_r z^r,$$

on aurait

$$\Phi(\mathfrak{Z}) = \Sigma \gamma_r \varphi^{(r)}(\mathfrak{Z}+\beta);$$

d'où l'on conclut pour la même raison

$$x^{\Phi}_{\mathfrak{zc}} \leq \sigma^{\varphi}_{\mathfrak{zc}} - \mathcal{R}\beta = \sigma^{\psi}_{\mathfrak{zc}} - \mathcal{R}\beta = x^{\Psi}_{\mathfrak{zc}}.$$

Des deux inégalités résulte donc $x^{\Phi}_{\mathfrak{zc}} = x^{\Psi}_{\mathfrak{zc}} = 0$. On ne peut avoir $x^{\mathcal{E}}_{\mathfrak{zc}} > x^{\Phi}_{\mathfrak{zc}}$ sinon le point $\mathfrak{Z} = 0$ serait singulier pour $\Phi^*(\mathfrak{Z})$ puisque l'axe $\mathcal{R}\mathfrak{Z} = x^{\mathcal{E}}_{\mathfrak{zc}} = x^{\Phi^*}_{\mathfrak{zc}}$ serait frontière naturelle pour cette fonction ([18]). Deux cas restent possibles ([19]) :

A. $x^{\mathcal{E}}_{\mathfrak{zc}} < x^{\Phi}_{\mathfrak{zc}}$; alors, puisque l'axe $\mathcal{R}\mathfrak{Z} = x^{\Psi}_{\mathfrak{zc}}$ n'est pas frontière naturelle pour $\Phi(\mathfrak{Z})$ [en effet, il existe sur $\sigma = \sigma^{\varphi}_{\mathfrak{zc}}$ des points qui sont réguliers pour $\varphi(s)$; il existe dans le plan de la variable $\mathfrak{Z}$, sur l'axe $\mathcal{R}\mathfrak{Z} = 0$, des points réguliers pour la fonction de $\mathfrak{Z}$, $\varphi(\mathfrak{Z}+\beta)$; ces points sont aussi réguliers pour $\Phi(\mathfrak{Z}) = \Sigma \gamma_r \varphi^{(r)}(\mathfrak{Z}+\beta)$; la série converge en chaque point $\mathfrak{Z}$ régulier pour $\varphi(\mathfrak{Z}+\beta)$], la fonction $\Phi^*(\mathfrak{Z})$ admet, par rapport au demi-plan $\mathcal{R}\mathfrak{Z} > x^{\mathcal{E}}_{\mathfrak{zc}}$, les mêmes points singuliers (même distribution) que la fonction $\Phi(\mathfrak{Z})$. On a, nécessairement, $x^{\Phi^*}_{\mathfrak{zc}} = x^{\Phi}_{\mathfrak{zc}} = 0$. Alors en vertu de la condition suffisante du théorème de V. Bernstein [eu égard aux propriétés (a') et (b')], la fonction $\Phi^*(\mathfrak{Z})$ admet le point $\mathfrak{Z} = 0$ pour point régulier; ce point est aussi régulier pour $\Phi(\mathfrak{Z})$.

B. $x^{\mathcal{E}}_{\mathfrak{zc}} = x^{\Phi}_{\mathfrak{zc}}$; alors puisque l'axe $\mathcal{R}\mathfrak{Z} = x^{\Phi}_{\mathfrak{zc}}$ n'est pas frontière naturelle pour $\Phi(\mathfrak{Z})$, on a nécessairement

$$x^{\Phi^*}_{\mathfrak{zc}} = x^{\Phi}_{\mathfrak{zc}} = x^{\mathcal{E}}_{\mathfrak{zc}}.$$

Puisque la fonction $\Phi^*(\mathfrak{Z})$ admet $\mathfrak{Z} = 0$ pour point régulier, ce point est donc singulier du type « coupure » pour $\Phi(\mathfrak{Z})$. Ce cas est à rejeter car $\mathfrak{Z} = 0$ ne serait pas « semi-isolé . . . » pour $\varphi(\mathfrak{Z}+\beta)$, c'est-à-dire que β ne serait pas « semi-isolé . . . » pour $\varphi(s)$.

En résumé, dans le cas $\sigma^{\psi}_{\mathfrak{zc}} = \sigma^{\varphi}_{\mathfrak{zc}}$, si le point β « semi-isolé sur l'axe d'holo-

---

([18]) *Leçons sur les progrès récents* . . ., chap. V, théorèmes III et IV. Pour montrer l'impossibilité de $x^{\mathcal{E}}_{\mathfrak{zc}} > x^{\Phi}_{\mathfrak{zc}}$, le théorème IV suffit; la régularité du point $\mathfrak{Z} = 0$ pour la fonction $\Phi^*(\mathfrak{Z})$ résulte de l'application de la condition suffisante rappelée.

([19]) Dans l'étude des cas (A) et (B), les remarques élémentaires qui conduisent à l'égalité $x^{\Phi^*}_{\mathfrak{zc}} = 0$ permettent d'éviter l'usage du théorème IV. Remarquons d'ailleurs qu'il n'est pas nécessaire de prouver cette égalité pour appliquer la condition suffisante qui entraîne la régularité du point $\mathfrak{Z} = 0$ pour $\Phi^*(\mathfrak{Z})$. Les raisonnements ci-dessus ont pour objet de mettre en relief le caractère élémentaire de ce point de la démonstration.

morphie » de $\varphi(s)$ est régulier pour $\psi(s)$, ce point est nécessairement régulier pour

$$\psi_1(s) = \Sigma b_p P(\mu_p)\,\Theta_1(\mu_p)\,e^{-s\mu_p},$$

ou les zéros de $\Theta_1(z)$ sont d'un ordre de multiplicité inférieur d'une unité aux mêmes zéros de $\Theta(z)$ [évidemment, dans $\Theta_1(z)$ ne figurent plus les zéros d'ordre 1 de $\Theta(z)$]. Le problème est donc ramené à un problème analogue avec la fonction $\Theta_1(z)$ au lieu de $\Theta(z)$.

Deuxième cas : $\sigma_{\mathfrak{Ac}}^{\psi} < \sigma_{\mathfrak{Ac}}^{\varphi}$ [20]. — Soit encore le point singulier β, « semi-isolé sur l'axe d'holomorphie », de $\varphi(s)$; il est régulier pour $\psi(s)$. La fonction $\Psi(\mathfrak{Z})$ étant holomorphe dans $\mathcal{R}\mathfrak{Z} > \sigma_{\mathfrak{Ac}}^{\psi} - \sigma_{\mathfrak{Ac}}^{\varphi}$ (et donc dans $\mathcal{R}\mathfrak{Z} > 0$) et par conséquent régulière au point $\mathfrak{Z} = 0$, il existe un nombre $l\,(0 < l)$, un secteur

$$S\left(|\arg z| \leq \alpha < \frac{\pi}{2},\ \alpha > 0\right)$$

dans le plan de la variable z, une fonction $\Omega(z)$ holomorphe dans S, tels que

$$(a) \qquad |\Omega(z)| < e^{(\pi D - l)|\sin\omega| + \varepsilon|z|}, \qquad z \in S,$$

$\varepsilon > 0$ arbitraire petit, $|z|$ suffisamment grand;

$$\Omega(\mu_p) = b'_p \theta(\mu_p) C(\mu_p), \qquad b'_p = b_p e^{-3\mu_p} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Comme au premier cas, on constate que la fonction $\Omega_1(z) = \Omega(z)\theta_1(-z)$ possède les propriétés de types (a') et (b'), et l'on introduit, avec les mêmes remarques et la même écriture, les fonctions $\Phi^*(\mathfrak{Z})$, $\Phi(\mathfrak{Z})$, $\mathcal{L}(\mathfrak{Z})$; il est légitime d'écrire $\Phi^*(\mathfrak{Z}) = \Phi(\mathfrak{Z}) + \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$. Il est évident qu'on ne peut pas avoir $x_{\mathfrak{Ac}}^{\Phi} > 0$ (car l'inégalité stricte $\sigma_{\mathfrak{Ac}}^{\psi_1} > \sigma_{\mathfrak{Ac}}^{\varphi}$ est manifestement impossible).

Supposons $\sigma_{\mathfrak{Ac}}^{\psi_1} = \sigma_{\mathfrak{Ac}}^{\varphi}$, c'est-à-dire

$$(b) \qquad x_{\mathfrak{Ac}}^{\Phi} = \sigma_{\mathfrak{Ac}}^{\varphi} - \mathcal{R}\beta = 0.$$

(1) S'il était possible que $x_{\mathfrak{Ac}}^{\mathcal{L}} > x_{\mathfrak{Ac}}^{\Phi}$, alors, puisque $\Phi^*(\mathfrak{Z}) = \Phi(\mathfrak{Z}) + \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, l'axe $\mathcal{R}\mathfrak{Z} = x_{\mathfrak{Ac}}^{\mathcal{L}}$ serait frontière naturelle pour la fonction $\Phi^*(\mathfrak{Z})$ holomorphe dans $\mathcal{R}(\mathfrak{Z}) > x_{\mathfrak{Ac}}^{\Phi^*} = x_{\mathfrak{Ac}}^{\mathcal{L}}$; $\mathfrak{Z} = 0$ ne pourrait être point régulier pour $\Phi^*(\mathfrak{Z})$. Or, eu égard à la condition suffisante du théorème de V. Bernstein, la fonction $\Phi^*(\mathfrak{Z})$ est holomorphe dans $\mathcal{R}\mathfrak{Z} > 0$ et régulière au point $\mathfrak{Z} = 0$. La supposition $x_{\mathfrak{Ac}}^{\mathcal{L}} > x_{\mathfrak{Ac}}^{\Phi}$ est à rejeter.

(2) Est-il possible que $x_{\mathfrak{Ac}}^{\mathcal{L}} = x_{\mathfrak{Ac}}^{\Phi}$? Il existe sur l'axe $\sigma = \sigma_{\mathfrak{Ac}}^{\varphi}$ des points réguliers pour $\varphi(s)$. Ces points sont aussi réguliers pour $\psi_1(s)$. Donc l'axe $\mathcal{R}\mathfrak{Z} = 0$ n'est pas frontière naturelle pour $\Phi(\mathfrak{Z})$; par conséquent il existe sur cet axe

---

[20] S'il est possible que $\sigma_{\mathfrak{Ac}}^{\psi} < \sigma_{\mathfrak{Ac}}^{\varphi}$; l'impossibilité du cas $\sigma_{\mathfrak{Ac}}^{\psi} > \sigma_{\mathfrak{Ac}}^{\varphi}$ est évidente.

des points qui sont singuliers pour $\mathcal{L}(\mathfrak{Z})$ et réguliers pour $\Phi(\mathfrak{Z})$. Il en résulte $x_{\mathfrak{R}}^{\Phi^*} = 0$. Or $\mathfrak{Z} = 0$ est régulier pour $\Phi^*(\mathfrak{Z})$; il est donc singulier du type coupure pour $\Phi(\mathfrak{Z})$. Le point β serait, dans l'éventualité $x_{\mathfrak{R}}^{\varphi} = x_{\mathfrak{R}}^{\Phi}$, singulier du type coupure pour $\psi_1(s)$. Cette éventualité est à rejeter.

(3) La seule possibilité dans le cas $\sigma_{\mathfrak{R}}^{\psi_1} = \sigma_{\mathfrak{R}}^{\varphi}$ est donc $x_{\mathfrak{R}}^{\varphi} < x_{\mathfrak{R}}^{\Psi}$. Les fonctions $\Phi^*(\mathfrak{Z})$ et $\Phi(\mathfrak{Z})$ ont même ensemble singulier par rapport au demi-plan $\mathcal{R}\mathfrak{Z} > x_{\mathfrak{R}}^{\varphi}$. Le point $\mathfrak{Z} = 0$ est régulier pour $\Phi(\mathfrak{Z})$; le point β est régulier pour $\psi_1(s)$.

Supposons enfin $\sigma_{\mathfrak{R}}^{\psi_1} < \sigma_{\mathfrak{R}}^{\varphi}$. On a évidemment $\sigma_{\mathfrak{R}}^{\varphi} \leq \sigma_{\mathfrak{R}}^{\psi_1}$. Le point β est nécessairement régulier pour $\psi_1(s)$.

En résumé, dans les deux cas, si β, « semi-isolé » pour $\varphi(s)$ est régulier pour $\psi(s)$, il est nécessairement régulier pour $\psi_1(s)$. Le problème est donc ramené à un problème analogue avec la fonction $\Theta_1(z)$ au lieu de $\Theta(z)$.

En raisonnant sur $\psi_1(s) = \Sigma b_p \mathrm{P}(\mu_p)\Theta_1(\mu_p)\, e^{-s\mu_p}$ comme on a raisonné sur $\psi(s)$, on ramène le problème à un problème analogue pour

$$\psi_2(s) = \Sigma b_p \mathrm{P}(\mu_p)\Theta_2(\mu_p)\, e^{-s\mu_p},$$

avec la fonction de genre zéro,

$$\Theta_2(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{\rho_p}\right)^{m_p - 2}$$

[dont les zéros sont ceux de $\Theta(z)$ qui ont un ordre de multiplicité supérieur à 2]; et ainsi de proche en proche. En répétant j fois cette méthode, avec $j \leq \mathrm{M} - 1$, on est certain d'obtenir une fonction

$$\psi_j(s) = \Sigma b_p \mathrm{P}(\mu_p)\Theta_j(\mu_p)\, e^{-s\mu_p},$$

où $\Theta_j(z)$ est de genre zéro à zéros positifs simples sauf peut-être un nombre fini au plus.

Une dernière application de la méthode conduirait [avec quelques simplifications dues au fait que

$$\psi_{j+1}(s) = \Sigma b_p \mathrm{P}(\mu_p)\Theta_{j+1}(\mu_p)\, e^{-s\mu_p} = \Sigma \delta_r \varphi^{(r)}(s),$$

où $\mathrm{P}(z)\Theta_{j+1}(z) = \sum_r (-1)^r \delta_r z^r$ est un polynome], à la contradiction que β est régulier pour $\varphi(s)$.

Le théorème est établi dans le cas où :

(1) $\{\mu_p\} \cup \{\rho_p\} = \emptyset$,

(2) $\{\mu_p^*\} = \{\mu_p\} \cup \{\rho_p\}$ est à indice de condensation fini.

Si les deux conditions ci-dessus [ou seulement l'une d'elles ([21])] ne sont pas satisfaites, on peut ramener la démonstration à la précédente. Cette assertion est triviale lorsque les deux suites $\{\varrho_p\}$ et $\{\mu_p\}$ n'ont en commun qu'un nombre fini de termes; la condition (2) étant supposée satisfaite au sens de la remarque adjointe au renvoi ([21]). Il existe, en effet, un entier P_0 tel que $\theta(\mu_p) \not\equiv 0$, pour $p \geqq p_0$; on a

$$\psi(s) = \sum_{p \geqq p_0} b_p \theta(\mu_p)\, e^{-s\mu_p} + \mathcal{P}(s),$$

où $\mathcal{P}(s)$ est un polynome de Dirichlet pouvant être identiquement nul. Le raisonnement ci-dessus est applicable mot pour mot à la fonction

$$\psi_0(s) = \sum_{p \geqq p_0} b_p \theta(\mu_p)\, e^{-s\mu_p}$$

ne différant de $\psi(s)$ que par la fonction entière $\mathcal{P}(s)$ qui peut se réduire à la constante zéro.

Lorsque les suites $\{\mu_p\}$ et $\{\varrho_p\}$ ont en commun une infinité de termes, le problème est plus délicat. On peut le constater à l'aide de la remarque suivante :

Soit $\{\varrho'_p\}$ l'ensemble, ordonné selon une suite strictement croissante, commun à $\{\mu_p\}$ et $\{\varrho_p\}$. Soit $\{\mu'_p\}$ la suite, strictement croissante, complémentaire à la suite $\{\varrho'_p\}$ par rapport à la suite $\{\mu_p\}$. Notons b'_p le coefficient associé à l'exposant μ'_p dans la série $\varphi(s) = \Sigma b_p e^{-s\mu_p}$. La série $\sum_{p=1}^{\infty} b_p \theta(\mu_p) e^{-s\mu_p}$ définissant $\psi(s)$ se réduit, en fait, à la série $\sum_{p=1}^{\infty} b'_p \theta(\mu'_p) e^{-s\mu'_p}$, avec $\theta(\mu'_p) \not\equiv 0$ pour $p = 1, 2, 3, \ldots$.

On a, en réalité,

$$\psi(s) = \Sigma \gamma_r \varphi^{*(r)}(s),$$

où

$$\theta(z) = \Sigma (-1)^r \gamma_r z^r, \qquad \varphi^*(s) = \Sigma b'_p e^{-s\mu'_p}, \qquad \varphi^*(s) \not\equiv \varphi(s).$$

Le cas à élucider est donc celui où les deux suites $\{\mu_p\}$ et $\{\varrho_p\}$ ont en commun une suite infinie, et où les trois suites $\{\varrho_p\}$, $\{\mu_p\}$, $\{\mu_p\} \cup \{\varrho_p\}$ sont à indices de condensation quelconques.

Établissons quelques lemmes.

LEMME I. — *Une suite* $\{\mu_p\}$ « *presque régulière* » *est décomposable en une somme finie de suites partielles* « *régulières* ».

([21]) Il est évident que la condition (1) peut être satisfaite sans que (2) le soit; si (1) n'est pas satisfaite, la condition (2) est sans objet (malgré que si $\{\mu_p\}$ et $\{\varrho_p\}$ ont en commun une suite infinie, l'ensemble $\{\mu_p\} \cup \{\varrho_p\}$ peut cependant être ordonné en une suite strictement croissante qui peut être à indice fini).

L'assertion est évidente. En effet, d'après la propriété (2) de l'ensemble $E(q_0, \{\mu_p\})$ où l'on suppose q_0 fixé une fois pour toutes suffisamment petit, le nombre des μ_p intérieurs à un même segment de cet ensemble est uniformément borné. On suppose, bien entendu, la suite des segments constituant l'ensemble $E(q_0, \{\mu_p\})$ numérotée 1, 2, 3, ..., ν, ..., dans le sens de croissance des μ_p. La suite $\{\mu_p\}$ peut être notée de la manière suivante :

Considérons le $\nu^{\text{ième}}$ segment et notons μ_{p_ν} le plus petit des μ_p intérieurs à ce segment. Notons $\mu_{p_\nu+t}$, $1 \leq t \leq n_\nu$, les n_ν autres μ_p de sorte que

$$\mu_{p_\nu} < \mu_{p_\nu+1} \leq \mu_{p_\nu+2} < \ldots < \mu_{p_\nu+n_\nu};$$

μ_{p_ν} et $\mu_{p_\nu+n_\nu}$ étant respectivement le plus petit et le plus grand des μ_p du $\nu^{\text{ième}}$ segment. Pour achever de préciser la nouvelle notation de la suite $\{\mu_p\}$, on posera en outre

$$p_{\nu-1} + n_{\nu-1} + 1 = p_\nu, \quad p_\nu + n_\nu + 1 = p_{\nu+1}, \qquad p_1 = 1.$$

Désignons par $\{\mu_{p,0}\}$ la suite partielle

$$\{\mu_{p_\nu}\} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots; \ \mu_{1,0} < \mu_{2,0} < \ldots < \mu_{p,0} < \ldots).$$

Désignons aussi par $\{\mu_{p,1}\}$ la suite partielle $\{\mu_{p_\nu+1}\}$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ [il est évident que les segments de $E(q_0, \{\mu_p\})$ ne contenant qu'un seul point ne fournissent aucune contribution à la construction de la suite $\{\mu_{p_\nu+1}\}$]. Plus généralement, désignons par $\{\mu_{p,t}\}$ la suite partielle $\{\mu_{p_\nu+t}\}$ (avec la même remarque que ci-dessus). On se servira suivant le cas d'une des notations de préférence à l'autre. Il existe un entier $N_0 \geq 0$ fini tel que $N_0 = \overline{\text{borne}}\, n_\nu$. Il existe un nombre N, au plus égal à $N_0 + 1$, de telles suites infinies strictement croissantes $\{\mu_{p,t}\}$, $t = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. La suite $\{\mu_p\}$ est identique à $\bigcup_t \{\mu_{p,t}\}$, à un ensemble fini près de termes μ_p; ce que l'on notera

$$\{\mu_p\} \mathrel{\mathfrak{A}} \bigcup_t \{\mu_{p,t}\}.$$

Chaque suite $\{\mu_{p,t}\}$, $t = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ est régulière, puisque

$$\underline{\text{borne}}\,(\mu_{p+1,t} - \mu_{p,t}) \geq 2q_0.$$

Le lemme est établi (l'ensemble fini pouvant être adjoint à l'une ou à l'autre des suites $\{\mu_{p,t}\}$, ou réparti entre celles-ci; il ne jouera pratiquement aucun rôle dans les démonstrations. On le passera fréquemment sous silence). Notons $\{\mu_{p,tr}\}$ l'ensemble $\{\mu_{p,t}\} \cup \{\mu_{p,r}\}$, $0 \leq (t \neq r) \leq N-1$, ordonné en une suite infinie strictement croissante : $\mu_{1,tr} < \mu_{2,tr} < \ldots < \mu_{p,tr} < \mu_{p+1,tr} < \ldots$.

LEMME II. — *Si les* C_N^2 *suites* $\{\mu_{p,tr}\}$ *correspondant aux* C_N^2 *couples distincts* (22)

(22) Les deux couples (t, r) et (r, t) ne sont pas distincts.

de N *nombres pris deux à deux distincts,* $t \neq r$, *sont chacune à indice de condensation fini, alors la suite* $\{\mu_p\}$ *est à indice de condensation* Δ *fini (on suppose, bien entendu,* $N \geq 2$; *si* $N = 1$, *la suite* $\{\mu_p\}$ *est régulière et* $\Delta = 0$) (23).

En effet, on sait que, posant

$$\varepsilon_{\nu,r} = \frac{1}{\Gamma(n_\nu+1)} \prod_{\substack{t=0 \\ (t\neq r)}}^{t=n_\nu} (\mu_{p_\nu+t} - \mu_{p_\nu+r}) \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, n_\nu)$$

et

$$\eta_\nu = \overline{\text{borne}}\, \frac{1}{\mu_{p_\nu+r}} L \frac{1}{|\varepsilon_{\nu,r}|} \qquad (r = 0, 1, 2, n_\nu)$$

(si $n_\nu = 0$, on convient de poser $\eta_\nu = 0$), l'indice de condensation de $\{\mu_p\}$ est $\Delta = \overline{\lim}\, \eta_\nu$.

Désignant par $\Delta_{t,r}$ l'indice de condensation de la suite $\{\mu_{p,tr}\}$, on voit que

$$0 \leq \Delta_{t,r} = \overline{\lim}\, \eta_\nu^{tr},$$

où l'on pose (24)

$$\eta_\nu^{tr} = \frac{1}{\mu_{p_\nu}} L \frac{1}{|\mu_{p_\nu+t} - \mu_{p_\nu+r}|}.$$

En effet, puisque $\{\mu_{p,tr}\} \subset \{\mu_p\}$, avec $\{\mu_p\}$ mesurable à densité D, il existe une suite $\{\mu_p^*\}$ mesurable à densité D^* telle que $\{\mu_{p,tr}\} \subset \{\mu_p^*\}$ et qu'on ne puisse pas trouver une suite $\{\mu_p^{**}\} \supset \{\mu_{p,tr}\}$, $\{\mu_p^{**}\}$ étant mesurable à densité $D^{**} < D^*$ (25). La densité D^* est la densité maximum de la suite $\{\mu_{p,tr}\}$.

Il est évident que $D^* \leq D$. Par conséquent, comme ensemble de voisinage de $\{\mu_{p,tr}\}$, on peut toujours choisir $E(q_0, \{\mu_{p,tr}\})$, avec $q_0 \leq \frac{1}{10D}$, puisque $D \geq D^*$ et que $D > 0$. Mais alors on peut choisir q_1 suffisamment petit, avec $q_1 \leq q_0$, de sorte que

$$E(q_1, \{\mu_{p,tr}\}) \subset E(q_0, \{\mu_p\}),$$

quel que soit le couple considéré $0 \leq (t \neq r) \leq N - 1$ puisque chaque segment de l'ensemble $E(q_0, \{\mu_p\})$ est au moins de longueur $2q_0$.

L'assertion est maintenant évidente si l'on tient compte que les segments

---

(23) Il est évident que dans les lemmes I, II, III et IV, le cas envisagé est celui où la suite $\{\mu_p\}$ ne se réduit pas à une suite « régulière ».

(24) Il est évident que η_ν^{tr} et $\overline{\lim}\, \eta_\nu^{tr}$, ne sont définies que pour la suite des indices des segments contenant à la fois un point de $\{\mu_{p,t}\}$ et un point de $\{\mu_{p,r}\}$. Si $t > r$ et si pour l'indice ν le terme $\mu_{p_\nu+t}$ existe, le terme $\mu_{p_\nu+r}$ existe aussi ; $\mu_{p_\nu+r}$ peut exister sans que $\mu_{p_\nu+t}$ existe, on posera alors comme convenu $\eta_\nu^{tr} = 0$.

(25) Le lemme II est légitime sans restreindre la suite $\{\mu_p\}$ à être mesurable (comme dans les théorèmes I et II); il suffit qu'elle soit « presque régulière » (et donc à densité maximum finie). La propriété établie est valide avec une légère modification, d'ailleurs évidente, de ce raisonnement.

constituant l'ensemble $E(q_0, \{\mu_p\})$ sont de longueur uniformément bornée au plus égale à $2(N_0+1)q_0$ ([26]).

A ε positif arbitraire petit, on peut faire correspondre $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ de sorte que pour $\nu > \nu_0$, on a

$$\eta_\nu < \overline{\text{borne}}_{0\leq r\leq n_\nu} \frac{1}{\mu_{p_\nu+r}} \sum_{\substack{t=0 \\ (t\neq r)}}^{t=n_\nu} L \frac{1}{|\mu_{p_\nu+t} - \mu_{p_\nu+r}|} + \varepsilon ;$$

donc *a fortiori*

$$\eta_\nu < \sum_{t\neq r} |\eta_\nu^{t,r}| + \varepsilon.$$

la sommation étant étendue aux C_N^2 couples distincts $(t \neq r)$.

Par conséquent,

$$\Delta = \overline{\lim}\, \eta_\nu \leq \overline{\lim} \sum_{t,r} |\eta_\nu^{t,r}| = \overline{\lim} \sum_{t,r} \eta_\nu^{t,r},$$

$$\Delta \leq \sum_{t,r} \Delta_{t,r},$$

puisque $\Delta_{t,r}$ ne peut être que non négatif $(\underline{\lim}\, \eta_\nu^{t,r} \geq 0)$.

Cette inégalité établit le lemme.

Posons $\varphi_t(s) = \Sigma b_{p,t} e^{-s\mu_{p,t}}$, où l'on désigne par la nouvelle notation $b_{p,t}$ le coefficient associé à l'exposant $\mu_{p,t}$ qui figure dans la série $\varphi(s) = \Sigma b_p e^{-s\mu_p}$. Il n'y a pas d'ambiguïté à représenter aussi cette série par la notation

$$\varphi_t(s) = \Sigma b_{p_\nu+t} e^{-s\mu_{p_\nu+t}} \quad ([27]).$$

Lemme III. — *Le nombre η étant arbitraire positif fini fixé à l'avance et $t > r$, si la suite $\{\mu_{p,tr}\}$ est à indice de condensation égal à $+\infty$, alors on peut toujours extraire de la suite $\{\mu_{p,t}\}$ une suite partielle $\{\mu_{p_{\nu_j}+t}\}$ à densité nulle, de sorte que :*

(1) *Si l'on représente par $\{\mu'_{p,t}\}$ la suite complémentaire à $\{\mu_{p_{\nu_j}+t}\}$ par rapport à $\{\mu_{p,t}\}$, l'ensemble $\{\mu'_{p,t}\} \cup \{\mu_{p,r}\}$ est à indice de condensation fini ;*

(2) $\underline{\lim}\, \eta_{\nu_j}^{t,r} \geq \eta$ (*il est intéressant de choisir, pour les applications qui suivent, $\eta > \sigma_e^\varphi - \sigma_{\mathscr{H}}^\varphi$*).

$\{\mu_{p,tr}\}$ est une suite « presque régulière » comme suite partielle d'une suite « presque régulière ».

Cette assertion est facile à établir. On a, en effet, montré au lemme II que $\{\mu_{p,tr}\}$ satisfait aux conditions (1) et (2) d'une suite « presque régulière ». La condition (3) peut être établie de la manière suivante :

([26]) Il n'existe aucun segment de longueur $> 2(N_0+1)q_0$ puisque $N_0 = \overline{\text{borne}}\, n_\nu$.

([27]) Les deux notations $\{b_{p,t}\}$ et $\{b_{p_\nu+t}\}$ qui désignent la suite des coefficients de $\varphi_t(s)$ trouvent leur justification dans les deux notations $\{\mu_{p,t}\}$ et $\{\mu_{p_\nu+t}\}$ de la suite des exposants de cette série.

Constatons que $\{\mu_p\}$ étant à indice de condensation fini, la suite $\{\mu_{p.tr}\}$ est nécessairement aussi à indice de condensation fini.

Si $\{\mu_{p.tr}\}$ est à indice de condensation infini, la suite $\{\mu_p\}$ est aussi à indice de condensation infini. On peut, eu égard à la condition (3), extraire de $\{\mu_p\}$ une suite $\{\mu'_p\}$ à densité nulle, à *indice de condensation infini*, et telle que sa suite complémentaire $\{\mu''_p\}$ soit à indice de condensation fini.

Établissons cette dernière assertion :

Eu égard à la condition (3), on peut extraire de $\{\mu_p\}$ une suite partielle $\{\mu_{p_j}\}$ à densité nulle, telle que sa suite complémentaire est à indice de condensation fini. Considérons la suite des segments (à l'exclusion des autres segments) de $E(q_0, \{\mu_p\})$ qui contiennent au moins un élément de $\{\mu_{p_j}\}$. A chaque terme μ_{p_j}, associons, s'il existe, l'élément le plus voisin (sous la condition qui suit) et appartenant au même segment que μ_{p_j}. S'il existe deux points équidistants de μ_{p_j} et appartenant au même segment que μ_{p_j}, convenons de choisir l'un d'eux, par exemple le plus à gauche. En outre, on répétera ce choix pour chaque indice p_j dans l'ordre de croissance des indices en commençant par p_1 et de telle sorte que le terme associé à $\mu_{p_{j_0+1}}$, j_0 entier quelconque considéré, soit pris dans la suite complémentaire à $\{\mu_{p_j}\}$ *dont on a enlevé les termes associés aux* μ_{p_j} *avec* $j \leq j_0$.

Notons $\mu^*_{j,0}$ le terme associé à μ_{p_j}. Eu égard aux précautions spécifiées dans le choix ci-dessus, ce terme est unique s'il existe; en outre, à deux termes distints μ_{p_j} et $\mu_{p_{j'}}$, $j \neq j'$, correspondent deux termes distincts $\mu^*_{j,0}$ et $\mu^*_{j',0}$ s'ils existent. On convient de dire que $\mu^*_{j,0}$, s'il existe, est le terme « précisé » de $\mathop{C}_{\{\mu_p\}}\{\mu_{p_j}\}$ associé au terme μ_{p_j}.

L'ensemble $\{\mu^*_{j,0}\} \cup \{\mu_{p_j}\}$ ordonné en une suite strictement croissante $\{\mu^*_{j,1}\}$ est à densité nulle. L'indice de condensation de sa suite complémentaire par rapport à $\{\mu_p\}$ est évidemment fini.

Si l'indice de condensation de $\{\mu^*_{j,1}\}$ est infini, l'assertion est établie. Sinon, on associe à nouveau, à chaque terme $\mu^*_{j,1}$, son élément « précisé » de $\mathop{C}_{\{\mu_n\}}\{\mu^*_{j,1}\}$. Soit μ^{**}_j ce terme. L'ensemble $\{\mu^*_{j,1}\} \cup \{\mu^{**}_j\}$ ordonné en une suite strictement croissante $\{\mu^*_{j,2}\}$ est à densité nulle. Sa suite complémentaire par rapport à $\{\mu_p\}$ est à indice de condensation fini. Si $\{\mu^*_{j,2}\}$ est à indice de condensation infini, l'assertion est établie, sinon on recommence la même opération. Il est évident, eu égard à la propriété (2) d'une suite « presque régulière », qu'on ne peut réaliser qu'un nombre fini d'opérations de cette espèce. On est certain qu'après un nombre fini d'opérations, N_1 par exemple, la suite partielle considérée des segments de $E(q_0, \{\mu_p\})$ ne contiendra plus aucun point de $\{\mu_p\}$ ou seulement un ensemble fini.

Si la suite ainsi obtenue après N_1 opérations au plus n'était pas à indice de

condensation infini (elle est évidemment à densité nulle), on aurait par ce procédé décomposé la suite $\{\mu_p\}$ en deux suites complémentaires à écart positif, chacune à indice de condensation fini; la suite $\{\mu_p\}$ serait nécessairement alors à indice de condensation fini contrairement à l'hypothèse. L'assertion est établie.

Considérons alors la suite infinie strictement croissante

$$\{\mu'_{p,tr}\} = \{\mu_{p,tr}\} \cap \{\mu'_p\}$$

(cette intersection ne peut évidemment être vide ou se réduire à un ensemble fini car alors, à un ensemble fini près dans ce dernier cas, $\{\mu_{p,tr}\}$ appartiendrait à $\{\mu''_p\}$ et son indice de condensation serait fini).

Il est évident que $\{\mu'_{p,tr}\}$ est à densité nulle. La suite $\{\mu''_{p,tr}\}$ complémentaire à $\{\mu'_{p,tr}\}$ par rapport à $\{\mu_{p,tr}\}$ est une suite partielle de $\{\mu''_p\}$. Elle est donc, comme $\{\mu''_p\}$, à indice de condensation fini.

En définitive, $\{\mu_{p,tr}\}$ est donc bien une suite « presque régulière ». Revenons maintenant à la démonstration du lemme :

Eu égard à la propriété (3) d'une telle suite, on peut extraire de $\{\mu_{p,tr}\}$ une suite partielle, $\{\mu_{p_n,tr}\}$ à densité nulle, à indice de condensation infini, de sorte que la suite complémentaire soit à indice de condensation fini. Notons $\{\mu_{p_{\nu'_j}+t}\}$ la suite partielle extraite de $\{\mu_{p,t}\}$ et telle que

$$\{\mu_{p_{\nu'_j}+t}\} = \{\mu_{p,t}\} \cap \{\mu_{p_n,tr}\}.$$

et notons $\{\mu_{p_{\nu''_j}+r}\}$ la suite partielle extraite de $\{\mu_{p,r}\}$ et de telle sorte que

$$\{\mu_{p_{\nu''_j}+r}\} = \{\mu_{p,r}\} \cap \{\mu_{p_n,tr}\}.$$

On a, bien entendu,

$$\{\mu_{p_{\nu'_j}+t}\} \cup \{\mu_{p_{\nu''_j}+r}\} = \{\mu_{p_n,tr}\}.$$

De la suite $\{\nu''_j\}$ supprimons, s'ils existent, tous les entiers ν''_j tels qu'il n'existe pas dans les segments de mêmes indices de $E(q_0, \{\mu_p\})$, un point de $\{\mu_{p,t}\}$; soit $\{\nu''_{j_k}\}$ la suite restante. Désignons par $\{\nu_j\}$ l'ensemble des entiers $\{\nu'_j\} \cup \{\nu''_{j_k}\}$, ordonné en une suite strictement croissante, et considérons la suite des couples $\{\mu_{p_{\nu_j}+t}, \mu_{p_{\nu_j}+r}\}$.

Cette suite, de la façon dont elle a été construite, ordonnée en une suite strictement croissante est à densité nulle et son indice de condensation est égal à $+\infty$. Sa suite complémentaire par rapport à $\{\mu_{p,tr}\}$ est à indice de condensation fini.

Considérons la suite $\{\eta^{t,r}_{\nu_j}\}$. Si $\underline{\lim}\, \eta^{t,r}_{\nu_j} < \eta$, alors on peut toujours extraire, de la suite des entiers $\{\nu_j\}$, une suite partielle $\{\nu_{j_k}\}$ telle qu'on ait $\underline{\lim}\, \eta^{t,r}_{\nu_{j_k}} \geq \eta$ et que l'ensemble complémentaire à la suite des couples $\{\mu_{p_{\nu_{j_k}}+t}, \mu_{p_{\nu_{j_k}}+r}\}$ soit à

indice de condensation fini. Les propriétés (1) et (2) sont établies (le rôle de la suite $\{\nu_j\}$ de l'énoncé du lemme III est ici joué par la suite $\{\nu_{j_k}\}$).

LEMME IV. — *η étant un nombre positif arbitraire fixé à l'avance et si $\{\mu_p\}$ est une suite « presque régulière », on peut toujours extraire de cette suite une suite partielle « presque régulière », que l'on note $\{\mu'_p\}$, de telle sorte que :*

(1) *la suite $\{\mu'_p\}$ est à indice de condensation fini et à même densité maximum que $\{\mu_p\}$ (elle est mesurable à densité* D *si $\{\mu_p\}$ est elle-même mesurable à densité* D*);*

(2) $$\varphi(s) = \chi(s) + \mathcal{E}(s), \qquad \text{où} \quad \chi(s) = \Sigma b'_p e^{-s\mu'_p}$$

admet $\sigma'_A \leqq \sigma^\varphi_A$, $\sigma'_{\mathcal{H}} = \sigma^\varphi_{\mathcal{H}}$, et où $\mathcal{E}(s)$ est une fonction holomorphe dans un demi-plan $\sigma > \sigma^\varphi_{\mathcal{H}} - \eta$ [les coefficients b'_p de la série définissant $\chi(s)$ s'exprimant linéairement à l'aide des coefficients b_p] (28).

Je donne un mode de construction de la série $\chi(s)$ qui constitue, en même temps, une démonstration du lemme. Rappelons qu'il est évident, de la façon dont les $\mu_{p_{\nu_j}+t}$, $0 \leqq t \leqq n_{\nu_j}$, ont été définis, que si dans le $\nu^{\text{ième}}$ segment de l'ensemble $E(q_0, \{\mu_p\})$ figure le terme $\mu_{p_{\nu_j}+t}$ alors les termes $\mu_{p_{\nu_j}+r}$, $0 \leqq r < t$, figurent nécessairement dans ce segment. Considérons l'ensemble $\{\mu_{p,N-2}\} \cup \{\mu_{p,N-1}\}$ ordonné en une suite strictement croissante $\{\mu_{p,N-1,N-2}\}$. Si cette suite a un indice de condensation fini (qui ne peut être d'ailleurs que non négatif), on posera

$$\Sigma b_{p,N-1} e^{-s\mu_{p,N-1}} + \Sigma b_{p,N-2} e^{-s\mu_{p,N-2}} = \Sigma b_{p,N-1,N-2} e^{-s\mu_{p,N-1,N-2}},$$

où $b_{p,N-1,N-2}$ est la nouvelle notation du coefficient qui est associé à l'exposant $\mu_{p,N-1,N-2}$ dans l'une des séries du membre de gauche où cet exposant figure avec son ancienne notation. Il est évident que l'égalité a un sens pour tout s fini avec $\sigma > \sigma^\varphi_A$ (et le conserve dans un prolongement analytique convenable des séries composantes). Si, par contre, l'indice de condensation de la suite $\{\mu_{p,N-1,N-2}\}$ n'est pas fini, on procèdera comme suit : de la suite $\{\mu_{p_{\nu_j}+N-1}\}$, qu'on désigne aussi par $\{\mu_{p,N-1}\}$, on peut, en vertu du lemme III, toujours extraire une suite partielle à densité nulle, $\{\mu_{p_{\nu_j}+N-1}\}$, de sorte que :

(1) désignant par $\{\mu'_{p,N-1}\}$ la suite complémentaire à la suite $\{\mu_{p_{\nu_j}+N-1}\}$ par rapport à $\{\mu_{p,N-1}\}$, alors l'ensemble $\{\mu_{p,N-2}\} \cup \{\mu'_{p,N-1}\}$ ordonné en une suite strictement croissante a un indice de condensation fini.

(2) $$\underline{\lim}\, \eta^{N-1,N-2}_{\nu_j} \geqq \sigma^\varphi_{\mathcal{E}} - \sigma^\varphi_{\mathcal{H}} + \eta.$$

Désignant par $\{\mu'_{p,N-2}\}$ la suite complémentaire à $\{\mu_{p_{\nu_j}+N-2}\}$ par rapport à

(28) Si $\{\mu_p\}$ est à indice de condensation fini, on choisit

$$\{\mu'_p\} \equiv \{\mu_p\}, \qquad \varphi(s) = \chi(s), \qquad \mathcal{E}(s) = 0.$$

$\{\mu_{p,N-2}\}$, on pose

$$\Sigma b_{p,N-1}e^{-s\mu_{p,N-1}}+\Sigma b_{p,N-2}e^{-s\mu_{p,N-2}}$$
$$=\Sigma b'_{p,N-1}e^{-s\mu'_{p,N-1}}+\Sigma b_{p_{\nu_j},N-1}e^{-s\mu_{p_{\nu_j},N-1}}+\Sigma b'_{p,N-2}e^{-s\mu'_{p,N-2}}+\Sigma b_{p_{\nu_j},N-2}e^{-s\mu_{p_{\nu_j},N-2}}.$$

($b'_{p,N-1}$ est la nouvelle notation du coefficient associé à l'exposant $\mu'_{p,N-1}$ qui figure dans la première série du premier membre; remarque analogue pour $b'_{p,N-2}$).

Posons

$$\varphi^*_{N-1}(s)=\Sigma b_{p_{\nu_j},N-1}e^{-s\mu_{p_{\nu_j},N-1}},\qquad \varphi^*_{N-1,N-2}(s)=\Sigma b_{p_{\nu_j},N-1}e^{-s\mu_{p_{\nu_j},N-2}},$$

on a, pour $\sigma>\sigma^{\mathfrak{D}}_{\lambda}$,

$$\varphi^*_{N-1}(s)-\varphi^*_{N-1,N-2}(s)=\Sigma b_{p_{\nu_j},N-1}\left(e^{-s\mu_{p_{\nu_j},N-1}}-e^{-s\mu_{p_{\nu_j},N-2}}\right).$$

On constate, comme au théorème I, que la série converge absolument en tout point à distance finie du demi-plan $\sigma>\sigma^{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{X}}-\eta_1$.

On a

$$\varphi^*_{N-1}(s)=\varphi^*_{N-1,N-2}(s)+\mathcal{E}_{N-1,N-2}(s),$$

où $\mathcal{E}_{N-1,N-2}(s)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan $\sigma>\sigma^{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{X}}-\eta_1$; les deux fonctions, $\varphi^*_{N-1}(s)$ et $\varphi^*_{N-1,N-2}(s)$, ont le même ensemble singulier par rapport au demi-plan $\sigma>\sigma^{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{X}}-\eta_1$.

On a

$$\Sigma b_{p,N-1,N-2}e^{-s\mu_{p,N-1,N-2}}=\Sigma b'_{p,N-1}e^{-s\mu'_{p,N-1}}+\Sigma b'_{p,N-2}e^{-s\mu'_{p,N-2}}$$
$$+\Sigma\left(b_{p_{\nu_j},N-1}+b_{p_{\nu_j},N-2}\right)e^{-s\mu_{p_{\nu_j},N-2}}+\mathcal{E}_{N-1,N-2}(s)$$
$$=\Sigma b'_{p,N-1}e^{-s\mu'_{p,N-1}}+\Sigma B_{p,N-2}e^{-s\mu_{p,N-2}}+\mathcal{E}_{N-1,N-2}(s)$$

(on écrira aussi la série $\Sigma B_{p,N-2}e^{-s\mu_{p,N-2}}$ sous la forme $\Sigma B_{p_{\nu_j},N-2}e^{-s\mu_{p_{\nu_j},N-2}}$) [29] avec $B_{p_0,N-2}=b_{p_0,N-2}$ si pour l'indice p_0 considéré, $\mu_{p_0,N-2}\in\{\mu'_{p,N-2}\}$, et

$$B_{p_{\nu_j},N-2}=b_{p_{\nu_j},N-1}+b_{p_{\nu_j},N-2}.$$

Désignons par $\{\mu'_{p,N-1,N-2}\}$ l'ensemble $\{\mu_{p,N-2}\}\cup\{\mu'_{p,N-1}\}$ ordonné en une suite strictement croissante, et posons

$$\Sigma b'_{p,N-1}e^{-s\mu'_{p,N-1}}+\Sigma B_{p,N-2}e^{-s\mu_{p,N-2}}=\Sigma b'_{p,N-1,N-2}e^{-s\mu'_{p,N-1,N-2}}$$

($b'_{p,N-1,N-2}$ est la nouvelle notation du coefficient associé à la nouvelle notation de l'exposant $\mu'_{p,N-1,N-2}$ qui figure dans l'une ou l'autre des deux séries du premier membre). L'égalité a un sens pour $\sigma>\sigma^{\mathfrak{D}}_{\lambda}$ (et le conserve dans un prolongement analytique convenable des séries composantes).

---

[29] La sommation étant, bien entendu, restreinte à la suite des indices des segments de $E(q_0,\{\mu_p\})$ contenant un point de $\{\mu_{p,N-2}\}$.

On a

$$\Sigma b_{p,N-1,N-2}\, e^{-s\mu_{p,N-1,N-2}} = \Sigma b'_{p,N-1,N-2}\, e^{-s\mu'_{p,N-1,N-2}} + \mathcal{E}_{N-1,N-2}(s).$$

L'assertion du lemme IV est établie si $\{\mu_p\} \equiv \{\mu_{p,N-1,N-2}\}$ avec $N = 2$. Si $N \geq 3$, considérons maintenant

$$\sum b_{p,N-1,N-2,N-3}\, e^{-s\mu_{p,N-1,N-2,N-3}} = \sum_{t=1}^{3} \sum b_{p,N-t}\, e^{-s\mu_{p,N-t}}.$$

(les notations qui suivent parlent d'elles-mêmes; pour ne pas introduire d'inutiles longueurs dans le texte, nous ne rappellerons pas leurs significations très analogues à celles ci-dessus; ce qui a été dit est traduisible sans ambiguïté, comme le lecteur s'en rendra compte, pour celles ci-dessous).

On a, pour $\sigma > \sigma^{\varphi}_{\mathrm{A}}$,

$$\Sigma b_{p,N-1,N-2,N-3}\, e^{-s\mu_{p,N-1,N-2,N-3}} = \Sigma b_{p,N-3}\, e^{-s\mu_{p,N-3}} + \Sigma \mathrm{B}_{p,N-2}\, e^{-s\mu_{p,N-2}} + \Sigma b'_{p,N-1}\, e^{-s\mu'_{p,N-1}} + \mathcal{E}_{N-1,N-2}(s).$$

si $\{\mu_{p,N-3}\} \cup \{\mu'_{p,N-1}\}$ ordonné en une suite strictement croissante est à indice de condensation égal à $+\infty$, alors en procédant pour

$$\Sigma b_{p,N-3}\, e^{-s\mu_{p,N-3}} + \Sigma b'_{p,N-1}\, e^{-s\mu'_{p,N-1}}$$

comme pour

$$\Sigma b_{p,N-2}\, e^{-s\mu_{p,N-2}} + \Sigma b_{p,N-1}\, e^{-s\mu_{p,N-1}},$$

on aura

$$\Sigma b_{p,N-3}\, e^{-s\mu_{p,N-3}} + \Sigma b'_{p,N-1}\, e^{-s\mu'_{p,N-1}} = \Sigma \mathrm{B}_{p,N-3}\, e^{-s\mu_{p,N-3}} + \Sigma b''_{p,N-1}\, e^{-s\mu''_{p,N-1}} + \mathcal{E}_{N-1,N-3}(s),$$

où $\mathcal{E}_{N-1,N-3}(s)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan $\sigma > \sigma^{\varphi}_{\mathrm{ac}} - \eta_1$, et où $\{\mu_{p,N-3}\} \cup \{\mu''_{p,N-1}\}$ est ordonné en une suite à indice de condensation fini.

De même, si $\{\mu_{p,N-3}\} \cup \{\mu_{p,N-2}\}$ ordonné en une suite strictement croissante est à indice de condensation égal à $+\infty$, alors, en procédant encore une fois comme ci-dessus, pour la somme

$$\Sigma \mathrm{B}_{p,N-3}\, e^{-s\mu_{p,N-3}} + \Sigma \mathrm{B}_{p,N-2}\, e^{-s\mu_{p,N-2}},$$

on aura

$$\Sigma \mathrm{B}_{p,N-3}\, e^{-s\mu_{p,N-3}} + \Sigma \mathrm{B}_{p,N-2}\, e^{-s\mu_{p,N-2}} = \Sigma \mathcal{B}_{p,N-3}\, e^{-s\mu_{p,N-3}} + \Sigma \mathrm{B}'_{p,N-2}\, e^{-s\mu'_{p,N-2}} + \mathcal{E}_{N-2,N-3}(s),$$

où $\mathcal{E}_{N-2,N-3}(s)$ est une fonction holomorphe dans $\sigma > \sigma^{\varphi}_{\mathrm{ac}} - \eta_1$, et où

$$\{\mu_{p,N-3}\} \cup \{\mu'_{p,N-2}\}$$

est ordonné en une suite à indice de condensation fini. En résumé, on a

$$\Sigma b_{p,N-1,N-2,N-3}\, e^{-s\mu_{p,N-1,N-2,N-3}} = \Sigma \mathcal{B}_{p,N-3}\, e^{-s\mu_{p,N-3}} + \Sigma \mathrm{B}'_{p,N-2}\, e^{-s\mu'_{p,N-2}} + \Sigma b''_{p,N-1}\, e^{-s\mu''_{p,N-1}} + \mathcal{E}_{N-1,N-2,N-3}(s),$$

où

$$\mathcal{E}_{N-1,N-2,N-3}(s) = \mathcal{E}_{N-1,N-2}(s) + \mathcal{E}_{N-1,N-3}(s) + \mathcal{E}_{N-2,N-3}(s),$$

c'est-à-dire que

$$\Sigma b_{p,N-1,N-2,N-3}\, e^{-s\mu_{p,N-1,N-2,N-3}} = \Sigma b'_{p,N-1,N-2,N-3}\, e^{-s\mu'_{p,N-1,N-2,N-3}} + \mathcal{E}_{N-1,N-2,N-3}(s),$$

où $\{\mu'_{p,N-1,N-2,N-3}\}$, eu égard au lemme II, est à indice de condensation fini, et résulte de $\{\mu_{p,N-1,N-2,N-3}\}$ par extraction de cette dernière suite d'une suite à densité nulle. Le théorème est établi si $\{\mu_p\} \triangleq \bigcup_i \{\mu_{p,i}\}$, avec $N = 3$, sinon on poursuivra par l'étude du cas $\sum_{i=1}^{i=k} \sum b_{p,N-1} e^{-s\mu_{p,N-1}}$. De toute manière, l'assertion du théorème est légitime après un nombre fini d'opérations de cette espèce.

Les lemmes antérieurs permettent de ramener l'étude des singularités de la fonction $\psi(s) = \Sigma b_p \theta(\mu_p) e^{-s\mu_p}$ au seul cas où les deux conditions, $\{\mu_p\} \cap \{\rho_p\} = \omega$ et $\{\mu_p\} \cup \{\rho_p\}$ à indice de condensation fini, sont simultanément vérifiées.

Si $\{\mu_p\} \cap \{\rho_p\} \neq o$, on peut cependant toujours choisir (et d'une infinité de manières) une suite infinie positive strictement croissante $\{\lambda_p\}$ telle que

$$\{\lambda_p\} \cap \{\rho_p\} = o, \tag{1}$$

chaque λ_p étant suffisamment voisin mais distinct du terme μ_p de même indice pour que

$$\lim_{p=\infty} (\lambda_p - \mu_p) = o \tag{2}$$

et qu'on ne puisse extraire de la suite des couples $\{\lambda_p, \mu_p\}$ une sous-suite de couples $\{\lambda_{p_j}, \mu_{p_j}\}$ qui, ordonnée en une suite strictement croissante, soit à indice de condensation fini (30).

(2) entraîne que $\{\lambda_p\}$ est une suite « presque régulière » et que

$$\{\lambda_p\} \triangleq \bigcup_i \{\lambda_{p,i}\} \qquad (o \leq i \leq N-1).$$

Puisque $\{\mu_p\}$ est mesurable à densité D, la suite $\{\lambda_p\}$ est aussi mesurable à densité D. Ces assertions sont très faciles à établir (la dernière est triviale).

Le cas trivial où l'intersection $\{\mu_p\} \cap \{\rho_p\}$ se réduit à un ensemble fini (soit $\mu_{p_1} < \mu_{p_2} < \ldots < \mu_{p_\tau}$ cet ensemble) s'étudie de la même façon que celui où l'intersection est vide; en effet, la suppression d'un nombre fini de termes

(30) Si $\{\mu'_n\}$ est la suite partielle intersection de $\{\mu_p\}$ et $\{\rho_p\}$, on peut se proposer de choisir $\lambda_p = \mu_p$ pour chaque valeur de l'indice p telle que $\mu_p \notin \{\mu'_n\}$. Un tel choix exige une modification légère, d'ailleurs évidente, de la condition (2); bien que plus naturel que celui fait ci-dessus, il ne simplifie pas la démonstration qui suit.

dans la série définissant $\psi(s)$ est sans influence sur le problème traité. Il se présente évidemment comme cas particulier du cas général ci-dessus et, à ce titre, on peut d'ailleurs choisir la suite strictement croissante $\{\lambda_p\}$, $p \geq 1$, telle que

$$\lambda_p = \mu_p \qquad \text{pour} \quad p \neq p_j \qquad (1 \leq j \leq T), \qquad \text{avec} \quad \lambda_{p_j} \notin \{\rho_p\}.$$

Considérons $\{\mu_p\} \cup \{\rho_p\}$ si $\{\mu_p\} \cap \{\rho_p\} = 0$, sinon considérons $\{\lambda_p\} \cup \{\rho_p\}$, à l'exclusion de l'autre ensemble. Convenons, pour éviter deux notations, de représenter par $\{\nu_p\}$, soit la suite $\{\mu_p\}$, soit la suite $\{\lambda_p\}$; précisons que, préliminairement à toute démonstration qui suit, la suite $\{\nu_p\}$ désignera la suite $\{\mu_p\}$ si $\{\mu_p\} \cap \{\rho_p\} = 0$, sinon $\{\nu_p\}$ désignera une certaine suite $\{\lambda_p\}$ choisie comme ci-dessus une fois pour toutes et qui interviendra dans les démonstrations à la place de la suite $\{\mu_p\}$.

Du choix de la suite $\{\lambda_p\}$ et de cette convention d'écriture, il résulte que $\varphi(s) = \varphi^*(s) + \mathcal{E}(s)$, où $\varphi^*(s) = \Sigma b_p e^{-s\nu_p}$ admet $\sigma_c^{\varphi^*} = \sigma_c^{\varphi}$, $\sigma_{ac}^{\varphi^*} = \sigma_{ac}^{\varphi}$, et où $\mathcal{E}(s)$ est une fonction entière [propriété que l'on démontre comme au théorème I et qui résulte de la propriété (2) de $\{\lambda_p\}$] pouvant se réduire à la constante zéro (dans le cas où $\{\lambda_p\} \equiv \{\mu_p\}$, c'est-à-dire où $\{\mu_p\} \cap \{\rho_p\} = 0$) ou à un polynome de Dirichlet (cas où $\{\mu_p\}$ et $\{\rho_p\}$ n'ont en commun qu'un nombre fini de termes).

En vertu du lemme IV, on peut extraire de la suite $\{\nu_p\}$, si celle-ci est à indice de condensation égal à $+\infty$, une suite partielle $\{\nu'_p\}$ « presque régulière » (de même densité D que $\{\nu_p\}$ et que $\{\mu_p\}$ puisque $\{\mu_p\}$ est mesurable) de sorte qu'on ait

$$\varphi^*(s) = \chi(s) + \mathcal{E}_1(s),$$

où $\chi(s) = \Sigma b'_p e^{-s\nu'_p}$ admet $\sigma_c^{\chi} \leq \sigma_c^{\varphi^*}$, $\sigma_{ac}^{\chi} = \sigma_{ac}^{\varphi^*}$, et où $\mathcal{E}_1(s)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan $\sigma > \sigma_{ac}^{\varphi^*} - \eta_1$, $\eta_1 > 0$ arbitraire fini (la suite $\{\nu'_p\}$ dépendant du choix de η_1).

[Si $\{\nu_p\}$ est à indice de condensation fini, alors $\{\nu'_p\} \equiv \{\nu_p\}$, et par conséquent $\chi(s) \equiv \varphi^*(s)$, $\mathcal{E}_1(s) \equiv 0$.]

Pour $\sigma > \sigma_A^{\varphi}$, on a

$$\psi(s) = \sum_p b_p \theta(\mu_p) e^{-s\mu_p} = \sum_r \gamma_r \varphi^{(r)}(s) = \sum \gamma_r \{\chi(s) + \mathcal{E}(s) + \mathcal{E}_1(s)\}^{(r)}$$

$$= \sum \gamma_r \chi^{(r)}(s) + \sum \gamma_r \{\mathcal{E}(s) + \mathcal{E}_1(s)\}^{(r)} = \psi^*(s) + \mathcal{E}^*(s),$$

où $\mathcal{E}^*(s)$ est holomorphe dans $\sigma > \sigma_{ac}^{\varphi} - \eta_1$ et $\psi^*(s) = \Sigma b'_p \theta(\nu'_p) e^{-s\nu'_p}$ admet $\sigma_c^{\psi^*} \leq \sigma_c^{\varphi}$.

La suite $\{\nu'_p\}$ satisfait à $\{\nu'_p\} \cap \{\rho_p\} = \varnothing$; si, en outre, l'ensemble $\{\nu'_p\} \cup \{\rho_p\}$, ordonné en une suite strictement croissante, est à indice de condensation fini, on est ramené aux conditions dans lesquelles la propriété de G. Pólya a été

établie. Si donc on suppose fausse l'assertion du théorème II, alors le point β régulier pour $\psi(s)$ est aussi régulier pour $\psi^*(s)$ et, eu égard à la démonstration faite au début, le point β est aussi régulier pour la fonction $\chi(s)$; il est donc régulier pour la fonction $\varphi^*(s)$. Le point β serait en définitive régulier pour $\varphi(s)$. La contradiction achève d'établir le théorème sous la condition que $\{\nu'_p\}\cup\{\rho_p\}$ est à indice de condensation fini.

Notons δ_μ, δ_ρ, $\delta_{\mu\rho}$, $\delta_{\nu'}$ respectivement les indices de condensation des suites $\{\mu_p\}$, $\{\rho_p\}$, $\{\mu_p\}\cup\{\rho_p\}$, $\{\nu'_p\}$.

Le théorème a été prouvé directement dans le cas

$$\{\mu_p\}\cap\{\rho_p\}=\emptyset, \qquad \delta_\mu<\infty, \qquad \delta_\rho<\infty, \qquad \delta_{\mu\rho}<\infty.$$

On a ramené le cas

$$\{\mu_p\}\cap\{\rho_p\}\neq\emptyset, \qquad \delta_\mu=\infty, \qquad \delta_\rho<\infty$$

(avec évidemment $\delta_{\mu\rho}=\infty$) au cas

$$\{\nu'_p\}\cap\{\rho_p\}=\emptyset, \qquad \delta_{\nu'}<\infty, \qquad \delta_\rho<\infty, \qquad \delta_{\nu'\rho}\leqq\infty.$$

Rappelons une fois pour toutes que le cas $\{\mu_p\}\cap\{\rho_p\}\neq\emptyset$ se ramène au cas $\{\nu_p\}\cap\{\rho_p\}=\emptyset$,

Il reste à analyser les différents cas :

(a)	$\delta_\nu<\infty$,	$\delta_\rho<\infty$,	$\delta_{\nu\rho}=\infty$,
(b)	$\delta_\nu=\infty$,	$\delta_\rho<\infty$,	$\delta_{\nu\rho}=\infty$,
(c)	$\delta_\nu<\infty$,	$\delta_\rho=\infty$,	$\delta_{\nu\rho}=\infty$,
(d)	$\delta_\nu=\infty$,	$\delta_\rho=\infty$,	$\delta_{\nu\rho}=\infty$.

Or, la méthode ci-dessus ramène les cas (b) et (d) aux cas

(b')	$\delta_{\nu'}<\infty$,	$\delta_\rho<\infty$,	$\delta_{\nu'\rho}\leqq\infty$,
(d')	$\delta_{\nu'}<\infty$,	$\delta_\rho=\infty$,	$\delta_{\nu'\rho}=\infty$.

L'analyse de (b') et (d') se ramène à celle de (a) et (c).

Analysons maintenant le cas (a).

La propriété suivante s'établit facilement :

$\eta>\delta_\rho$ étant une constante arbitraire finie fixée à l'avance, on peut extraire de la suite $\{\nu_p\}$ une suite partielle croissante $\{\nu_{p_j}\}$ à densité nulle et extraire de $\{\rho_p\}$ une suite partielle croissante $\{\rho'_j\}$ de sorte que :

(1) *la suite des couples $\{\nu_{p_j}, \rho'_j\}$ ordonnée en une suite strictement croissante soit à indice de condensation infini;*

(2) *on ne peut extraire de la suite des couples $\{\nu_{p_j}, \rho'_j\}$ une sous-suite de couples formant une suite croissante à indice de condensation inférieur à $\sigma^\rho_c-\sigma^\rho_{\mathcal{H}}+\eta$;*

(3) *la suite complémentaire à $\{\nu_{p_j}\}$ par rapport à $\{\nu_p\}\cup\{\rho_p\}$ est à indice de condensation fini.*

Notons $\{\nu'_p\}$ la suite strictement croissante complémentaire à $\{\nu_{p_j}\}$ par rapport à $\{\nu_p\}$. L'ensemble $\{\nu'_p\}\cup\{\rho_p\}$ ordonné en une suite croissante est à indice de condensation fini.

Posons

$$\Theta(z)=\varpi(z)\,\Theta^*(z),\qquad \text{avec}\quad \varpi(z)=\Pi\left(1-\frac{z}{\rho'_j}\right)^{m'_j},$$

m'_j étant l'ordre de multiplicité du zéro ρ'_j de $\Theta(z)$.

On a, pour $\sigma>\sigma^{\varphi}_{\mathscr{C}}$:

$$\psi_*(s)=\psi_{*1}(s)+\psi_{*2}(s),\qquad \varphi^*(s)=\varphi^*_1(s)+\varphi^*_2(s),$$

avec

$$\psi_*(s)=\Sigma b_p\,\mathrm{P}(\nu_p)\,\varpi(\nu_p)\,\Theta^*(\nu_p)\,e^{-s\nu_p},$$
$$\psi_{*1}(s)=\Sigma b'_p\,\mathrm{P}(\nu'_p)\,\varpi(\nu'_p)\,\Theta^*(\nu'_p)\,e^{-s\nu'_p},$$
$$\psi_{*2}(s)=\Sigma b_{p_j}\mathrm{P}(\nu_{p_j})\varpi(\nu_{p_j})\Theta^*(\nu_{p_j})\,e^{-s\nu_{p_j}},$$
$$\varphi^*(s)=\Sigma b_p e^{-s\nu_p},\qquad \varphi^*_1(s)=\Sigma b'_p e^{-s\nu'_p},\qquad \varphi^*_2(s)=\Sigma b_{p_j}e^{-s\nu_{p_j}}.$$

[b'_p est la nouvelle notation du coefficient associé à l'exposant ν'_p dans la série définissant $\varphi^*(s)$].

Posons

$$\varphi^{**}(s)=\varphi^{**}_1(s)+\varphi^{**}_2(s),$$

avec

$$\varphi^{**}_1(s)=\Sigma b'_p\mathrm{P}(\nu'_p)\varpi(\nu'_p)\,e^{-s\nu'_p},$$
$$\varphi^{**}_2(s)=\Sigma b_{p_j}\mathrm{P}(\nu_{p_j})\varpi(\nu_{p_j})\,e^{-s\nu_{p_j}}.$$

Eu égard à la propriété (2) du lemme ci-dessus, on a [comme on le constate facilement puisque $\varpi(z)$ est réel pour z réel] :

$$\sigma^{\varphi^{**}}_{\mathscr{H}}\leq\sigma^{\varphi^{**}}_{\mathscr{C}}\leq\sigma^{\varphi}_{\mathscr{H}}-\eta.\qquad \sigma^{\psi_{*2}}_{\mathscr{H}}\leq\sigma^{\psi_{*2}}_{\mathscr{C}}\leq\sigma^{\psi}_{\mathscr{H}}-\eta.$$

Les deux fonctions, $\varphi^{**}(s)$ et $\varphi^{**}_1(s)$ ont, par rapport au demi-plan $\sigma>\sigma^{\varphi}_{\mathscr{H}}-\eta$, le même ensemble singulier. De même, les deux fonctions $\psi_*(s)$ et $\psi_{*1}(s)$ ont, par rapport au demi-plan $\sigma>\sigma^{\varphi}_{\mathscr{H}}-\eta$, le même ensemble singulier.

Supposons le point β régulier pour $\psi(s)$; ce point est aussi régulier pour $\psi_*(s)$ et $\psi_{*1}(s)$ comme on le constate facilement.

Si β est singulier pour $\varphi^{**}(s)$, il est nécessairement « semi-isolé ». Mais comme $\{\nu'_p\}\cup\{\rho''_p\}$ (où $\{\rho''_p\}$ est la suite complémentaire à $\{\rho'_j\}$ par rapport à $\{\rho_p\}$) est à indice de condensation fini, et, eu égard à la démonstration ci-dessus, le point β est aussi régulier pour $\varphi^{**}_1(s)$ et donc pour $\varphi^{**}(s)$. La contradiction entraîne que β est singulier pour $\psi_{*1}(s)$, $\psi_*(s)$ et donc $\psi(s)$.

[Remarquons que le cas $\Theta^*(z)\equiv 1$, et donc $\varphi^{**}_1(s)\equiv\psi_{*1}(s)$, peut avoir lieu.]

Si β est régulier pour $\varphi^{**}(s)$, ce point est aussi régulier pour $\varphi^{**}_1(s)$. On a

$$\sigma^{\varphi^{**}_1}_{\mathscr{H}}\leq\sigma^{\varphi^{**}_1}_{\mathscr{H}}.$$

Si $\sigma_{\mathscr{H}}^{\varphi_2^*} < \sigma_{\mathscr{H}}^{\varphi_1^*}$ le point β est « semi-isolé » pour $\varphi_1^*(s)$ et eu égard à la démonstration antérieure, ce cas « β régulier pour $\varphi^{**}(s)$ » ne peut avoir lieu. Si $\sigma_{\mathscr{H}}^{\varphi_2^*} = \sigma_{\mathscr{H}}^{\varphi_1^*}$, on peut raisonner comme suit :

Posant

$$\Phi_1^{**}(\mathfrak{Z}) = \Sigma b_p'' \mathrm{P}(\nu_p') \varpi(\nu_p') e^{-\mathfrak{Z}\nu_p'}, \qquad b_p'' = b_p' e^{-\beta\nu_p'}, \qquad s = \mathfrak{Z} + \beta;$$

on a $x_{\mathscr{H}}^{\Phi_1^{**}} \leq 0$. Le point $\mathfrak{Z} = 0$ est régulier pour $\Phi_1^{**}(\mathfrak{Z})$; il existe alors un nombre l, $0 < l \leq \pi D$, et une fonction $\Omega(z)$ holomorphe dans un secteur $S(|\arg z| \leq \alpha,\ \alpha > 0)$ du plan de la variable complexe z tels que

$$(a) \qquad |\Omega(z)| < e^{[(\pi D - l)|\sin\omega| + \varepsilon]|z|}, \qquad z \in S,$$

$\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, $|z|$ suffisamment grand;

$$(b) \qquad \Omega(\nu_p') = b_p'' \mathrm{P}(\nu_p') \varpi(\nu_p') \mathrm{C}_1'(\nu_p').$$

avec

$$\mathrm{C}_1(z) = \Pi\left(1 - \frac{z^2}{\nu_p'^2}\right).$$

on en déduit que $\Omega_1(z) = \Omega(z)\varpi_1(-z)$, avec $\varpi_1(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{\rho_j'}\right)$, satisfait à une condition du type (a) et à la condition

$$(b') \qquad \Omega_1(\nu_p') = b_p'' \mathrm{P}(\nu_p') \varpi^*(\nu_p') \mathscr{C}_1'(\nu_p').$$

où

$$\mathscr{C}_1(z) = \mathrm{C}_1(z)\varpi_1(z)\varpi_1(-z) \quad \text{et} \quad \varpi^*(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{\rho_j'}\right)^{m_j'-1}.$$

[$\varpi^*(z)$ peut se réduire à la constante 1; les zéros ρ_j' d'ordre 1 de $\varpi(z)$ n'y figurent plus].

Le point $\mathfrak{Z} = 0$ est donc régulier pour la fonction

$$\Phi_*(\mathfrak{Z}) = \sum \frac{\Omega_1(\nu_p^*)}{\mathscr{C}_1'(\nu_p^*)} e^{-\mathfrak{Z}\nu_p^*},$$

où l'on note $\{\nu_p^*\}$ l'ensemble $\{\nu_p'\} \cup \{\rho_j'\}$ ordonné en une suite strictement croissante.

Notant δ_{ν^*} l'indice de condensation de $\{\nu_p^*\}$, on a pour $\mathfrak{Z}$ fini avec $\mathscr{R}\mathfrak{Z} > \delta_{\nu^*}$:

$$\Phi_*(\mathfrak{Z}) = \Phi_{*1}(\mathfrak{Z}) + \mathscr{E}(\mathfrak{Z}),$$

avec

$$\mathscr{E}(\mathfrak{Z}) = \sum \frac{\Omega_1(\rho_j')}{\mathscr{C}_1'(\rho_j')} e^{-\mathfrak{Z}\rho_j'} \quad \text{et} \quad \Phi_{*1}(\mathfrak{Z}) = \sum b_p'' \mathrm{P}(\nu_p') \varpi^*(\nu_p') e^{-\mathfrak{Z}\nu_p'}.$$

S'il est possible que $x_{\mathscr{H}}^{\mathscr{E}} < x_{\mathscr{H}}^{\Phi_{*1}}$, le point $\mathfrak{Z} = 0$ est régulier pour $\Phi_{*1}(\mathfrak{Z})$ et donc β serait régulier pour la fonction $\varphi_{*1}(s) = \Sigma b_p' \mathrm{P}(\nu_p') \varpi^*(\nu_p') e^{-s\nu_p'}$. Si, par

contre $x_{\mathcal{K}}^{\varphi} = x_{\mathcal{K}}^{\Phi_{**}}$, alors $\mathfrak{Z} = 0$ est singulier du type « coupure » pour $\Phi_{*1}(\mathfrak{Z})$ et donc β est singulier du type « coupure » pour $\varphi_{*1}(s)$.

Posons

$$\Phi_{**}(\mathfrak{Z}) = \Sigma(b_p e^{-\beta\nu_p}) P(\nu_p) \varpi^*(\nu_p) e^{-\mathfrak{Z}\nu_p},$$

$$\Phi_{*2}(\mathfrak{Z}) = \Sigma\left(b_{p_j} e^{-\beta\nu_{p_j}}\right) P(\nu_{p_j}) \varpi^*(\nu_{p_j}) e^{-\mathfrak{Z}\nu_{p_j}}.$$

On a

$$\Phi_{*1}(\mathfrak{Z}) = \Phi_{**}(\mathfrak{Z}) + \Phi_{*2}(\mathfrak{Z}) = \Phi_{*}(\mathfrak{Z}) - \mathcal{L}(\mathfrak{Z}),$$

et donc

$$\Phi_{*}(\mathfrak{Z}) = \Phi_{**}(\mathfrak{Z}) + \mathcal{L}(\mathfrak{Z}) - \Phi_{*2}(\mathfrak{Z}).$$

La fonction $\mathcal{L}(\mathfrak{Z}) - \Phi_{*2}(\mathfrak{Z})$ admet l'axe $x = x_{\mathcal{K}}^{\varphi - \Phi_{**}}$ pour frontière naturelle. Le seul cas possible est que le point $\mathfrak{Z} = 0$ soit régulier pour $\Phi_{**}(\mathfrak{Z})$, c'est-à-dire que β soit régulier pour

$$\varphi_{**}(s) = \Phi_{**}(s - \beta).$$

En itérant, on est conduit à la contradiction que : β régulier pour $\varphi^{**}(s)$ et $\sigma_{\mathcal{K}}^{\varphi_0^*} = \sigma_{\mathcal{K}}^{\varphi_0^*}$ entraînent que β est régulier pour

$$\varphi_0^*(s) = \Sigma b_p P_1(\nu_p) e^{-s\nu_p},$$

où $P_1(z)$ est un certain polynome; ce qui est impossible.

Ainsi dans le cas $\delta_\nu < \infty$, $\delta_\rho < \infty$, $\delta_{\nu\rho} = \infty$, le point β est encore singulier pour $\psi(s)$.

Il reste maintenant à analyser le cas

$$(c) \qquad \delta_\nu < \infty, \qquad \delta_\rho = \infty, \qquad \delta_{\nu\rho} = \infty.$$

Soit $q > 0$ fini quelconque fixé et soit $E(q, \{\rho_p\})$ l'ensemble de voisinage de la suite $\{\rho_p\}$. On suppose la suite des segments disjoints constituant l'ensemble $E(q, \{\rho_p\})$ numérotée 1, 2, 3, ..., ν, ..., dans le sens de croissance des ρ_p. On considère le $\nu^{\text{ième}}$ segment; notons ρ_{p_ν} le plus petit des ρ_p intérieurs à ce segment. Notons $\rho_{p_\nu+t}$, avec $1 \leq t \leq m_\nu$, les m_ν autres ρ_p s'ils existent, de sorte que $\rho_{p_\nu} < \rho_{p_\nu+1} < \ldots < \rho_{p_\nu+m_\nu}$; ρ_{p_ν} et $\rho_{p_\nu+m_\nu}$ étant respectivement le plus petit et le plus grand des ρ_p de ce $\nu^{\text{ième}}$ segment. On posera, pour achever de préciser,

$$p_\nu + m_\nu + 1 = p_{\nu+1}, \qquad p_1 = 1.$$

On a

$$\vartheta(z) = P(z)\,\Theta(z).$$

Posons

$$\tau_t(z) = \prod_\nu \left(1 - \frac{z}{\rho_{p_\nu+t}}\right)^{n_{p_\nu+t}}, \qquad 0 \leq t \leq \overline{\text{borne}}\, m_\nu,$$

où $n_{p_\nu+t}$ est l'ordre de multiplicité du zéro $\rho_{p_\nu+t}$ de $\Theta(z)$,

$$\Theta(z) = \tau_0(z) T_0(z), \qquad T_{t-1}(z) = \tau_t(z) T_t(z),$$

$$\psi_*(s) = \Sigma b_p P(\nu_p) T_t(\nu_p) e^{-s\nu_p}, \qquad \sigma > \sigma_{\mathcal{C}}^{\psi_*}.$$

Supposant fausse l'assertion du théorème II, β est régulier pour $\psi(s)$. La suite $\{\rho_{p_\nu}\}$ étant « régulière », on est ramené au cas $\delta_\nu < \infty$, $\delta_\rho < \infty$. Eu égard aux résultats antérieurs, le point β est alors régulier pour la fonction $\psi_*^0(s)$. De la même manière, puisque $\{\rho_{p_{\nu+1}}\}$ est « régulière », le point β est aussi régulier pour $\psi_*^1(s)$. Le point β est régulier pour $\psi_*'(s)$.

Puisqu'on se limite au cas borne $m_\nu = M_0 < \infty$, la suite $\{\psi_*'(s)\}$ se réduit à un ensemble fini; Il existe un nombre fini de suites infinies $\{\rho_{p_{\nu_t}}\}$. Il existe donc un entier t_0 tel que la fonction $\psi_*^{t_0}(s) = \Sigma b_p P_t(\nu_p) e^{-s\nu_p}$, où $P_t(z)$ est un certain polynome, admet le point β pour point régulier qui serait aussi régulier pour $\varphi^*(s)$ et donc $\varphi(s)$. La contradiction établit le théorème.

Remarquons que la démonstration antérieure permet d'énoncer sous forme « dubitative » un théorème plus général contenant le précédent comme cas particulier.

Théorème III. — *Dans les hypothèses* (1) *et* (2) *du théorème antérieur, s'il est possible que* $\beta \in S_\varphi^{\sigma_1}$, *avec* $\mathcal{R}\beta = \sigma_{\mathcal{H}}^\varphi$, *soit régulier pour* $\psi(s) = \Sigma b_p \theta(\mu_p) e^{-s\mu_p}$, *alors ce point* β *est singulier du type « coupure » de « classe zéro » pour* $\varphi(s)$.

Les théorèmes I et II permettent d'énoncer :

Théorème IV. — *Dans les hypothèses :*

(1) *la suite des exposants* $\{\mu_p\}$ *de la fonction* $\varphi(s) = \Sigma b_p e^{-s\mu_p}$, *avec* $\sigma_{\mathcal{C}}^\varphi < \infty$, *est « presque régulière » mesurable à densité finie* D $[\varphi(s)$ *n'admettant pas son axe d'holomorphie,* $\sigma = \sigma_{\mathcal{H}}^\varphi > -\infty$, *pour frontière naturelle*$]$;

(2) *la fonction* $\theta(z)$ *est entière de genre zéro* (*et donc du type exponentiel minimum*) *à zéros tous réels* (*sauf un nombre fini au plus*) *et à ordre de multiplicité uniformément borné* (la suite des zéros positifs étant « presque régulière »).

Alors si $\beta \in S_\varphi^{\sigma_1}$ *est « semi-isolé sur l'axe d'holomorphie » de* $\varphi(s)$, *ce point est aussi singulier pour* $\psi(s)$.

Théorème V. — *Dans les hypothèses* (1) *et* (2) *du théorème* IV, *s'il est possible que* $\beta \in S_\varphi^{\sigma_1}$, *avec* $\mathcal{R}\beta = \sigma_{\mathcal{H}}^\varphi$, *soit régulier pour* $\psi(s)$, *alors ce point* β *est singulier du type « coupure » de « classe zéro » pour* $\varphi(s)$.

La méthode utilisée au théorème II, avec quelques modifications convenables permet d'établir les propriétés suivantes :

Théorème (VI.1) ([31]). — *Dans les hypothèses :*

(1) *La suite* $\{\mu_p\}$ *des exposants de la série* $\varphi(s) = \Sigma b_p e^{-s\mu_p}$, *avec* $\sigma_{\mathcal{C}}^\varphi < \infty$, *est mesurable à densité finie* D > 0;

([31]) Ce théorème est une forme intéressante (mais moins générale) d'un théorème classique de Cramer-Pólya-Bernstein. La méthode proposée est non seulement intéressante par elle-même, mais elle a l'avantage de conserver à tout ce travail son unité.

(2) *Posons* $C(z) = \Pi\left(1 - \frac{z^2}{\mu_{p_n}^2}\right)$, *où la suite strictement croissante* $\{\mu_{p_n}\}$ *est une suite partielle mesurable à densité* $\Delta > 0$, *extraite de* $\{\mu_p\}$ *et « presque régulière » :*

(3) *Notant* $\{\mu'_p\}$ *la suite strictement croissante complémentaire à* $\{\mu_{p_n}\}$ *par rapport à* $\{\mu_p\}$, *l'écart des deux suites* $\{\mu_{p_n}\}$ *et* $\{\mu'_p\}$ *est positif et la suite* $\{\mu'_p\}$ *est à indice de condensation nul. Alors tout point* β *de l'axe* $\sigma = \sigma_{\mathcal{K}}^{\varphi}$, *centre d'un intervalle situé sur cet axe de longueur* $2l\,(l > 0)$ *régulier pour* $\varphi(s)$, *est aussi centre d'un intervalle de longueur* $2(l - \Pi\Delta)$ *régulier pour* $\psi(s)$ *si* $l > \Pi\Delta$.

Il est à peine besoin de mentionner que seule l'inégalité stricte (à l'exclusion de l'inégalité large), $\Delta < D$, est légitime puisque $l < \Pi D$.

Théorème (VI.2). — *Dans les hypothèses* (1), (2) *et* (3) *du théorème ci-dessus, et si* $\Delta = 0$, *la fonction* $\psi(s) = \Sigma b_p C(\mu_p) e^{-s\mu_p}$ *est régulière en tout point de l'axe* $\sigma = \sigma_{\mathcal{K}}^{\varphi}$ *où la fonction* $\varphi(s)$ *est régulière.*

Rompant avec la méthode du théorème II, on peut, dans le cas où l'indice de condensation de la suite $\{\mu_p\}$ est fini, obtenir par voie plus rapide le :

Théorème (VI.3). — *Dans les hypothèses* (1), (2) *et* (3) *du théorème* (VI.1) *et si* $\Delta = 0$, *alors tout point singulier « semi-isolé sur l'axe d'holomorphie » pour* $\varphi(s)$ *est aussi singulier pour la fonction* $\psi(s)$.

Les théorèmes (VI.1) et (VI.2) permettent d'énoncer des compléments à certains théorèmes classiques relatifs à l'influence de la nature de la suite des coefficients $\{b_p\}$ sur les singularités de la fonction. Ces théorèmes et d'autres feront l'objet d'une publication ultérieure.

SUR CERTAINES CLASSES

DE

FONCTIONS INDÉFINIMENT DÉRIVABLES

PAR M. PIERRE LALAGUË.

INTRODUCTION.

Divers auteurs, notamment M. Mandelbrojt [18], ont étudié des classes de fonctions $C_I\{M_n\}$ définies de la façon suivante. Soit $\{M_n\}(n=1, 2, \ldots)$ une suite de nombres positifs dont une infinité, y compris M_1, sont supposés finis. et I un intervalle donné (fini ou infini, ouvert ou fermé) sur la droite réelle. $C_I\{M_n\}$ est l'ensemble des fonctions réelles (1) $f(x)$ de la variable réelle x, indéfiniment dérivables sur I. et vérifiant, selon la nature de I, les conditions ci-dessous.

Si I est la droite entière ou une demi-droite fermée, $f(x)$ est bornée sur I et telle que, pour tout x appartenant à I,

$$|f^{(n)}(x)| < C^n M_n \qquad (n=1, 2, \ldots), \tag{1}$$

C constante positive pouvant dépendre de f, mais non de n.

Si I est fini, $f(x)$ vérifie des inégalités du type (1) sur chaque intervalle compact contenu dans I (cette dernière définition est due à M. H. Cartan [5]).

Carleman avait posé pour de telles classes le problème suivant : donner des conditions, portant sur $\{M_n\}$ et $\{M'_n\}$, nécessaires et suffisantes pour que $C_I\{M'_n\}$ contienne $C_I\{M_n\}$.

(1) Tous les résultats restent d'ailleurs valables, à de légères modifications près, si les valeurs de $f(x)$ sont complexes.

Ces conditions, qui varient selon la nature de I, ont été trouvées successivement dans les cas où I est la droite entière, un intervalle fini ouvert ou fermé, une demi-droite fermée, par M. Mandelbrojt ([14], [17]) avec les collaborations respectives de MM. Gorny [8], H. Cartan (²) [5] et Agmon [1]. La solution du problème de Carleman repose essentiellement sur des résultats de deux types.

D'une part elle est basée sur les inégalités existant entre les bornes supérieures sur I des dérivées successives d'une fonction. De telles inégalités ont été établies notamment par M. Hadamard (pour trois dérivées consécutives, I étant la droite entière), par M. Gorny [8], puis par M. H. Cartan [3] (si I est la droite entière ou un intervalle fini), par M. Kolmogoroff [11] qui a donné le résultat le plus précis dans le cas où I est la droite entière.

D'autre part, on utilise la régularisation convexe et la régularisation exponentielle d'une suite, notion due à M. Mandelbrojt [15].

Dans le premier chapitre du présent travail, nous résolvons (au paragraphe II) le problème de Carleman pour les classes $C^E\{M_n\}$ ainsi définies : $C^E\{M_n\}$ est l'ensemble des fonctions $f(x)$ qui appartiennent à $C_I\{M_n\}$ (I étant la droite entière) et qui, de plus, sont presque périodiques, de spectre contenu dans un ensemble donné E de nombres réels.

A cet effet, nous avons introduit, sur le conseil de M. Mandelbrojt, le procédé de « régularisation convexe d'une suite par rapport à un ensemble E » exposé au début du chapitre I (§ I). Puis (au paragraphe III) nous étudions de même les classes $K^E\{M_n\}$ qui diffèrent des classes $C^E\{M_n\}$ par le seul fait qu'au second membre de (1), $C^n M_n$ est remplacé par CM_n. Nous en déduisons certains résultats sur la dérivabilité et la quasi-analyticité des classes $C^E\{M_n\}$ et $K^E\{M_n\}$.

Dans le chapitre II, nous résolvons, grâce aux régularisations convexe et exponentielle, le problème de Carleman pour des classes analogues à $C_I\{M_n\}$ (I étant une demi-droite fermée ou la droite entière), mais où, dans les inégalités qui tiennent lieu de (1), $\overline{\text{borne}}_{x\in I} |f^{(n)}(x)|$ est remplacée par diverses autres normes de $f^{(n)}(x)$.

Dans le chapitre III, nous précisons et complétons certains théorèmes de M. Mandelbrojt [16] concernant la question suivante : le changement de variable $x = \cos\theta$ fait correspondre les fonctions $f(x)$ et $F(\theta) \equiv f(\cos\theta)$; la fonction $f(x)$ [resp. $F(\theta)$] appartenant à une classe $C_I\{M_n\}$ donnée, à quelle classe appartient $F(\theta)$ [resp. $f(x)$]?

La plupart des résultats de ces trois chapitres ont été publiés notamment dans [12] et [13].

J'ai commencé ces recherches avec la collaboration de mon ami J.-P. Kahane et je lui en suis très reconnaissant. Nos résultats communs se trouvent en [10] Je suis heureux d'exprimer ma profonde gratitude à M. Mandelbrojt, dont les

(²) M. H. Cartan a, d'autre part, exposé dans [4] une autre méthode de démonstration, dont nous nous sommes fréquemment inspirés, pour montrer que les conditions trouvées sont nécessaires.

travaux sur la régularisation et les classes de fonctions indéfiniment dérivables [18] sont la base de ces trois chapitres. Ses conseils et encouragements ont été pour moi une aide constante et précieuse.

Qu'il me soit permis enfin de remercier M. le Doyen Pérès et M. Choquet qui, avec M. Mandelbrojt, m'ont fait l'honneur d'accepter de constituer le jury, et M. Paul Montel qui a bien voulu faire publier ce travail dans les *Annales de l'École Normale supérieure*.

CHAPITRE I.

Régularisation par rapport a un ensemble; classes $C^E\{M_n\}$ et $K^E\{M_n\}$.

Introduction.

Soit $\{M_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ une suite donnée de nombres positifs. Une infinité de ces nombres (dont M_1) sont supposés finis. Si, de plus, $\lim_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}}=+\infty$, $\{M_n\}$ *sera dite suite* (S_∞).

Désignons par $C_R\{M_n\}$ l'ensemble des fonctions $f(x)$, bornées et indéfiniment dérivables pour $-\infty<x<\infty$ et vérifiant

$$(A) \qquad |f^{(n)}(x)|<C^n M_n$$

$(-\infty<x<\infty;\ n=1, 2, \ldots;$ C, constante positive pouvant dépendre de f mais non de $n)$.

Soit $\{M_n^c\}$ la suite régularisée convexe de $\{M_n\}$, définie par

$$M_n^c=\overline{\text{borne}}_{r\geq 1}\, r^n/T(r), \qquad T(r)=\max_{n\geq 1} r^n/M_n.$$

MM. Mandelbrojt [14] et Gorny [8], puis M. Bang [2], ont montré que les classes $C_R\{M_n\}$ et $C_R\{M_n^c\}$ sont identiques et qu'il existe une fonction $F(x)$ telle que

$$F(x)\in C_R\{M_n\}, \qquad |F^{(n)}(0)|>\alpha^n M_n^c \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

α, constante positive absolue.

Ceci permet de résoudre aisément pour les classes $C_R\{M_n\}$ un problème posé par Carleman : trouver des relations, portant sur $\{M_n\}$ et $\{M_n'\}$, nécessaires et suffisantes pour que

$$C_R\{M_n\}\subset C_R\{M_n'\}.$$

Les propriétés ci-dessus ont aussi permis (*voir* Mandelbrojt [17]) de résoudre les questions suivantes : trouver des conditions, portant sur $\{M_n\}$, impliquant que $C_R\{M_n\}$ ne contient que des fonctions analytiques, ou est « dérivable », ou est quasi-analytique.

Dans ce chapitre nous faisons une étude analogue, mais portant sur les classes $C^E\{M_n\}$, sous-classes des $C_R\{M_n\}$, définies de la façon suivante. $\{M_n\}$ étant une suite (S_∞), E un ensemble donné de nombres positifs, $C^E\{M_n\}$ est l'ensemble des fonctions presque périodiques dont les exposants de Fourier λ sont tels que $|\lambda| \in E$, qui de plus sont indéfiniment dérivables et vérifient (A).

M. Mandelbrojt nous a suggéré, pour étudier cette question, de définir la suite $\{M_n^E\}$ « régularisée de $\{M_n\}$ par rapport à l'ensemble E » de la façon suivante :

$$M_n^E = \overline{\text{borne}}_{r \in E} r^n / T(r), \qquad T(r) = \overline{\text{borne}}_{n \geq 1} r^n / M_n,$$

cette suite $\{M_n^E\}$ étant susceptible de rendre dans la question considérée les mêmes services que $\{M_n^c\}$ pour les classes $C_R\{M_n\}$. C'est effectivement ce qui se produit. Dans le premier paragraphe nous étudions les principales propriétés de ce mode de régularisation.

Dans le paragraphe II nous appliquons ces résultats à l'étude des classes $C^E\{M_n\}$. Dans le paragraphe III nous les appliquons à l'étude des classes $K^E\{M_n\}$, qui se définissent comme les classes $C^E\{M_n\}$ en remplaçant (A) par

$$(B) \qquad |f^{(n)}(x)| < CM_n \qquad (n = 1, 2, \ldots; -\infty < x < \infty),$$

C, constante positive pouvant dépendre de f mais non de n.

I. — Régularisation convexe par rapport à un ensemble E.

1. Définitions préliminaires. — Soit E un ensemble donné de nombres réels finis τ tels que $\overline{\lim}\, E = +\infty$. Le procédé de régularisation convexe par rapport à E sera appliqué à des fonctions $f(x)$ de la variable réelle x, possédant les propriétés suivantes : $f(x)$ est une fonction réelle définie pour $x \geq 0$, faisant correspondre à chaque $x \geq 0$ une seule valeur $f(x)$; $f(x)$ peut prendre la valeur $(+\infty)$, mais il existe des valeurs de x aussi grandes que l'on veut pour lesquelles $f(x)$ est finie; enfin

$$\overline{\text{borne}}_{x \geq 0} f(x) > -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} x^{-1} f(x) = +\infty.$$

On désigne par $\mathcal{F}$ la classe de ces fonctions $f(x)$.

On appellera C_E la classe des fonctions réelles convexes de la variable réelle x, telles que, pour chaque x, les dérivées à droite et à gauche de la fonction appartiennent à E.

2. Définitions et propriétés de la fonction régularisée :

Définition. — *Si $f(x) \in \mathcal{F}$, on appelle fonction régularisée convexe de $f(x)$*

par rapport à l'ensemble E *la fonction* $F_E^f(x)$ *définie pour* $x \geqq 0$ *par les relations*

$$\varphi(\tau) = \overline{\underset{x \geqq 0}{\text{borne}}} [x\tau - f(x)], \tag{1}$$

$$F_E^f(x) = \overline{\underset{\tau \in E}{\text{borne}}} [x\tau - \varphi(\tau)]. \tag{2}$$

$\varphi(\tau)$ sera dite fonction associée à $f(x)$. $F_E^f(x)$ sera notée $F(x)$, quand cette simplification ne risquera pas de provoquer d'ambiguïté.

D'après (2), on peut supposer (ce que nous ferons désormais) E fermé, ce qui simplifiera certains énoncés sans diminuer la généralité.

LEMME 1. — $\varphi(\tau)$, *définie pour* $-\infty < \tau < \infty$, *est finie, croissante, convexe, telle que*

$$\lim_{\tau \to +\infty} \tau^{-1} \varphi(\tau) = +\infty.$$

Les premières propriétés résultent des hypothèses sur $f(x)$ et du fait que $\varphi(\tau)$ est, d'après (1), l'enveloppe supérieure de la famille de droites d'équation (variables τ, y)

$$y = x\tau - f(x).$$

D'autre part, d'après les hypothèses sur $f(x)$, à chaque τ correspondent une valeur finie x_τ (au moins) et une suite de valeurs x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ tendant vers (ou confondues avec) x, avec

$$\varphi(\tau) = \lim_{i \to \infty} [x_i \tau - f(x_i)].$$

On a $\lim_{\tau \to +\infty} x_\tau = +\infty$. Si l'on avait, en effet, pour une suite $\tau_i \to +\infty$ une suite de $x_{\tau_i} \leqq x_0$, comme $\underset{x \geqq 0}{\text{borne}}\, f(x) > -\infty$, on aurait $f(x) = +\infty$ pour $x > x_0$, ce qui contredirait une des hypothèses faites sur $f(x)$. Mais d'après (1), si τ_0 est une valeur fixée quelconque et si $\tau > \tau_0$, on a

$$\frac{\varphi(\tau) - \varphi(\tau_0)}{\tau - \tau_0} \geqq x_{\tau_0}, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi'^{+}(\tau_0) \geqq x_{\tau_0}.$$

La dérivée à droite de $\varphi(\tau)$ tend donc vers $+\infty$ quand $\tau \to +\infty$, d'où

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} = +\infty.$$

Remarque. — De $\lim_{\tau \to +\infty} x_\tau = +\infty$ il résulte aussi que, si l'on modifie $f(x)$ pour $x \leqq x_0$, $\varphi(\tau)$, pour τ assez grand, n'est pas altérée. Quel que soit x_0 fini, pour τ assez grand, on a

$$\varphi(\tau) = \overline{\underset{x \geqq x_0}{\text{borne}}} [x\tau - f(x)].$$

LEMME 2. — *On a* $F_E^f(x) \leqq f(x)$ *pour tout* $x \geqq 0$. $F_E^f(x)$ *appartient à* C_E. *Si* $f(x)$ *appartient à* C_E, *on a* $F_E^f(x) \equiv f(x)$.

D'après (1), quels que soient τ et $x \geq 0$, on a

$$\varphi(\tau) \geq x\tau - f(x) \qquad \text{ou} \qquad x\tau - \varphi(\tau) \leq f(x).$$

Donc

$$F(x) = \overline{\underset{\tau \in E}{\text{borne}}}\,[x\tau - \varphi(\tau)] \leq f(x).$$

Un raisonnement analogue à celui du lemme 1 montre que $F(x)$ est une fonction convexe de x.

Soit $a = \overline{\underset{\tau \in E}{\text{borne}}}\,\varphi'^{-}(\tau)$. D'après le lemme 1, on a $a \geq 0$, $F(x)$ est égal à $(+\infty)$ pour $0 \leq x < a$, est finie pour $x > a$, et à chaque $x > a$ correspond au moins une suite de $\tau_i \in E$, tendant vers une limite τ finie, et tels que

$$F(x) = \lim_{i \to \infty} [x\tau_i - \varphi(\tau_i)].$$

Par hypothèse faite sur E, $\tau \in E$. Comme $\varphi(\tau)$ est une fonction continue de τ, on a

$$F(x) = x\tau - \varphi(\tau).$$

Soit $x_0 < x_1$, τ_0 et τ_1 deux éléments de E tels que

$$F(x_0) = x_0\tau_0 - \varphi(\tau_0) \qquad \text{et} \qquad F(x_1) = x_1\tau_1 - \varphi(\tau_1).$$

Comme, d'après (2), on a aussi

$$F(x_0) \geq x_0\tau_1 - \varphi(\tau_1) \qquad \text{et} \qquad F(x_1) \geq x_1\tau_0 - \varphi(\tau_0),$$

il en résulte

$$\tau_0 \leq \frac{F(x_1) - F(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \tau_1 \tag{3}$$

Si t'_0 est le plus grand des $\tau_0 \in E$ tels que $F(x_0) = x_0\tau_0 - \varphi(\tau_0)$ et si t_1 est le plus petit des $\tau_1 \in E$ tels que $F(x_1) = x_1\tau_1 - \varphi(\tau_1)$, quand x_1 tend vers x_0 (avec toujours $x_1 > x_0$), (3) montre que t_1 tend vers $\theta_1 \geq t'_0$. Passant à la limite dans l'égalité $F(x_1) = x_1 t_1 - \varphi(t_1)$, on obtient $F(x_0) = x_0\theta_1 - \varphi(\theta_1)$. Ceci, joint à l'inégalité précédente, prouve que $\theta_1 = t'_0$. Alors, d'après (3), $F'^{+}(x_0) = t'_0 \in E$. Si t_0 est le plus petit élément de E tel que $F(x_0) = x_0\tau_0 - \varphi(\tau_0)$, on voit de même que $F'^{-}(x_0) = t_0 \in E$. Donc $F(x) \in C_E$.

Si $f(x) \in C_E$, $\tau = f'^{+}(x) \in E$, et comme $f(x)$ est convexe, on a

$$\varphi[f'^{+}(x)] = xf'^{+}(x) - f(x).$$

Mais, d'après (2),

$$F(x) \geq xf'^{+}(x) - \varphi[f'^{+}(x)] = f(x).$$

Comme on a vu que $F(x) \leq f(x)$, on a $F(x) \equiv f(x)$, ce qui achève la démonstration.

Remarque. — Considérant un τ_x tel que $F(x) = x\tau_x - \varphi(\tau_x)$, on voit aisément que $\tau_x \to \infty$ si $x \to \infty$. Donc, quel que soit t_0, si l'on pose $E_{t_0} = E \cap (t_0, +\infty)$

on a, pour x assez grand :

$$F(x) = \overline{\text{borne}}_{\tau \in E_{\tau_0}} [x\tau - \varphi(\tau)].$$

Comme $\lim_{x \to +\infty} \tau_x = +\infty$, on en déduit aussi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty.$$

LEMME 3. — *f_1 et f_2 étant deux fonctions appartenant à $\mathfrak{F}$, F_1 et F_2 leurs régularisées convexes par rapport à* E, *la relation $f_1(x) \leq f_2(x)$ pour tout $x \geq 0$ entraîne $F_1(x) \leq F_2(x)$ pour tout $x \geq 0$.*

En effet, d'après (1), la première relation entraîne $\varphi_1(\tau) \geq \varphi_2(\tau)$ pour tout τ. (2) entraîne alors $F_1(x) \leq F_2(x)$ pour tout $x \geq 0$.

THÉORÈME 1. — *$F_E^f(x)$ est la plus petite des fonctions de $\mathfrak{F}$ admettant $F_E^f(x)$ pour régularisée convexe par rapport à* E.

C'est une conséquence immédiate du lemme 2.

THÉORÈME 2. — *$F_E^f(x)$ est la plus grande des fonctions de C_E inférieures ou égales à $f(x)$.*

En effet, d'après le lemme 2, $F(x)$ est une fonction de C_E inférieure ou égale à $f(x)$. Soit, d'autre part, $\psi(x)$ une fonction de C_E inférieure ou égale à $f(x)$. Comme $\psi(x)$ est, d'après le lemme 2, sa propre régularisée convexe par rapport à E, le lemme 3 montre que $\psi(x) \leq F(x)$ pour tout $x \geq 0$.

THÉORÈME 3. — *Pour $\tau \in E$, on a*

$$\varphi(\tau) = \overline{\text{borne}}_{x \geq 0} [x\tau - F_E^f(x)]. \tag{4}$$

D'après (2), on a

$$F(x) \geq x\tau - \varphi(\tau) \qquad \text{ou} \qquad \varphi(\tau) \geq x\tau - F(x)$$

quels que soient x et $\tau \in E$. Donc

$$\varphi(\tau) \geq \overline{\text{borne}}_{x \geq 0} [x\tau - F(x)].$$

D'autre part, si $\tau_0 \in E$, comme $\varphi(\tau)$ est une fonction convexe croissante, pour $x_{\tau_0} = \varphi'_+(\tau_0)$, on a

$$F(x_{\tau_0}) = \overline{\text{borne}}_{\tau \in E} [x_{\tau_0}\tau - \varphi(\tau)] = x_{\tau_0}\tau_0 - \varphi(\tau_0),$$

c'est-à-dire

$$\varphi(\tau_0) = x_{\tau_0}\tau_0 - F(x_{\tau_0}) = \overline{\text{borne}}_{x \geq 0} [x\tau_0 - F(x)].$$

Remarque. — Comme $x_{\tau_0} \to +\infty$ si $\tau_0 \to +\infty$, et d'après la remarque faite à

propos du lemme 2, on voit que, quel que soit $x_0 > 0$, pour τ assez grand et appartenant à E, on a

$$\varphi(\tau) = \overline{\underset{x \geq x_0}{\text{borne}}} \left[x\tau - \mathrm{F}_{\mathrm{E}}^{f}(x) \right].$$

Corollaire. — *$\varphi_{\mathrm{E}}(\tau)$ étant la restriction à* E *de la fonction $\varphi(\tau)$ pour que deux fonctions $f^1(x)$ et $f^2(x)$ aient même régularisée convexe par rapport à* E, *il faut et il suffit que les fonctions correspondantes $\varphi_{\mathrm{E}}^1(\tau)$ et $\varphi_{\mathrm{E}}^2(\tau)$ soient identiques.*

C'est une conséquence de (2) et (4).

Théorème 4. — *Les trois relations*

$$\begin{aligned} f_2(x) &\geq \mathrm{F}_1(x) \quad \textit{pour tout } x \geq 0, \\ \mathrm{F}_2(x) &\geq \mathrm{F}_1(x) \quad \textit{pour tout } x \geq 0, \\ \varphi_2(\tau) &\leq \varphi_1(\tau) \quad \textit{pour tout } \tau \in \mathrm{E} \end{aligned}$$

sont deux à deux équivalentes.

La seconde relation entraînant la première, il suffit de montrer que la première entraîne la troisième et que la troisième entraîne la seconde. Or $f_2(x) \geq \mathrm{F}_1(x)$ pour tout $x \geq 0$ entraîne, d'après la définition de φ et le théorème 3, τ étant un élément quelconque de E,

$$\varphi_2(\tau) = \overline{\underset{x \geq 0}{\text{borne}}} \left[x\tau - f_2(x) \right] \leq \overline{\underset{x \geq 0}{\text{borne}}} \left[x\tau - \mathrm{F}_1(x) \right] = \varphi_1(\tau).$$

Si $\varphi_2(\tau) \leq \varphi_1(\tau)$ pour tout $\tau \in \mathrm{E}$, on a

$$\mathrm{F}_2(x) = \overline{\underset{\tau \in \mathrm{E}}{\text{borne}}} \left[x\tau - \varphi_2(\tau) \right] \geq \overline{\underset{\tau \in \mathrm{E}}{\text{borne}}} \left[x\tau - \varphi_1(\tau) \right] = \mathrm{F}_1(x).$$

Corollaire. — *α étant une constante quelconque, les relations*

$$f_2(x) \geq \mathrm{F}_1(x) + \alpha x \quad \textit{pour tout } x \geq 0$$

et

$$\varphi_2(\tau + \alpha) \leq \varphi_1(\tau) \quad \textit{pour tout } \tau \in \mathrm{E}$$

sont équivalentes.

Il suffit pour le voir de poser $g_2(x) = f_2(x) - \alpha x$, d'appliquer le théorème 4 à $g_2(x)$ et $\mathrm{F}_1(x)$ et de remarquer que si $\varphi_2^*(\tau)$ est la fonction associée à $g_2(x)$ on a

$$\varphi_2^*(\tau) = \overline{\underset{x \geq 0}{\text{borne}}} \left[x\tau - g_2(x) \right] = \overline{\underset{x \geq 0}{\text{borne}}} \left[x(\tau + \alpha) - f_2(x) \right] = \varphi_2(\tau + \alpha).$$

Remarque. — Le théorème 4 et son corollaire restent vrais si l'on remplace les expressions « pour tout $x \geq 0$ » et « pour tout $\tau \in \mathrm{E}$ » respectivement par « pour x assez grand » et « pour tout τ assez grand appartenant à E ». Cela résulte des remarques faites à propos des lemmes 1 et 2 et du théorème 3.

Théorème 5. — *Si* $E_1 \subset E_2$, *on a* $F^f_{E_1}(x) \leq F^f_{E_2}(x)$ *pour tout* $x \geq 0$

$$F^{F^f_{E_2}}_{E_2}(x) \equiv F^f_{E_1}(x) \qquad et \qquad F^{F^f_{E_1}}_{E_1}(x) \equiv F^f_{E_1}(x).$$

Comme $E_1 \subset E_2$, on a

$$\overline{\underset{\tau \in E_1}{\text{borne}}}\,[x\tau - \varphi(\tau)] \leq \overline{\underset{\tau \in E_2}{\text{borne}}}\,[x\tau - \varphi(\tau)] \qquad [\varphi(\tau), \text{ fonction associée à } f],$$

c'est-à-dire

$$F^f_{E_1}(x) \leq F^f_{E_2}(x).$$

$F^f_{E_1}(x)$ appartient à C_{E_1} et *a fortiori* à C_{E_2}; elle est donc, d'après le lemme 2, sa propre régularisée par rapport à E_2.

Si $\varphi^*(\tau) = \underset{x \geq 0}{\text{borne}}\,[x\tau - F^f_{E_1}(x)]$ est la fonction associée à $F^f_{E_1}(x)$, on a d'après le théorème 3, $\varphi^*(\tau) = \varphi(\tau)$ pour tout $\tau \in E_2$ et *a fortiori* pour $\tau \in E_1$. Donc

$$F^f_{E_1} = \overline{\underset{\tau \in E_1}{\text{borne}}}\,[x\tau - \varphi(\tau)] = \overline{\underset{\tau \in E_1}{\text{borne}}}\,[x\tau - \varphi^*(\tau)] = F^{F^f_{E_2}}_{E_1}(x).$$

Cas particulier où E *est l'ensemble de tous les nombres réels.* — La classe C_E est alors l'ensemble des fonctions convexes, $F(x)$ est définie par (1) et $F(x) = \overline{\underset{-\infty < \tau < +\infty}{\text{borne}}}\,[x\tau - \varphi(\tau)]$. C'est le procédé de régularisation convexe d'une fonction, qui est l'un des procédés de régularisation étudiés par M. Mandelbrojt dans [15]. Les théorèmes précédents, appliqués à ce cas particulier, donnent les principales propriétés de la fonction régularisée convexe de $f(x)$; c'est notamment la plus grande des fonctions convexes inférieures ou égales à $f(x)$.

3. Régularisation convexe par rapport à un ensemble E d'une suite de nombres réels. — Soit $\{\alpha_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ une suite S de nombres réels, possédant les propriétés suivantes. On a $\alpha_n > -\infty$; certains α_n peuvent être égaux à $(+\infty)$, mais une infinité d'entre eux (dont α_1) sont finis:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha_n}{n} = +\infty.$$

Définition. — *Considérons la fonction* $f_S(x)$ $(x \geq 0)$ *définie par*

$$f_S(n) = \alpha_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$f_S(x) = +\infty$ *si* x *n'est pas entier positif. Soit* $F^{f_S}_E(x)$ *la fonction régularisée convexe par rapport à* E *de* $f_S(x)$. *On appelle suite régularisée convexe de* $\{\alpha_n\}$ *par rapport à* E *la suite* $\{\alpha^E_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *définie par* $\alpha^E_n = F^{f_S}_E(n)$.

Les hypothèses faites sur la suite S entraînent que $f_S(x) \in \mathfrak{F}$, donc que $F^{f_S}_E(x)$ possède toutes les propriétés précédemment démontrées.

Comme $f_S(1)$ est supposée finie, $F^{f_S}_E(x)$, que nous noterons $F(x)$ pour simplifier, est finie pour $x \geq 1$. Tous les termes de $\{\alpha^E_n\}$ sont donc finis. Comme

$f_s(x)$ n'est pas une fonction quelconque de $\mathcal{F}$, sa fonction associée $\varphi_s(x)$ et sa régularisée convexe par rapport à E, $F(x)$, possèdent des propriétés particulières que nous allons étudier.

A chaque τ correspond au moins un x entier fini tel que $\varphi(\tau) = x\tau - f_s(x)$, la valeur $f_s(x)$ étant naturellement finie. *La suite* $\{n_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *de ces valeurs de* x, *rangées par ordre croissant, sera dite suite principale de* $\{\alpha_n\}$. On a $n_1 = 1$. Cette suite est infinie, car si les n_i étaient bornés supérieurement, $f(x)$ serait infinie pour x assez grand. Soit T_i l'ensemble des τ tels que $\varphi(\tau) = n_i\tau - f(n_i)$. Si τ_i est l'une des valeurs de T_i, T_{i+1}, l'une des valeurs de T_{i-1}, on voit que

$$\tau_i \leq \frac{f(n_{i+1}) - f(n_i)}{n_{i+1} - n_i} \leq \tau_{i-1}.$$

Il en résulte que, pour $i > 1$, T_i est l'intervalle fermé $\left[\frac{f(n_i) - f(n_{i-1})}{n_i - n_{i-1}}, \frac{f(n_{i+1} - f(n_i)}{n_{i+1} - n_i}\right]$, tandis que pour $i = 1$,

$$T_1 = \left(-\infty, \frac{f(n_2) - f(1)}{n_2 - 1}\right].$$

La fonction égale à $f_s(x)$ pour tous les $x = n_i (i = 1, 2, \ldots)$ et linéaire entre deux indices principaux consécutifs, qui est une fonction convexe, est d'ailleurs la régularisée convexe de $f_s(x)$ par rapport à l'ensemble des nombres réels.

Définition. — *La suite* $\{N_i\}$, *rangée en ordre croissant, des indices principaux* n_i *tels que* T_i *contienne au moins un* $\tau \in E$, *sera dite suite principale d'indices, relative à* E, *de* $\{\alpha_n\}$.

Cette suite extraite de $\{n_i\}$ est infinie puisqu'on suppose que E contient des valeurs de τ aussi grandes que l'on veut. L'ensemble des $\tau \in E$ tels que $\varphi(\tau) = N_i\tau - f(N_i)$ est l'ensemble $E_i = E \cap T_i$. D'après ce qui précède, pour $i > 1$, son plus grand élément est t'_i, plus grand élément de E inférieur ou égal à $\frac{f(N_{i+1}) - f(N_i)}{N_{i+1} - N_i}$, et son plus petit élément est t_i, plus petit élément de E supérieur ou égal à $\frac{f(N_i) - f(N_{i-1})}{N_i - N_{i-1}}$.

$\{\alpha_{N_i}\}$ suffit à caractériser $F(x)$. En effet, pour $N_i \leq x \leq N_{i+1}$,

$$\begin{aligned} x\tau - \varphi(\tau) &\leq (x - N_i)\tau + f(N_i) && (\text{si } \tau \in E \text{ et } \tau \leq t'_i), \\ x\tau - \varphi(\tau) &\leq (x - N_{i+1})\tau + f(N_{i+1}) && (\text{si } \tau \in E \text{ et } \tau \geq t_{i+1}). \end{aligned}$$

Il en résulte que l'on a, pour $N_i \leq x \leq N_{i+1}$,

$$F(x) = \max[(x - N_i)t'_i + f(N_i), (x - N_{i+1})t_{i+1} + f(N_{i+1})].$$

En particulier, pour $x = N_i (i = 1, 2, \ldots)$ on a $F(x) = \alpha_{N_i}$.

Interprétation géométrique des résultats précédents. — Dans un plan rapporté aux axes rectangulaires Ox et Oy, considérons les points P_n de coordonnées $(x=n, y=\alpha_n)$. A chaque valeur de τ appartenant à E on fait correspondre la droite D_τ qui est la plus haute droite de pente τ ne laissant au-dessous d'elle aucun point P_n.

La suite des entiers n tels que P_n soit situé sur une droite D_τ au moins est la suite principale d'indices, relative à E, de $\{\alpha_n\}$, définie précédemment.

Théorème 6. — *Soit* $\{N_i\}$ *la suite principale d'indices, relative à* E *de* $\{\alpha_n\}$, t_i' *la plus grande valeur de* E *telle que la droite* $D_{t_i'}$ *passe par* P_{N_i}, t_i *la plus petite valeur de* E *telle que* D_{t_i} *passe par* P_{N_i}. *La suite* $\{\alpha_n^{\mathrm{E}}\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ *est la suite des ordonnées des points* P_n^{E} *d'abscisse n situés sur la ligne polygonale convexe dont les côtés ont pour supports* D_{t_1}, $D_{t_1'}$, D_{t_2}, $D_{t_2'}$, ...

Cette ligne polygonale n'est autre que la courbe $y=\mathrm{F}(x)$ $(x\geq 0)$. C'est la plus haute courbe de C_{E} qui ne laisse au-dessous d'elle aucun point P_n. Pour $x=N_i$, P_{N_i} et $P_{N_i}^{\mathrm{E}}$ sont confondus. Si $E_1\subset E_2$, et si $\{N_i^1\}$, $\{N_i^2\}$, sont les suites principales d'indices d'une même suite $\{\alpha_n\}$ relativement à E_1 et E_2, on a $\{N_i^1\}\subset\{N_i^2\}$. Pour $n=N_i^1$, on a $\alpha_n^{\mathrm{E}_1}=\alpha_n^{\mathrm{E}_2}=\alpha_n$.

Théorème 7. — *Les relations suivantes sont équivalentes :*

$$\varlimsup_{\substack{\tau\to\infty\\ \tau\in\mathrm{E}}}\frac{\varphi(\tau)}{\tau^2}>0,\qquad \varlimsup_{n\to\infty}\frac{\alpha_n^{\mathrm{E}}}{n^2}<+\infty,\qquad \varlimsup_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+1}^{\mathrm{E}}-\alpha_n^{\mathrm{E}}}{n}<+\infty.$$

Si $\varlimsup_{\substack{\tau\to\infty\\ \tau\in\mathrm{E}}}\frac{\varphi(\tau)}{\tau^2}>0$, pour $\tau\geq\tau_0$ et appartenant à E on a $\varphi(\tau)>\mathrm{A}\tau^2$ avec $\mathrm{A}>0$.

Donc, d'après la remarque du lemme 2, pour n assez grand, on a

$$\alpha_n^{\mathrm{E}}\leq\overline{\operatorname{borne}}_{\tau\geq 0}[n\tau-\mathrm{A}\tau^2]=\frac{n^2}{4\mathrm{A}},$$

c'est-à-dire

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\alpha_n^{\mathrm{E}}}{n^2}\leq\frac{1}{4\mathrm{A}}<+\infty.$$

Inversement, si $\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\alpha_n^{\mathrm{E}}}{n^2}<+\infty$, pour $n\geq n_0$ on a

$$\alpha_n^{\mathrm{E}}<\mathrm{A}n^2,\qquad \text{avec}\quad \mathrm{A}>0.$$

D'après le théorème 3 et la remarque qui le suit, on a alors, pour τ assez grand et appartenant à E,

$$\varphi(\tau)\geq\overline{\operatorname{borne}}_{n\geq n_0}[n\tau-\mathrm{A}n^2].$$

Comme la fonction de x, $x\tau-\mathrm{A}x^2$, atteint son maximum $\frac{\tau^2}{4\mathrm{A}}$ pour la valeur

$x = \frac{\tau}{2A}$ qui tend vers $(+\infty)$ avec τ, $\overline{\text{borne}}_{n \geq n_0} [n\tau - An^2]$ est pour τ assez grand un infiniment grand équivalent à $\frac{\tau^2}{4A}$, donc $\overline{\lim}_{\substack{\tau \in E \\ \tau \to \infty}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2} > 0$. Les deux premières relations sont donc équivalentes,

Montrons l'équivalence de la première et de la troisième.

Soit $\psi(\tau) = \overline{\text{borne}}_{x \geq 0} [x\tau - F(x)]$. D'après le théorème 3, $\psi(\tau) = \varphi(\tau)$ pour $\tau \in E$. Si $\tau_1 \in E$ et $\tau_2 \in E$ et s'il n'y a aucune valeur de E, dans l'intervalle (τ_1, τ_2), $\psi(\tau)$ est linéaire pour $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$. Il en résulte

$$(a) \qquad \overline{\lim}_{\substack{\tau \in E \\ \tau \to \infty}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2} = \overline{\lim}_{\tau \to \infty} \frac{\psi(\tau)}{\tau^2}.$$

Soit $\mu(\tau)$ la dérivée à droite de $\psi(\tau)$. D'après le théorème 6, entre deux indices principaux relatifs à E consécutifs, N_i et N_{i+1}, la courbe $y = F(x)$ se compose de deux segments rectilignes, issus de P_{N_i} et $P_{N_{i+1}}$, de pentes t_i' et t_{i+1}, qui ont pour extrémité commune un point d'abscisse X_i.

Entre $\tau = t_i'$ et $\tau = t_{i+1}$, la fonction $\psi(\tau)$ est linéaire et admet pour dérivée X_i. Le minimum de $\frac{\mu(\tau)}{\tau}$ dans l'intervalle $[t_i', t_{i+1}]$ est donc $\frac{X_i}{t_{i+1}}$. D'autre part, comme $(\alpha_{n+1}^E - \alpha_n^E)$ reste égal à t_{i+1} dans l'intervalle $[X_i, X_{i+1})$, le maximum de $\frac{\alpha_{n+1}^E - \alpha_n^E}{n}$ dans l'intervalle $[X_i] \leq n < X_{i+1}$, atteint pour $n = [X_i]$ ou $n = [X_i] + 1$, a une valeur dont le rapport avec $\frac{t_{i+1}}{X_i}$ tend vers 1 quand $i \to \infty$. Donc

$$(b) \qquad \overline{\lim}_{n \to \infty} \frac{\alpha_{n+1}^E - \alpha_n^E}{n} = \overline{\lim}_{\tau \to \infty} \frac{\tau}{\mu(\tau)}.$$

Mais comme $\psi(\tau) = \psi(0) + \int_0^\tau \mu(u)\,du$ et que $\mu(u)$ est non décroissante,

$$\psi(0) + \tau\mu(\tau) \geq \psi(\tau) \geq \psi(0) + \frac{\tau}{2}\mu\left(\frac{\tau}{2}\right),$$

d'où

$$(c) \qquad \overline{\lim}_{\tau \to \infty} \frac{\mu(\tau)}{\tau} \geq \overline{\lim}_{\tau \to \infty} \frac{\psi(\tau)}{\tau^2} \geq \frac{1}{4} \overline{\lim}_{\tau \to \infty} \frac{\mu(\tau)}{\tau}.$$

Les relations (a), (c) montrent l'équivalence de

$$\overline{\lim}_{\substack{\tau \in E \\ \tau \to \infty}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2} > 0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim}_{n \to \infty} \frac{\alpha_{n+1}^E - \alpha_n^E}{n} < \infty,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

4. Régularisation convexe d'une suite de nombres, par l'intermédiaire des logarithmes, par rapport à un ensemble de nombres positifs. — Soit $\{M_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ une suite de nombres réels positifs tels que, si l'on pose $\alpha_n = \log M_n$, $\{\alpha_n\}$ vérifie les hypothèses du n° 1.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de nombres positifs r contenant des valeurs r aussi grandes que l'on veut, et contenant toutes ses valeurs limites finies. On appellera E l'ensemble des nombres $\tau = \log r$.

Définition. — *On appelle suite régularisée convexe de* $\{M_n\}$, *par l'intermédiaire des logarithmes, relativement à l'ensemble* $\mathcal{E}$, la suite $\{M_n^E\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *où* $M_n^E = \exp \alpha_n^E$, $\{\alpha_n^E\}$ *étant la suite régularisée convexe par rapport à l'ensemble* E *de* $\{\alpha_n\}$, *où* $\alpha_n = \log M_n$.

Tous les théorèmes précédents sont applicables et peuvent être transcrits.

En particulier, si $T(r) = \overline{\text{borne}}_{n \geq 1} \frac{r^n}{M_n}$ $(r \geq 0)$ on a

$$M_n^E = \overline{\text{borne}}_{r \in \mathcal{E}} \frac{r^n}{T(r)}.$$

La fonction $\varphi(\tau)$ associée à $\{\alpha_n\}$ est $\varphi(\tau) = \log T(e^\tau)$.

Théorème 3'. — *Pour* $r \in \mathcal{E}$ *on a*

$$T(r) = \overline{\text{borne}}_{n \geq 1} \frac{r^n}{M_n^E}.$$

Théorème 4'. — *Si l'on considère deux suites* $\{M_n\}$ *et* $\{M'_n\}$ *et les fonctions correspondantes*

$$T(r) = \overline{\text{borne}}_{n \geq 1} \frac{r^n}{M_n}, \qquad T'(r) = \overline{\text{borne}}_{n \geq 1} \frac{r^n}{M'_n},$$

les trois relations

$$M'_n \geq M_n^E \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$
$$M_n'^E \geq M_n^E \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$
$$T'(r) \leq T(r) \quad \text{pour tout } r \in \mathcal{E}$$

sont deux à deux équivalentes.

Corollaire. — *Si* q *est une constante positive quelconque, les relations*

$$q^n M'_n \geq M_n^E \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$
$$q^n M_n'^E \geq M_n^E \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$
$$T'\left(\frac{r}{q}\right) \leq T(r) \quad \text{pour tout } r \in \mathcal{E}$$

sont deux à deux équivalentes.

Le théorème 4' et son corollaire restent vrais si l'on remplace « pour tout $n \geq 1$ » et « pour tout $r \in \mathcal{E}$ » par « pour n assez grand » et « pour r assez grand et appartenant à $\mathcal{E}$ ».

Application. — *Soit* $\{M_n\}$ *une suite de nombres positifs tels que* $\lim_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} = +\infty$ *et soit* $T(r)$ *la fonction associée. Les deux relations suivantes sont équivalentes :*

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\in E}} \frac{\log T(r)}{r} > 0, \qquad (M_n^E)^{\frac{1}{n}} = O(n) \qquad (n\to\infty).$$

En effet, si dans le corollaire précédent on prend

$$M_n = n!, \qquad T'(r) = \max_{n\geq 1} \frac{r^n}{n!} = \frac{r^{[r]}}{[r]!},$$

où $[r]$ est la partie entière de r.

D'après la formule de Stirling, on a donc

$$e^{1-\varepsilon(r)}r \leq T'(r) \leq e^r, \qquad \text{avec} \quad \lim_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0.$$

Si la première condition est vérifiée, il existe une constante μ telle que $T(r) > e^{\mu r} > T'(\mu r)$ pour r assez grand et appartenant à E, d'où d'après le corollaire, $M_n^E \leq n!\,\mu^{-n}$ pour n assez grand, c'est-à-dire

$$(M_n^E)^{\frac{1}{n}} = O(n) \qquad (n\to\infty).$$

Inversement, si la seconde condition est vérifiée, il existe une constante q telle que pour n assez grand $M_n^E \leq q^n n!$. Donc, d'après le corollaire, pour r assez grand et appartenant à E, on a

$$T(r) \geq T'\left(\frac{r}{q}\right) \geq e^{\frac{r}{q}[1-\varepsilon(r)]}, \qquad \text{avec} \quad \lim_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0.$$

Il existe, par conséquent, une constante positive μ telle que $T(r) \geq e^{\mu r}$ pour r assez grand et appartenant à E.

II. — Régularisation des classes $C^E\{M_n\}$.

Soit $\mathfrak{E}$ un ensemble donné quelconque de nombres réels, E l'ensemble des valeurs absolues des éléments de E, et $\overline{E}$ la fermeture de E.

Soit $\{M_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ une suite de nombres positifs M_n dont une infinité, y compris M_1, sont supposés finis. *Une telle suite sera dite suite* (S).

1. Définition et lemmes préliminaires. — La propriété énoncée au lemme 3 est due à M. J. Favard [6].

Définition. — *On appelle classe* $C^E\{M_n\}$ *l'ensemble des fonctions* $f(x)$, *à valeurs réelles ou complexes, de la variable réelle* x, *qui sont presque périodiques au sens de Bohr, indéfiniment dérivables, dont le spectre est contenu dans* $\mathfrak{E}$, *et dont les*

dérivées successives vérifient les inégalités

$$(A) \qquad |f^{n}(x)| \leq C^{n} M_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

où C *est une constante positive ne dépendant que de* $f(x)$.

Une classe $C^{\{}M_n\}$ sera dite contenue dans $C^{\{}M'_n\}$ si toute fonction de $C^{\{}M_n\}$ appartient à $C^{\{}M'_n\}$. Deux classes seront dites équivalentes si chacune est contenue dans l'autre.

LEMME 1. — *Soit* $f(x)$ *une fonction presque périodique indéfiniment dérivable dont toutes les dérivées sont bornées*

$$f(x) \sim \Sigma a_n e^{i\lambda_n x}, \qquad m_n = \overline{\text{borne}}_{-\infty<x<\infty} |f^{(n)}(x)| < \infty \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Les coefficients de Fourier de $f(x)$ *vérifient*

$$(1) \qquad |a_n| \leq T^{-1}(|\lambda_n|), \qquad T(r) = \overline{\text{borne}}_{n\geq 1} r^n m_n^{-1} \qquad (r \geq 0, n = 1, 2, \ldots).$$

Toutes les dérivées de $f(x)$ *sont presque périodiques et leur série de Fourier se déduit de celle de* $f(x)$ *par dérivations formelles.*

En effet, on sait que

$$a_n = \lim_{T\to+\infty} T^{-1} \int_0^T f(x) e^{-i\lambda_n x} dx,$$

$f(x)$ étant bornée sur la droite entière, des intégrations par parties, suivies de passages à la limite pour $T \to \infty$, conduisent à

$$a_n (i\lambda_n)^p = \lim_{T\to\infty} T^{-1} \int_0^T f^{(p)}(x) e^{-i\lambda_n x} dx.$$

Les dérivées de $f(x)$, étant uniformément continues, sont presque périodiques, la formule précédente montre que leur série de Fourier se déduit de celle de $f(x)$ par dérivation formelle, et que $|a_n| \leq m_p |\lambda_n|^{-p} (p \geq 1)$, c'est-à-dire que (1) a lieu.

Nous utiliserons plus loin la propriété suivante.

LEMME 2. — *Si la fonction presque périodique au sens de Bohr*

$$f(x) \sim \Sigma a_n e^{-i\lambda_n x}$$

est telle que $|\lambda_n| \leq R < \infty$, $f(x)$ *a toutes ses dérivées presque périodiques; leur développement en série de Fourier se déduit de celui de* $f(x)$ *par dérivations formelles, elles vérifient*

$$|f^{(p)}(x)| \leq M R^p, \qquad M = \overline{\text{borne}}_{-\infty<x<\infty} |f(x)| \qquad (p \geq 1).$$

Il suffit de démontrer ce lemme pour $p = 1$. Or il existe une suite de poly-

nomes presque périodiques $P_n(x)$, d'exposants pris parmi les λ_m, convergeant vers $f(x)$ uniformément sur $(-\infty, \infty)$, c'est-à-dire tels que

$$|P_{n_1}(x) - P_{n_2}(x)| < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad n_1 > n_2 > N(\varepsilon).$$

On sait qu'alors, pour $n_1 > n_2 > N(\varepsilon)$,

$$|P'_{n_1}(x) - P'_{n_2}(x)| < R\varepsilon, \qquad |P'_n(x)| \leq R\,\overline{\text{borne}}\ |P_n(x)|.$$

Ces inégalités montrent d'une part que les polynomes $P_n(x)$ convergent uniformément vers une fonction qui est donc la dérivée $f'(x)$ et est presque périodique. La dernière inegalité, par un passage à la limite pour $n \to \infty$, prouve que $|f'(x)| \leq MR$.

LEMME 3. — *Si $f(x)$ est une fonction presque périodique continue à valeur moyenne nulle et telle que ses exposants de Fourier λ_m vérifient $|\lambda_m| \geq R > 0$, $f(x)$ admet une intégrale d'ordre entier quelconque p, soit $f^{-p}(x)$, presque périodique, dont le développement de Fourier s'obtient à partir de celui de $f(x)$ par p intégrations formelles, et telle que*

$$f^{-p}(x) \leq \alpha MR^{-p}, \qquad M = \overline{\text{borne}}\ |f(x)|.$$

LEMME 4 (*). — *Soit $\varphi_\alpha(\lambda)$ la fonction continue de la variable réelle λ, égale à 1 pour $|\lambda| \leq \alpha$, à 0 pour $|\lambda| \geq 2\alpha$, linéaire entre α et 2α. $f(x)$ étant presque périodique, soit*

$$k_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\varphi_\alpha(\lambda)\,d\lambda, \qquad f_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,k_\alpha(t)\,dt,$$

$$f'_\alpha(x) = f(x) - f_\alpha(x), \qquad M = \overline{\text{borne}}\ |f(x)|.$$

$f_\alpha(x)$ et $f'_\alpha(x)$ sont presque périodiques et vérifient

$$|f_\alpha(x)| \leq \tfrac{1}{4}M, \qquad |f'_\alpha(x)| \leq \tfrac{1}{4}M.$$

Leurs exposants de Fourier appartiennent à ceux de $f(x)$; si, pour $f(x)$, a_n est le coefficient de l'exposant λ_n, λ_n a pour coefficients, dans les développements de Fourier respectifs de $f_\alpha(x)$ et $f'_\alpha(x)$,

$$\varphi_\alpha(\lambda_n)a_n \quad \text{et} \quad [1 - \varphi_\alpha(\lambda_n)]a_n.$$

On voit aisément que

$$k_\alpha(t) = 2(\pi\alpha t^2)^{-1}\sin\frac{\alpha t}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}t,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |k_\alpha(t)|\,dt \leq 4\sqrt{3}\pi^{-1}. \tag{a}$$

En raison de (a) et du fait qu'il existe une suite de polynomes exponentiels

(*) Ce procédé de décomposition d'une fonction $f(x)$ a été employé par T. Bang [2].

$P_n(x)$ convergeant uniformément vers $f(x)$ sur la droite entière, $f_\alpha(x)$ est aussi limite uniforme sur la droite entière des polynomes $(P_n)_\alpha$, et est par conséquent presque périodique. Les inégalités concernant $|f_\alpha|$ et $|f_\alpha^*|$ résultent de (a). (a) permet enfin d'obtenir, en intervertissant l'ordre des sommations,

$$T^{-1}\int_0^T f_\alpha(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} k_\alpha(t)\,e^{-it\lambda}\int_t^{T-t} T^{-1}\,e^{-i\lambda x} f(x)\,dx\,dt.$$

Comme la dernière intégrale écrite tend, uniformément par rapport à t, quand $T\to\infty$, vers a_λ ou o selon que λ appartient ou non au spectre de $f(x)$, le second membre tend, pour $T\to\infty$, vers $a_\lambda x_\alpha(\lambda)$ ou o, ce qui prouve la dernière assertion du lemme.

Remarque. — Le spectre de $f_\alpha(x)$ [resp. $f_\alpha^*(x)$] appartient à $[-2\alpha, 2\alpha]$ (resp. est extérieur à $[-\alpha, \alpha]$). On peut donc appliquer les lemmes 2 et 3 respectivement à f_α et f_α^*. Enfin, d'après la définition de $f_\alpha(x)$, si $f(x)$ admet une dérivée presque périodique, il en est de même de $f_\alpha(x)$ et $[f'(x)]_\alpha = [f_\alpha(x)]'$.

2. Régularisation des classes $C^E\{M_n\}$. — Nous allons montrer que, si $\{M_n\}$ est une suite (S_α), $C^E\{M_n\}$ et $C^E\{M_n^E\}$ sont équivalentes, et que $\{M_n^E\}$ caractérise « le mieux » la classe en question, en ce sens que, si $\{A_n\}$ est telle que $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_p^{\frac{1}{n}}(M_n^E)^{-\frac{1}{n}} = o$, il existe une fonction de $C^E\{M_n\}$ n'appartenant pas à $C^E\{A_n\}$.

Rappelons que toutes les suites $\{M_n\}$ définissant des classes $C^E\{M_n\}$ que nous considérerons seront supposées être des suites (S).

Théorème 1. — *Soit* $\{M_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *une suite* (S) *donnée. Si* $\lim_{n\to\infty} M_p^{\frac{1}{n}} = o$, $C^E\{M_n\}$, *identique à* $C^E\{o\}$, *ne comprend que les fonctions constantes.*

Si $o < \overline{\lim_{n\to\infty}} M_p^{\frac{1}{n}} < \infty$, $C^E\{M_n\}$, *identique à* $C^E\{1\}$, *est constituée par l'ensemble des fonctions presque périodiques* $f(x)$ *dont le spectre est contenu dans* $\mathcal{E}\cap[-R_f, R_f]$, R_f *étant un nombre fini quelconque, dépendant de* f. *Si* $\lim_{n\to\infty} m_n^{\frac{1}{n}} = +\infty$, $C^E\{M_n\}$ *et* $C^E\{M_n^E\}$ *sont équivalentes.*

Soit $f(x)\sim\Sigma a_n e^{i\lambda_n x}$ une fonction appartenant à $C^E\{M_n\}$. D'après le lemme 1, $|a_n|\leq M_p|\lambda_n|^{-p}$, pour tout $p\geq 1$. Si $\lim_{p\to\infty} M_p^{\frac{1}{p}} = o$, on en déduit que $a_n = o$ si $\lambda_n \neq o$, donc que $f(x)$ est une constante. La classe $C^E\{M_n\}$, constituée par les fonctions constantes, est alors identique à $C^E\{o\}$. Si $o < \overline{\lim_{n\to\infty}} M_n^{\frac{1}{n}} < \infty$, on a $A^n < M_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, A étant une constante positive indépendante de n, et le lemme 1 montre que $a_n = o$ pour $|\lambda_n| > R_f$, R_f ne dépendant que de f.

Chaque fonction de $C^E\{M_n\}$ a donc son spectre contenu dans un segment fini et les classes $C^E\{M_n\}$ et $C^E\{1\}$ sont équivalentes. Inversement, si $f(x)$ est une fonction presque périodique dont le spectre est contenu dans $\mathcal{E}\cap[-R, R]$, R nombre fini, le lemme 2 montre qu'elle appartient à $C^E\{1\}$.

Soit $f(x)$ une fonction presque périodique indéfiniment dérivable telle que $|f(x)|\leq M_0 |f^{(n)}(x)|\leq M_n$. Soit α un nombre positif qu'on fixera plus loin, $f_\alpha(x)$ et $f_\alpha^*(x)$ les fonctions que l'on associe à $f(x)$ selon les définitions du lemme 4. D'après les lemmes 2, 3, 4, on a

$$(a)\qquad |f^{(p)}(x)|\leq |f_\alpha^{(p)}(x)|+|f_\alpha^{*(p)}(x)|\leq 4M_0(2\alpha)^p+8M_n\alpha^{p-n}\qquad (1\leq p\leq n).$$

Si l'on choisit $\alpha=M_nM_0^{-1}$, on en déduit

$$(b)\qquad |f^{(p)}(x)|^n\leq (8.2^p)^n M_0^{n-p}M_n^p.$$

Soit λ (resp. λ') la borne supérieure (resp. inférieure) des éléments de E inférieurs (resp. supérieurs) ou égaux à $(M_nM_0^{-1})^{\frac{1}{n}}$.

Si $\lambda'>2\lambda$, on peut choisir α tel que $\lambda<\alpha<2\alpha<\lambda'$, appliquer le lemme 2 à $f_\alpha(x)$ avec $R=\lambda$, le lemme 3 à $f_\alpha^*(x)$ avec $R=\lambda'$.

Si $\lambda'\leq 2\lambda$, on peut utiliser simplement (b). Dans les deux cas,

$$(c)\qquad |f^{(p)}(x)|\leq 8.4^p\max(M_0\lambda^p, M_n\lambda'^{p-n})\qquad (1\leq p\leq n).$$

Si $f(x)\in C^E\{M_n\}$, soient N_i et N_{i+1} deux indices consécutifs de la suite principale d'indices, relative à E, de $\{M_n\}$ [supposée suite (S_∞)]. $f^{(N_i)}(x)$ vérifiant les inégalités (A) pour $n=N_i$ et $n=N_{i+1}$, on peut lui appliquer (c), d'où, tenant compte du théorème 6 (§ 1)

$$|f^{(n)}(x)|\leq 8(4C)^n M_n^E\qquad (N_i<n<N_{i+1}).$$

Ces inégalités, vraies pour tout i, montrent que

$$C^E\{M_n\}\subset C^E\{M_n^E\}.$$

L'inclusion opposée étant évidente, ces classes sont équivalentes.

Cas particulier. — Dans le cas où E est l'ensemble des entiers positifs, $C^E\{M_n\}$ est l'ensemble $C\{M_n\}$ des fonctions périodiques de période 2π, indéfiniment dérivables, $f(x)$, telles que

$$|f^{(n)}(x)|\leq C^n M_n\qquad (n=1, 2, \ldots).$$

$\{M_n^c\}$ étant la suite régularisée convexe de $\{M_n\}$, le théorème ci-dessus et l'inégalité $M_n^E\leq M_n^c$ montre l'équivalence de $C\{M_n\}$ et $C\{M_n^c\}$, qui résulte d'ailleurs directement de (b), sans l'intermédiaire de $\{M_n^E\}$. On retrouve ainsi par une autre voie un résultat de M. Mandelbrojt (*voir* [17]).

Théorème 2. — $\{M_n\}$ *étant une suite* (S_∞) *il existe une fonction* $F(x)$ *appar-*

tenant à $C^E\{M_n\}$ *et telle que*

$$\frac{1}{l}\,{}^{n}M_n^E \leq m_n = \overline{\text{borne}}_{x<x'<x} \left| F^{(n)}(x) \right| \leq l^n M_n^E \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

D'après le théorème 6 (§ 1), les points $P_n^E(n, \log M_n^E)$ sont sur une ligne polygonale convexe dont les côtés ont des pentes t_i, t'_i $(i = 1, 2, \ldots)$ telles que e^{t_i} et $e^{t'_i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ appartiennent à E.

Soient λ_i, λ'_i $(i = 1, 2, \ldots)$ des éléments de E assez proches de e^{t_i}, $e^{t'_i}$ $(i = 1, 2 \ldots)$, tels que par exemple $e^{t_i} \leq 2\lambda_i \leq 4\,e^{t_i}$, ...

Considérons la fonction

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left[T^{-1}(e^{t_n}) \cos\left(\lambda_n x + \frac{\pi}{4}\right) + T^{-1}(e^{t'_n}) \cos\left(\lambda'_n x + \frac{\pi}{4}\right) \right].$$

L'inégalité $e^{t_n/n} \leq M_k^E T(e^{t_n})$ et le théorème 6 (§ 1) montrent que $F(x) \in C^E\{M_n\}$. D'autre part

$$(-1)^k F^{(k)}(0) > \frac{1}{l}{}^{k} M_k^E \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

$F(x)$, qui a donc les propriétés énoncées dans le théorème, sera dite « fonction caractéristique » de $C^E\{M_n\}$. Des théorèmes 1 et 2 résulte le théorème suivant :

Théorème 3. — *Quelle que soit la suite* $\{A_n\}$ *telle que* $\lim_{n\to\infty} A_n^{\frac{1}{n}} (M_n^E)^{\frac{1}{n}} = 0$, *il existe une fonction appartenant à* $C^E\{M_n\}$ *mais non à* $C^E\{A_n\}$.

Théorème 4. — *Soient* $\{M_n\}$ *et* $\{M'_n\}$ *deux suites* (S).

Si $\lim_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} M'^{\frac{1}{n}}_n = 0$, *les classes* $C^E\{M_n\}$ *et* $C^E\{M'_n\}$, *identiques, ne contiennent que les fonctions constantes. Si* $0 < \lim_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} < \infty$ *et* $0 < \lim_{n\to\infty} M'^{\frac{1}{n}}_n < \infty$, $C^E\{M_n\}$ *et* $C^E\{M'_n\}$, *identiques à* $C^E(1)$, *sont constituées par les fonctions presque périodiques dont le spectre est contenu dans* E *et aussi dans un segment fini, pouvant varier avec chaque fonction. Si* $\lim_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} = \infty$, *il faut et suffit, pour que* $C^E\{M_n\} \subset C^E\{M'_n\}$, *que l'une des conditions équivalentes suivantes soit satisfaite :*

$$(M_n^E)^{\frac{1}{n}} = O\left[(M'_n)^{\frac{1}{n}}\right] \qquad (n \to \infty),$$

$$(M)^{\frac{1}{n}} = O\left[(M_n^E)^{\frac{1}{n}}\right] \qquad (n \to \infty),$$

$$T'(\alpha r) \leq T(r) \quad \textit{pour tout } r \in E,$$

α étant une constante positive, avec

$$T(r) = \overline{\text{borne}}_{n\geq 1}\, r^n M_n^{-1}, \qquad T'(r) = \overline{\text{borne}}_{n\geq 1}\, r^n M'^{-1}_n.$$

Les deux premiers points résultent du théorème 1. Dans le troisième cas, la condition indiquée (le corollaire du théorème 1', § 1, en donne trois formes équivalentes) est suffisante d'après le théorème 1, nécessaire d'après le théorème 2 [on le voit en écrivant que $F(x)$, fonction caractéristique de $C^E\{M_n\}$, appartient à $C^E\{M'_n\}$].

Remarque. — Pour que $C^E\{M_n\} \subset C^E\{M'_n\}$, il faut et il suffit que $F(x) \in C^E\{M'_n\}$, ce qui justifie son nom de fonction caractéristique de $C^E\{M_n\}$.

3. Applications :

Théorème 5. — *Pour que chaque fonction $f(x)$ de $C^E\{M_n\}$ soit prolongeable en une fonction holomorphe et bornée dans une bande $|y| < h_f$, h_f pouvant dépendre de f, il faut et il suffit qu'une des conditions suivantes soit satisfaite* :

$$a. \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} M_n^{\frac{1}{n}} < \infty :$$

$$b. \quad \lim_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} = \infty \qquad \text{et} \qquad (M_n^E)^{\frac{1}{n}} = O(n) \qquad (n \to \infty).$$

On peut voir d'abord que, pour que $C^E\{M_n\}$ ait la propriété voulue, il faut et il suffit que $C^E\{M_n\} \subset C^E\{n!\}$. Car si $f(s)$ $(s = x + iy)$, égale à $f(x)$ sur l'axe réel, est holomorphe et bornée dans $|y| < h$, la formule de Cauchy donne successivement, en appelant C_x le cercle de centre x et de rayon $\frac{1}{2}h$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_x} \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}, \qquad |f^{(n)}(x)| \leq M 2^n h^{-n} n!, \qquad \text{avec} \quad M = \overline{\text{borne}}_{|y|<h} |f(z)|.$$

Inversement, si $|f^{(n)}(x)| < k^n n!$, x_0 et x étant réels, le développement de Taylor de $f(x)$ autour de x_0 donne, avec $x' \in (x_0, x)$,

$$f(x) = P_{n-1}(x - x_0) + R_n(x), \qquad R_n(x) = |x - x_0|^n (n!)^{-1} |f^{(n)}(x')| \leq (k|x - x_0|)^n,$$

ce qui montre que la série de Taylor de $f(x)$ autour de x_0, qui converge vers $f(x)$ pour $k|x - x_0| \leq p < 1$, définit une fonction analytique bornée dans une certaine bande $|y| < h$.

Le théorème 4 donne alors la condition de l'énoncé, l'application qui suit le théorème 1' (§ 1) en donne d'ailleurs une autre forme équivalente.

Définition. — $C^E\{M_n\}$ *est dite dérivable si*

$$f(x) \in C^E\{M_n\} \qquad \text{entraîne} \quad f'(x) \in C^E\{M_n\}.$$

Alors on a aussi

$$f^{(p)}(x) \in C^E\{M_n\} \qquad (p \geq 1).$$

Théorème 6. — *Si* $\lim_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} = \infty$, *il faut et il suffit, pour que* $C^E\{M_n\}$ *soit dérivable,*

qu'une des conditions équivalentes suivantes soit satisfaite :

$$(M^E_{n-1})^{\frac{1}{n}} = O\left(M_n^{\frac{1}{n}}\right) \quad (n \to \infty), \qquad (M^E_{n-1})^{\frac{1}{n}} = O\left[(M^E_n)^{\frac{1}{n}}\right] \quad (n \to \infty),$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log M^E_n}{n^2} < \infty, \qquad \lim_{\substack{r \to \infty \\ r \in E}} \frac{\log T(r)}{(\log r)^2} > 0.$$

D'après le théorème 7 (§ 1), chacune de ces conditions équivaut à $C^E\{M_{n-1}\} \subset C^E\{M_n\}$, condition suffisante de dérivabilité, car $f(x) \in C^E\{M_n\}$ entraîne $f'(x) \in C^E\{M_{n-1}\}$. On voit que cette condition est nécessaire en considérant $F(x)$, fonction caractéristique de $C^1\{M_n\}$: $F'(x)$, qui est fonction caractéristique de $C^E\{M_{n-1}\}$, doit appartenir à $C^E\{M_n\}$, d'où résulte la nécessité de la condition exprimée sous sa première forme.

Définition. — $C^1\{M_n\}$ *sera dite quasi analytique* D *si toute fonction de cette classe est identiquement nulle dès qu'en un point elle est nulle ainsi que toutes ses dérivées.*

La régularisation des classes $C^E\{M_n\}$ permet, à partir de résultats connus sur la quasi-analyticité de certaines classes de fonctions, d'obtenir de nouvelles conditions suffisantes de quasi-analyticité pour les classes $C^E\{M_n\}$.

Si $\lim_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} = \infty$, on sait par exemple (*voir* [18], p. 102 ; c'est la forme donnée par M. Mandelbrojt au théorème de Denjoy-Carleman) que, pour que $C_R\{M_n\}$ soit quasi analytique, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^*}{M_{n+1}^*} = \infty,$$

$\{M_n^*\}$ étant la suite régularisée convexe de $\{M_n\}$.

Théorème 7. — *Si* $\lim_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} = \infty$, *il suffit, pour que* $C^E\{M_n\}$ *soit quasi analytique* D, *que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^E}{M_{n+1}^E} = \infty.$$

Cette condition exprime en effet la quasi-analyticité de $C_R\{M_n^E\}$. Elle est, pour les classes $C^E\{M_n\}$, meilleure que la condition de Denjoy-Carleman proprement dite. Car on voit facilement par exemple que, $C_R\{M_n\}$ étant une classe non quasi analytique quelconque, il suffit de choisir pour E une suite de λ_i assez espacés pour que $C_R\{M_n^E\}$ soit quasi analytique.

Dans sa thèse [9], M. J. P. Kahane a démontré divers théorèmes sur la quasi-analyticité de classes $C^E\{M_n\}$ et de classes analogues (*voir* sa thèse [9], p. 25 à 47). Il a surtout recours à deux méthodes. L'une est basée sur la consi-

dération des transformées de Fourier-Carleman. L'autre, qui est essentiellement celle de M. Mandelbrojt dans [14], a été utilisée dans une Note publiée par M. J. P. Kahane et moi-même [10]. Dans le cas particulier où $\mathcal{E}$ est une suite de nombres réels λ_j symétrique ($\lambda_{2j} = -\lambda_{2j-1}$) telle que la suite $|\lambda_{2j}| j^{-1+\varepsilon}$ soit croissante pour un $\varepsilon > 0$, M. J. P. Kahane a même trouvé une condition nécessaire et suffisante pour que $C^E\{M_n\}$ soit quasi analytique D :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{M_n}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}} \right|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Nous reviendrons à la fin du paragraphe III sur deux autres critères de quasi-analyticité démontrés dans sa thèse.

III. — Régularisation des classes $K^E\{M_n\}$.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble donné quelconque de nombres réels, E l'ensemble des valeurs absolues des éléments de $\mathcal{E}$, $\bar{E}$ la fermeture de E. Soit $\{M_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) une suite (S).

Définition. — *Désignons par* $K^E\{M_n\}$ *l'ensemble des fonctions* $f(x)$ *à valeurs réelles ou complexes, de la variable réelle* x, *qui sont presque périodiques au sens de Bohr, indéfiniment dérivables, dont le spectre est contenu dans* $\mathcal{E}$, *et dont les dérivées successives vérifient les inégalités*

$$|f^{(n)}(x)| \leq k M_n \qquad (n = 1, 2, \dots),$$

où k *est une constante ne dépendant que de* $f(x)$.

La régularisation de ces classes de fonctions peut aussi s'effectuer au moyen de la suite $\{M_n^E\}$. Pour le démontrer, nous utiliserons deux théorèmes, le premier dû à Kolmogoroff [11], le second à J. Favard [7] [nous l'appellerons théorème (F)].

Inégalité de Kolmogoroff. — *Soit* $f(x)$ *une fonction* n *fois dérivable sur* $(-\infty, \infty)$. *Posons*

$$M_k = \overline{\text{borne}}_x |f^{(k)}(x)| \qquad (0 \leq k \leq n)$$

et supposons que $M_0 < \infty$, $M_n < \infty$.
On a

$$M_k \leq M_n^{1-\frac{k}{n}} M_0^{\frac{k}{n}} \frac{t_{n-k}}{t_1^{1-\frac{k}{n}}} \qquad (0 \leq k \leq n),$$

où

$$t_h = \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p(h+1)}}{(2p+1)^{h+1}} \qquad (h \geq 0).$$

En fait, nous emploierons la conséquence un peu moins précise suivante :

$$M_k \leq 2 M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}.$$

THÉORÈME (F). — *Soit $f(x)$ une fonction de période 2π, admettant une dérivée d'ordre n, $f^{(n)}(x)$, sommable et bornée en module par M_n.*

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Si m est un entier positif quelconque, on peut approcher $f(x)$ par un polynome trigonométrique

$$P_{m-1}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m-1} \gamma_k^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

où les coefficients γ_k^m sont indépendants de f, tel que

$$|f(x) - P_{m-1}(x)| \leq t_n m^{-n} M_n,$$

t_n ayant même signification que dans l'inégalité de Kolmogoroff

LEMME 1. — *Étant données $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, suite croissante infinie d'entiers positifs, et une fonction $f(x)$ périodique, de période 2π, admettant une dérivée d'ordre r sommable et bornée, telle que*

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x), \qquad |f(x)| \leq M_0, \qquad |f^{(r)}(x)| \leq M_r,$$

on a, n_λ étant le plus grand exposant de f inférieur ou égal à $(M_r M_0^{-1})^{\frac{1}{r}}$

(1) $$|f^{(p)}(x)| \leq 16 \max(M_0 n_\lambda^p, \quad M_r n_{\lambda-1}^{p-r}) \qquad (0 < p < r).$$

Posons

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$f_1(x)$ étant le polynome $P_{m-1}(x)$ associé à f dans le théorème (F), avec $m = n_{\lambda+1}$. D'après le théorème (F),

(a) $$|f_2(x)| \leq 2 M_r n_{\lambda+1}^{-r}.$$

Comme le second membre est inférieur à $2M_0$, il en résulte

$$|f_1(x)| \leq 3 M_0,$$

puis, $f_1(x)$ étant un polynome trigonométrique d'ordre n_λ,

(α) $$|f_1^{(p)}(x)| \leq 3 M_0 n_\lambda^p, \qquad |f_1^{(r)}(x)| \leq 3 M_0 n_\lambda^r \leq 3 M_r \qquad (0 < p < r),$$

d'où

(b) $$|f_2^{(p)}(x)| \leq 4 M_r.$$

L'inégalité de Kolmogoroff appliquée à $f_2(x)$ moyennant (a) et (b), donne

$$|f_2^{(p)}(x)| \leq 8 M_r n_j^{p-r},$$

ce qui, joint à (α), prouve (1).

Lemme 2. — *Soit un polynome presque périodique*

$$P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos \lambda_k x + b_k \sin \lambda_k x)$$

d'exposants λ_k rangés en ordre croissant. Si

$$M_0 = \overline{\text{borne}}\, |P(x)|, \qquad M_r = \overline{\text{borne}}\, |P^{(r)}(x)|$$

et si λ_j est le plus grand exposant de P *inférieur ou égal à* $(M_r M_0^{-1})^{\frac{1}{r}}$, *on a pour* $0 < p < r$

(2) $$|P^{(p)}(x)| \leq 16 \max(M_0 \lambda_j^p, M_r \lambda_{j+1}^{p-r}).$$

On peut passer du lemme 1 au lemme 2 par une méthode utilisée par M. Favard dans [6]. Soit ν un entier positif, $\frac{n_k^{\nu}}{\nu}$ la valeur approchée par défaut à $\frac{1}{\nu}$ près de λ_k. Considérons

$$P_\nu(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos \frac{n_k^\nu}{\nu} x + b_k \sin \frac{n_k^\nu}{\nu} x \right).$$

$\varepsilon > 0$ quelconque étant donné, il existe, comme l'a montré M. Favard dans [6], une suite infinie d'entiers ν tels que

$$|P^{(p)}(x) - P_\nu^{(p)}(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{pour} \quad -\nu\pi \leq x \leq \nu\pi.$$

Prenant ν assez grand et posant

$$M_p = \overline{\text{borne}}\, |P^{(p)}(x)|, \qquad M_p^\nu = \overline{\text{borne}}\, |P_\nu^{(p)}(x)| \qquad (0 \leq p \leq r),$$

on a

$$|M_p - M_p^\nu| \leq 2\varepsilon \qquad (0 \leq p \leq r).$$

Le lemme 1 appliqué à $P_\nu(\nu x)$ donne

$$M_p^\nu \leq 16 \max \left[M_0^\nu \left(\frac{n_j^\nu}{\nu} \right)^p, M_r^\nu \left(\frac{n_{j+1}^\nu}{\nu} \right)^{p-r} \right],$$

ε pouvant être choisi aussi petit et ν aussi grand qu'on veut, ces deux dernières inégalités entraînent (2) en passant à la limite.

Lemme 3. — *Soit $f(x)$ indéfiniment dérivable, presque périodique ainsi que ses dérivées, de spectre contenu dans* $\mathcal{E}$. *Si l'on pose*

$$M_p = \overline{\text{borne}}\, |f^{(p)}(x)| \qquad (0 < p < r)$$

si λ_r *est le plus grand élément de* E *inférieur ou égal à* $(M_r M_0^{-1})^{\frac{1}{r}}$ *et* λ'_r *est le plus petit élément de* E *supérieur ou égal à* $(M_r M_0^{-1})^{\frac{1}{r}}$, *on a*

$$M_p \leq 16 \max(M_0 \lambda_r^p,\ M_r \lambda_r'^{(r-p)}).$$

En effet, considérons $\sigma_m(x)$, polynome d'approximation de Bochner, d'ordre m, de $f(x)$. Comme $\sigma_m''(x)$ et $\sigma_m'(x)$ sont les polynomes d'approximation de Bochner de $f''(x)$ et $f'(x)$, les trois polynomes $\sigma_m(x)$, $\sigma_m'(x)$, $\sigma_m''(x)$ tendent respectivement vers $f(x)$, $f^{(p)}(x)$, $f^{(r)}(x)$, uniformément pour $-\infty < x < \infty$, quand $m \to \infty$. Appliquant le lemme 2 à $\sigma_m(x)$, puis passant à la limite pour $m \to \infty$, on obtient le lemme 3.

Théorème 1. — *Soit* $\{M_n\}$ *une suite* (S).

Si $\overline{\lim_{n\to\infty}} M_n'' = 0$, $K^E\{M_n\}$, *identique à* $K^E\{0\}$, *ne contient que la fonction nulle* (si $0 \notin \mathcal{E}$) *ou les fonctions constantes* (si $0 \in \mathcal{E}$). *Si* $0 < \overline{\lim_{n\to\infty}} M_n'' = A < \infty$, $K^E\{M_n\}$; *identique à* $K^E\{A''\}$, *est constituée par les fonctions presque périodiques de spectre contenu dans* $\mathcal{E} \cap [-A, A]$.

Si $\overline{\lim_{n\to\infty}} M_n'' = \infty$, $K^E\{M_n\}$ *et* $K^E\{M_n^E\}$ *sont équivalentes.*

Soit

$$f(x) \sim \Sigma a_n e^{i\lambda_n x}, \qquad f(x) \in K^E\{M_n\}.$$

D'après le lemme 1,

$$|a_n| < K M_p |\lambda_n|^{-p} \qquad (p \geq 1).$$

Donc dans le premier cas $a_n = 0$ pour $\lambda_n \neq 0$, dans le second cas $a_n = 0$ pour $\lambda_n > A$, ce qui établit les deux premiers points. Dans le troisième cas, il suffit de montrer que $K^E\{M_n\} \subset K^E\{M_n^E\}$. N_i et N_{i-1} étant deux indices consécutifs de la suite principale d'indices (relative à E) de $\{M_n\}$, on peut appliquer le lemme 3 à la fonction $f^{(N_i)}(x)$ qui vérifie

$$|f^{(N_i)}(x)| \leq K M_{N_i}, \qquad |f^{(N_{i-1})}(x)| \leq K M_{N_{i-1}},$$

puis utiliser le théorème 6 (§ I), ce qui donne

$$|f^{(n)}(x)| \leq 16 K M_n^E \qquad (N_i < n < N_{i-1});$$

i étant quelconque, le théorème est démontré.

Théorème 2. — *Si* $\{M_n\}$ *est une suite* (S_∞), *il existe* $F_E(x)$ *telle que*

$$F_E(x) \in K^E\{M_n\}, \quad \text{borne}_{-\infty < x < \infty} |F_E^{(n)}(x)| \geq \alpha M_n^E \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

α *constante positive absolue.*

D'après le théorème 6 (§ I), les points $P_n^E(x=n,\ y=\log M_n^E)$ sont sur une ligne polygonale convexe C^E dont la pente croit vers $(+\infty)$, les pentes t de ses côtés étant telles que $e^t \in E$. On voit assez facilement qu'on peut construire de proche en proche, à partir de P_1^E, une ligne polygonale convexe dont les côtés sont portés par des droites Δ_i $(i=0, 1, 2, \ldots)$ de pentes τ_i et d'ordonnées à l'origine α_i telles que $e^{\tau_i}=\lambda_i$ et $e^{\alpha_i}=a_i$ vérifient (α et β étant deux constantes positives absolues)

$$\lambda_i \in E, \qquad \alpha\sqrt{2}\,M_n^E \leq \sum_{i=0}^{\infty} a_i \lambda_i^n \leq \beta M_n^E \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

La fonction suivante répond alors aux conditions du théorème 2

$$F_E(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cos\left(\lambda_i x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Théorème 3. — *Quelle que soit la suite de nombres positifs* A_n *tels que* $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n (M_n^E)^{-1}=0$, *il existe une fonction appartenant à* $K^E\{M_n\}$ *mais non à* $K^E\{A_n\}$.

C'est la fonction $F_E(x)$ du théorème précédent.

Théorème 4. — *Pour que* $K^E\{M_n\} \subset K^E\{M_n'\}$, *il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :*

a. $\overline{\lim_{n\to\infty}} M_n^{\frac{1}{n}} < \infty$ *et* $\lambda \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} M_n^{\frac{1}{n}}$, λ *étant le plus grand élément de* E *inférieur ou égal à* $\overline{\lim_{n\to\infty}} M_n^{\frac{1}{n}}$;

b. $\lim_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}}=\infty$ *et* $M_n^E=O(M_n')$ $(n\to\infty)$.

Théorème 5. — *Si* $\lim_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}}=\infty$, *il faut et il suffit, pour que* $K^E\{M_n\}$ *soit dérivable, que*

$$M_{n-1}^E=O(M_n) \qquad (n\to\infty).$$

Ces théorèmes se démontrent comme les théorèmes 4 et 6 (§ II).

La régularisation des classes $K^E\{M_n\}$ permet aussi d'améliorer certains théorèmes sur la quasi-analyticité de telles classes. M. J. P. Kahane [9] a notamment démontré des théorèmes qui, avec nos notations, peuvent s'exprimer ainsi :

a. $K^E\{M_n\}$ *est quasi analytique* D *dès que, avec* $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$,

$$N(r)=O(r^a) \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim_{r\to\infty}} \int^r \frac{\varphi(\log t)-\pi \sin \pi a\, N(t)}{t^{1+a}}\,dt=\infty,$$

$N(r)$ *étant le nombre d'éléments* $\lambda \leq r$ *de la suite positive* E.

b. Soit Ω *une réunion de segments de longueurs indéfiniment croissantes ne contenant aucun point* $\log\lambda(\lambda\in E)$; *désignons par* $\mu(\Omega;\sigma)$ *et* $\mu(C\Omega;\sigma)$ *les mesures de* Ω *et de son complémentaire sur le segment* $[0,\sigma]$. $K^E\{M_n\}$ *est quasi analytique* D *dès qu'il existe* $\varepsilon>0$ *tel que*

$$\int^{\infty}\frac{\varphi(\sigma)\,e^{-\mu(C\Omega;\sigma)-\varepsilon\mu(\Omega;\sigma)}}{\sigma^2}\,d\sigma=\infty.$$

En raison de l'équivalence des classes $K^E\{M_n\}$ et $K^E\{M_n^E\}$, *les théorèmes précédents sont encore vrais en remplaçant* $\varphi(\sigma)$ *par* $\varphi_E(\sigma)$ *dans les formules précédentes, avec*

$$\varphi(\sigma)=\max_n(n\sigma-\log M_n),\qquad \varphi_E(\sigma)=\max_n(n\sigma-\log M_n^E).$$

$\varphi_E(\sigma)$ est d'ailleurs la fonction égale à $\varphi(\sigma)$ pour $e^\sigma\in E$, linéaire dans les intervalles $[\sigma_1,\sigma_2]$ ne comprenant aucun σ tel que $e^\sigma\in E$.

CHAPITRE II.

Problème d'équivalence pour certaines classes de fonctions indéfiniment dérivables définies sur une demi-droite ou sur la droite entière.

I. — Rappel de quelques notions : définitions et résultats préliminaires.

1. Régularisation. — Comme nous l'avons rappelé au début du chapitre I, MM. Mandelbrojt (*voir* [14] et [18]) et Gorny [8] ont résolu le problème d'équivalence de Carleman pour les classes de fonctions $C_R\{M_n\}$. Puis MM. Mandelbrojt [18] et Agmon [1] ont résolu ce problème pour les classes $C_{dR}\{M_n\}$ définies de la façon suivante : $\{M_n\}$ étant une suite (S) donnée, $C_{dR}\{M_n\}$ est l'ensemble des fonctions $f(x)$ indéfiniment dérivables sur $[0,+\infty)$ telles que

$$\overline{\text{borne}}_{x=0}|f(x)|<\infty,\qquad |f^{(n)}(x)|\leq C^n M_n\qquad (n=1,2,\ldots),$$

C étant une constante positive dépendant de f, non de n.

La suite $\{M_n^d\}$, définie par $M_n^d=n^n(n^n M_n)^c$, joue pour ces classes le même rôle que $\{M_n^c\}$ pour les classes $C_R\{M_n\}$.

Le paragraphe II de ce chapitre est consacré à la résolution du problème d'équivalence de Carleman pour des classes de fonctions définies sur la demi-droite $(0,+\infty)$ de la façon suivante.

Définitions. — $\{M_n\}$ *étant une suite* (S) *donnée, désignons par* $C_{dR}^{*(c)}\{M_n\}$ (*resp.* $C_{dR}^*\{M_n\}$, $C_{dR}^1\{M_n\}$, $C_{dR}'\{M_n\}$) *l'ensemble des fonctions* $f(x)$ *indéfiniment*

dérivables sur $[0, +\infty)$ *vérifiant*

$$(1)\quad \left\{ \int_0^{+\infty} e^{cx} f(x)^2\,dx < \infty \right.$$
$$\left. \left(\text{resp.} \int_0^{+\infty} e^{-cx} f(x)^2\,dx < \infty,\ \overline{\text{borne}}_{x\geq 0}\, e^{cx} f(x) < \infty,\ \overline{\text{borne}}_{x\geq 0}\, e^{-cx} f(x) < \infty \right),\right.$$

$$(2)\quad \left\{ \int_0^{+\infty} e^{cx} x^n f^{(n)}(x)^2\,dx \leq C^n M_n^2 \right.$$
$$\left. \left(\text{resp.} \int_0^{+\infty} e^{-cx} x^n f^{(n)}(x)^2\,dx \leq C^n M_n^2,\ f^{(n)}(x) \leq C_1^n M_n e^{cx},\ f^{(n)}(x) \leq C^n M_n e^{-cx} \right)\right.$$

($n = 1, 2, \ldots$; C *et* C_1, *constantes positives dépendant de* f, *non de* n).

Dans le paragraphe III, nous résolvons le problème d'équivalence pour les classes suivantes de fonctions définies sur la droite entière.

Définitions. — $\{M_n\}$ *étant une suite* (S) *donnée, désignons par* $C_R^{*,-2}\{M_n\}$ (*resp.* $C_R^{*,2}\{M_n\}$, $C_R^{-2}\{M_n\}$, $C_R^{2}\{M_n\}$) *l'ensemble des fonctions* $f(x)$ *indéfiniment dérivables pour* $-\infty < x < \infty$ *vérifiant*

$$(3)\quad \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{cx^2} f(x)^2\,dx < \infty \right.$$
$$\left. \left(\text{resp.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-cx^2} f(x)^2\,dx < \infty,\ \overline{\text{borne}}_{-\infty<x<\infty}\, e^{cx^2} f(x) < \infty,\ \overline{\text{borne}}_{-\infty<x<\infty}\, e^{-cx^2} f(x) < \infty \right),\right.$$

$$(4)\quad \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{cx^2} f^{(n)}(x)^2\,dx \leq C^n M_n \right.$$
$$\left. \left(\text{resp.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-cx^2} f^{(n)}(x)^2\,dx < \infty,\ f^{(n)}(x) \leq C_1^n M_n e^{-cx^2},\ f^{(n)}(x) \leq C^n M_n e^{cx^2} \right)\right.$$

($n = 1, 2, \ldots$; C *et* C_1 *constantes positives dépendant de* f, *non de* n).

Les solutions de ces questions font intervenir les procédés de régularisation convexe (définie au début du chapitre I) et de régularisation exponentielle d'une suite (notion due à M. Mandelbrojt et exposée notamment dans [15] comme cas particulier de la régularisation par rapport à une fonction quelconque). Nous rappelons ci-dessous celles de leurs propriétés qui nous serviront dans ce chapitre. $\{M_n\}$ étant une suite (S_c), la suite régularisée convexe $\{M_n^c\}$ de $\{M_n\}$ est définie par

$$M_n^c = \overline{\text{borne}}_{r>1} r^n / T(r), \qquad T(r) = \max_{n\geq 1} r^n / M_n.$$

Ox et Oy étant deux axes rectangulaires, les points $P_n^c(x = n, y = \log M_n^c)$ sont sur la plus haute courbe convexe ne laissant au-dessous d'elle aucun point $P_n(x = n, y = \log M_n)$. Il existe une suite infinie croissante d'indices n_i

$(n_1 = 1, i = 1, 2, \dots)$ dits indices principaux, tels que $M'_{n_i} = M_{n_i}$ et que, pour $n_i < n < n_{i-1}$

$$(5) \qquad (M'_n)^{n_{i-1}-n_i} = (M_{n_i})^{n_{i-1}-n} (M_{n_{i-1}})^{n-n_i}.$$

$\{M_n\}$ étant une suite (S), sa suite régularisée exponentielle $\{M^0_n\}$ est définie par

$$M^0_n = \overline{\text{borne}}_{r \quad n} r^n S(r), \qquad S(r) = \max_{n \quad r} r^n M_n.$$

Il existe une suite infinie croissante d'indices n_i $(n_1 = 1, i = 1, 2, \dots)$, dits indices principaux, tels que $M^0_{n_i} = M_{n_i}$ et que pour $n_i \leq n < n_{i-1}$

$$(6) \qquad (M^0_n)^{n_{i-1}-n_i} = \max\left[M^{n_{i+1}-n}_{n_i} M^{n-n_i}_{n_{i-1}}, (M_{n_i} n^{n-n_i}_{i-1})^{n_{i+1}-n_i}\right].$$

Revenant à l'interprétation géométrique précédente, on voit que les points $P^0_n(x = n, y = \log M^0_n)$ sont, pour $n_i \leq n < n_{i-1}$, alignés sur un segment $[P_{n_i} P'_{n_{i-1}}]$, $P'_{n_{i-1}}$ n'étant pas au-dessous de $P_{n_{i-1}}$. L'ensemble de ces segments, de pentes croissant vers l'infini, forme la « base exponentielle » de $\{P_n\}$. Parmi les indices principaux, il y en a en général une infinité $\{n_j\}$, dits indices de discontinuité, tels que P_{n_j} soit strictement au-dessous de P'_{n_j}. La « base exponentielle » est constituée, entre deux indices de discontinuité consécutifs, par un contour polygonal convexe, fermé à gauche, ouvert à droite, dont tous les sommets, sauf l'extrémité droite, sont des points à indices principaux ou « points principaux » (4).

2. Quelques propriétés des polynomes de Laguerre et d'Hermite. — Suivant les notations de Szegö [19], nous définissons $L_n(x)$, polynome de Laguerre de degré n, et $H_n(x)$, polynome d'Hermite de degré n, par

$$(7) \qquad L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x} x^n) = \sum_{\nu=0}^{n} C^\nu_n \frac{(-x)^\nu}{\nu!},$$

$$(8) \qquad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x^2}) = \sum_{\nu=0}^{[n/2]} \frac{n!}{\nu!} (-1)^\nu \frac{(2x)^{n-2\nu}}{(n-2\nu)!}.$$

Posons

$$(9) \qquad L^{(-p)}_n(x) = \underbrace{\int_0^x \cdots \int_0^{x_1}}_{p} L_n(x_1)\, dx_1 \dots dx_p = \frac{n!}{n+p!} x^p P_{n,p}(x),$$

$$(10) \qquad \varphi_n(x) = e^{-x} L_n(x), \qquad \varphi^{(-p)}_n(x) = e^{-x} x^p \Pi_{n,p}(x).$$

On a les relations

$$(11) \qquad \varphi^{(p)}_n(x) = e^{-x} P_{n,p}(x),$$

$$(12) \qquad n!\, \Pi_{n,p}(x) = (-1)^p \overline{n-p}!\, L^{(p)}_n(x).$$

(4) Dans la suite de ce chapitre, $\{M_n\}$, $\{M'_n\}$ désigneront des suites (S) données.

Comme on sait que

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x)\, dx = \delta_{n,m}$$

$$(n, m = 0, 1, 2, \ldots, \delta_{n,m} = 1 \text{ si } n = m,\ \delta_{n,m} = 0 \text{ si } n \neq m);$$

on en déduit au moyen d'intégrations par parties que les polynomes $P_{n,p}(x)$ et $\pi_{n,p}(x)$ vérifient les relations

$$(13) \qquad \int_0^\infty e^{-x} x^p P_{n,p}(x) P_{m,p}(x)\, dx = \frac{\overline{n+p}\,!}{n!}\delta_{n,m} \qquad (n, m = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$(14) \qquad \int_0^\infty e^{-x} x^p \Pi_{n,p}(x) \Pi_{m,p}(x)\, dx = \frac{\overline{n-p}\,!}{n!}\delta_{n,m} \qquad (n, m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Nous aurons besoin au paragraphe II d'une estimation des dérivées successives de $\varphi_n(x)$ et $L_n(x)$. Exprimant $\varphi_n^{(k)}(x)$, dérivée d'ordre $(n+k)$ de $(e^{-x}x^n/n!)$ par la formule de Leibniz, puis remarquant que

$$x^N < N!\, 2^N e^{\frac{x}{2}} \qquad (x \geq 0,\ N = 1, 2, \ldots)$$

et que C_{n+k}^{ν} croît avec ν pour $2\nu \leq n+k$, on obtient

$$(15) \qquad |\varphi_n^{(k)}(x)| \leq 2(4e)^k e^{-\frac{x}{2}} \qquad (k \geq n).$$

Les inégalités

$$|\varphi_n''(x)| \leq 2(4e)^n e^{-\frac{x}{2}}, \qquad |\varphi_n'(x)| < e^{-\frac{x}{2}} \qquad (x \geq x \geq 0)$$

impliquent (*voir* Mandelbrojt [18], p. 222) une majoration de $\varphi_n^{k}(x)$ pour $0 < k < n$. On obtient ainsi les relations

$$(16) \qquad |\varphi_n^{(k)}(x)| \leq 2(32e^2)^k n^k k^{-k} e^{-\frac{x}{2}} \qquad (0 \leq k < n;\ x \geq 0),$$

$$(17) \qquad \varphi_n^{(k)}(0) = (-1)^k C_{n+k}^k, \qquad |\varphi_n^{(k)}(0)| \geq n^k k^{-k}.$$

Comme $L_n(x) = e^x \varphi_n(x)$, on peut exprimer $L_n^{(k)}(x)$ par la formule de Leibniz, puis tenir compte de (12); $n^\nu \nu^{-\nu}$ croissant avec ν pour $2\nu \leq n$, on a ainsi une majoration de $L_n^{(k)}(x)$ pour $2k \leq n$. Remplaçant, dans le développement de $L_n^{(k)}(x)$ en puissances de x, x^N par $2^N N!\, e^{\frac{x}{2}}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, on voit que cette majoration vaut aussi pour $2k \geq n$.

D'où

$$(18) \qquad |L_n^{(k)}(x)| \leq 2(64e^2)^k n^k k^{-k} e^{\frac{x}{2}} \qquad (x \geq 0,\ 0 \leq k \leq n),$$

$$(19) \qquad L_n^{(k)}(0) = (-1)^k C_n^k, \qquad |L_n^{(k)}(0)| \geq n^k k^{-k} \qquad (0 \leq k \leq n).$$

Une estimation de l'ordre de grandeur des dérivées de e^{x^2}, e^{-x^2}, $e^{-\frac{x^2}{2}} H_p(x)$, nous sera utile dans le paragraphe II. Le développement en puissances de x de $H_n(x)$, compte tenu de

$$|x|^{2p-2\nu} < \overline{p-\nu}\,!\, \alpha^{2p-2\nu} e^{\alpha^2 x^2}, \qquad |x|^{2p+1-2\nu} < \overline{p+1-\nu}\,!\, \alpha^{2p+1-2\nu} e^{\alpha^2 x^2}$$

donne une majoration de $H_n(x)$. Comme la dérivée d'ordre n de $e^{\varepsilon x^2}$ est une somme des mêmes termes, au signe près, que $e^{\varepsilon x^2} H_n(x)$, on a

$$\left| \frac{d^n}{dx^n} (e^{\varepsilon \alpha x^2}) \right| \leq (2\alpha)^n n^{\frac{n}{2}} e^{\frac{\alpha x^2}{2} + \alpha^2 x^2 - \frac{n}{2}} \qquad (\varepsilon = \pm 1,\ \alpha > 0).$$

De cette inégalité (appliquée pour $\alpha = \sqrt{3}$, $\varepsilon = \pm 1$) on déduit aussi une majoration de la dérivée d'ordre n de

$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_p(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^p}{dx^p} (e^{-x^2}),$$

exprimée au moyen de la formule de Leibniz. D'où

$$\left| \frac{d^n}{dx^n} (e^{\varepsilon x^2}) \right| \leq 2^n n^{\frac{n}{2}} e^{x^2} \qquad (-\infty < x < \infty;\ n = 1, 2, \ldots), \tag{20}$$

$$|H_n(x)| \leq (2\sqrt{3})^n n^{\frac{n}{2}} e^{\frac{x^2}{2}}, \tag{21}$$

$$\left| \frac{d^n}{dx^n} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} H_p(x) \right] \right| \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n (2\sqrt{3})^{n+p} (n+p)^{\frac{n+p}{2}}. \tag{22}$$

Enfin, si l'on pose

$$K_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} H_n(x), \qquad \Phi_n(x) = e^{-x^2} K_n(x), \tag{23}$$

on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} K_n(x) K_m(x)\, dx = \delta_{n,m} \qquad (n, m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{24}$$

$$(2^p \overline{n+p}\,!)^{\frac{1}{2}} K_n^{(-p)}(x) = (n!)^{\frac{1}{2}} K_{n+p}(x), \tag{25}$$

$$(2^p n!)^{\frac{1}{2}} \Phi_n^{(-p)}(x) = (\overline{n-p}\,!)^{\frac{1}{2}} \Phi_{n-p}(x). \tag{26}$$

II. — Classes de fonctions sur une demi-droite.

$F(x)$ étant indéfiniment dérivable sur $[0, +\infty)$, nous poserons

$$I_n(F) = \int_0^{\infty} e^x x^n |F^{(n)}(x)|^2\, dx, \qquad \mathfrak{I}_n(F) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^n |F^{(n)}(x)|^2\, dx \tag{27}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

1. Classes $C_{dR}^{*-1} \{M_n\}$:

Lemme 1. — *Si $f(x)$, indéfiniment dérivable sur $[0, +\infty)$ vérifie*

$$I_0(f) < \infty \tag{a}$$

et s'il existe une suite infinie $\{n_i\}$ d'entiers positifs tels que

$$m_{n_i} = I_{n_i}(f) < \infty, \tag{b}$$

$f(x)$ admet un développement en série de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(x) e^{-x},$$

cette série converge uniformément et absolument sur $[0, +\infty)$ *ainsi que toutes ses dérivées et l'on a*

$$m_p = I_p(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \frac{\overline{n+p}\,!}{n\,!} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots).$$

Posons

$$a_n = \int_0^{\infty} f(x)\, L_n(x)\, dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(x)\, e^{-x}.$$

Il existe, en raison de (a), une suite $\{x_i\}$ de valeurs tendant vers $(+\infty)$ telles que

$$\lim_{i \to \infty} f(x_i)\, e^{\frac{x_i}{2}} = 0.$$

Des intégrations par parties et un passage à la limite montrent alors que

$$a_n = \lim_{i \to \infty} (-1)^{n_i} \int_0^{x_i} f^{(n_i)}(x)\, L_n^{-n_i}(x)\, dx.$$

Appliquant l'inégalité de Schwarz, compte tenu de (9) et (13), il vient

$$a_n \leq \frac{n\,!}{\overline{n+n_i}\,!} \left[I_{n_i}(f)\, \mathfrak{I}_{n_i}(P_{n,n_i}) \right]^{\frac{1}{2}} = \left(m_{n_i} \frac{n\,!}{\overline{n+n_i}\,!} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme on peut prendre n_i aussi grand que l'on veut, il en résulte que la série $s(x)$ converge uniformément et absolument sur $[0, +\infty)$ ainsi que toutes ses dérivées et que, p étant un entier positif quelconque, on peut intégrer terme à terme $\{s^2(x)\, e^x x^p\}$. Donc

$$I_p(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \frac{\overline{n+p}\,!}{n\,!}, \qquad a_n = \int_0^{\infty} s(x)\, L_n(x)\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Comme $I_0(f-s) < \infty$ et que les fonctions $e^{-\frac{x}{2}} L_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ forment un système orthonormal complet sur $[0, \infty)$, l'égalité de Parseval, applicable à $[f(x) - s(x)]$, montre que $I_0(f-s) = 0$, donc que $f(x) \equiv s(x)$, ce qui achève la démonstration du lemme.

THÉORÈME 1. — *Si,* $\lim_{n} n^{-1} M_n = 0$, *la classe* $C_{dR}^{-1}\{M_n\}$ *ne contient que la fonction nulle.*

Si $\lim_{n} n^{-1} M_n > 0$, *les classes* $C_{dR}^{-1}\{M_n\}$ *et* $C_{dR}^{1}\{M_n\}$ *sont équivalentes.*

D'après (1), (2) et le lemme 1, si $f(x) \in C_{dR}^{-1}\{M_n\}$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-x} L_n(x), \qquad a_n^2 \leq C^N M_N n\,! (\overline{n+N}\,!)^{-1} \qquad (N = 1, 2, \ldots).$$

Donc, dans le premier cas, $a_n = 0$ pour tout n et $f(x) \equiv 0$.

Dans le second cas, soit $\{M_n^c\}$ la suite régularisée convexe de $\{M_n\}$, $\{n_i\}$ la suite principale d'indices de $\{M_n\}$. Pour $n_i \leq n \leq n_{i+1}$, l'expression de m_n fournie pour le lemme 1, l'inégalité

$$(\overline{p+n}\,!)^{n_{i+1}-n_i} \leq (\overline{p+n_i}\,!)^{n_{i+1}-n}(\overline{p+n_{i+1}}\,!)^{n-n_i}$$

l'inégalité de Hölder, (2) et (5) entrainent

$$m_n^{n_{i+1}-n_i} \leq m_{n_i}^{n_{i+1}-n} m_{n_{i+1}}^{n-n_i} \leq C^{n_{i+1}-n_i} M_{n_i}^{n_{i+1}-n} M_{n_{i+1}}^{n-n_i} = (C^n M_n^c)^{n_{i+1}-n_i}.$$

Donc $C_{dR}^{-1}\{M_n\} \subset C_{dR}^{-1}\{M_n^c\}$. L'inclusion opposée étant évidente, les deux classes sont équivalentes.

Théorème 2. — *Si* $\overline{\lim_n} n^{-1} M_n^{\frac{1}{n}} > 0$, *il existe une fonction* $F(x)$ *appartenant à* $C_{dR}^{-1}\{M_n\}$ *et telle que*

$$m_n > \alpha^n M_n^c \qquad (n = 1, 2, \ldots ; \alpha \text{ constante positive indépendante de } n).$$

Soit r_n un nombre supérieur ou égal à 1 tel que

$$r_n^n [T(r_n)]^{-1} = \overline{\text{borne}}_{r \geq 1} r^n [T(r)]^{-1} = M_n^c$$

et λ_n la partie entière de r_n. On a

$$\lambda_n^n [T(\lambda_n)]^{-1} \geq \lambda_n^n [T(r_n)]^{-1} = \lambda_n^n r_n^{-n} M_n^c \geq 2^{-n} M_n^c.$$

La fonction

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [2^n T(\lambda_n)]^{-\frac{1}{2}} e^{-x} L_{\lambda_n}(x)$$

a les propriétés indiquées dans le théorème. En effet, d'après (11) et (13),

$$m_p = \sum_{n=1}^{\infty} [2^n T(\lambda_n)]^{-1} (\lambda_n - 1)(\lambda_n + 2) \ldots (\lambda_n + p) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \beta_n.$$

$$\beta_n \leq 2^p \lambda_n^p [T(\lambda_n)]^{-1} \leq 2^p M_p^c \qquad (\text{si } \lambda_n \geq p),$$

$$\beta_n \leq M_1 (2p)^p \leq C^p M_p \qquad (\text{si } \lambda_n < p).$$

car $\overline{\lim_n} n^{-1} M_n^{\frac{1}{n}} > 0$ entraine qu'il existe $c > 0$ tel que $M_p > c^p p^p$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Il existe donc $B > 0$ tel que $\beta_n \leq B^p M_p$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et l'on a bien

$$4^{-p} M_p^c \leq m_p \leq B^p M_p \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Théorème 3. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $C_{dR}^{*(-1)}\{M_n\} \subset C_{dR}^{*(-1)}\{M_n^c\}$ *est que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :*

a. $\overline{\lim_n} n^{-1} M_n^{\frac{1}{n}} = 0$,

b. $\overline{\lim_n} n^{-1} M_n^{\frac{1}{n}} > 0$ *avec* $(M_n^c)^{\frac{1}{n}} = O\left(M_n^{\frac{1}{n}}\right)$ $(n \to \infty)$.

En effet, dans le premier cas $C'_{dR}\{M_n\}$ ne contient que la fonction nulle. Dans le second cas, la condition est suffisante d'après le théorème 1. On voit qu'elle est nécessaire d'après le théorème 2, en écrivant que $F(x)$ définie dans le théorème 2 appartient à la seconde classe.

2. Classes $C'_{dR}\{M_n\}$. — Pour le lemme 2 nous utilisons les notations (27).

Lemme 2. — *Si $f(x)$ est indéfiniment dérivable sur $[0, +\infty)$ et s'il existe une suite infinie croissante d'entiers positifs $\{n_i\}$ tels que*

$$\mathfrak{I}_0(f) < \infty, \qquad m'_{n_i} = \mathfrak{I}_{n_i}(f) < \infty.$$

$f(x)$ est développable en une série de polynomes de Laguerre

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n L_n(x).$$

Cette série converge uniformément et absolument sur tout segment fini $[0, X]$ (avec $0 < X < +\infty$) ainsi que ses dérivées. On a

$$m'_n = \mathfrak{I}_n(f) = \sum_{p=n}^{\infty} b_p^2 \frac{p!}{p-n!}.$$

On voit comme au lemme 1 qu'en posant

$$b_n = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) L_n(x)\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$s_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n L_n(x)$$

il existe une suite de valeurs $\{x_i\}$ tendant vers $(+\infty)$ telle que

$$b_n = (-1)^p \lim_{i \to \infty} \int_0^{x_i} f^{(p)}(x) [e^{-x} L_n(x)]^{(-p)}\, dx \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

L'inégalité de Schwarz, (10) et (14) donnent alors

$$|b_n| \leq (m'_{n_i} \overline{n - n_i}!)^{\frac{1}{2}} (n!)^{-\frac{1}{2}}.$$

Il en résulte que la série $s_1(x)$ converge absolument et uniformément sur tout segment $[0, X]$ ($0 < X < \infty$) ainsi que ses dérivées et que

$$b_n = \int_0^{\infty} s_1(x)\, e^{-x} L_n(x)\, dx, \qquad \mathfrak{I}_n(s_1) = \sum_{p=n}^{\infty} b_p^2 \frac{p!}{p-n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Puis l'égalité de Parseval appliquée à $e^{-x}|g(x) - s_1(x)|$ montre que $f(x) \equiv s_1(x)$.

Théorème 4. — *Les classes $C'_{dR}\{M_n\}$ et $C''_{dR}\{M_n^0\}$ sont équivalentes.*

Il suffit de montrer que $C^{*1}_{d\mathrm{R}}\{M_n\} \subset C^{*1}_{d\mathrm{R}}\{M^0_n\}$. Soit $\{n_i\}$ la suite des indices principaux de $\{M_n\}$ par rapport à la régularisation exponentielle. Soit i l'indice tel que $n_i \leqq n < n_{i+1}$.

Posons pour abréger l'écriture

$$l_n = \sum_{p=n}^{\infty} b_p^2 p^n, \qquad l_{n,m} = \sum_{p=n}^{m} b_p^2 p^m.$$

Appliquant d'abord à l_n l'inégalité de Hölder, on obtient successivement

$$(\alpha) \qquad \begin{gathered} l_n^{n_{i+1}-n_i} \leqq l_{n,n_i}^{n_{i+1}-n}\, l_{n,n_{i+1}}^{n-n_i}, \quad l_{n,n_i} \leqq l_{n_i}, \quad l_{n,n_{i-1}} - l_{n_{i+1}} \leqq l_{n_i} n_{i+1}^{n_{i+1}-n_i}, \\ l_n^{n_{i+1}-n_i} \leqq 2 \max\left[l_{n_i}^{n_{i+1}-n} l_{n_{i-1}}^{n-n_i},\ (l_{n_i} n_{i+1}^{n_{i+1}-n_i})^{n_{i+1}-n_i} \right]. \end{gathered}$$

Comme $p^n e^{-n} \leqq p!\,(\overline{p-n}!)^{-1} \leqq p^n \ (p \geqq n)$, l'expression de m'_n donnée par le lemme 2 conduit à

$$(\beta) \qquad e^{-n} l_n \leqq m'_n \leqq l_n,$$

(α), (β) et l'hypothèse $m'_n < A^n M_n \ (n = 1, 2, \ldots)$ entraînent, compte tenu de (6),

$$m'_n \leqq 2 e^n A^n M^0_n \qquad (n_i \leqq n < n_{i+1}),$$

ce qui démontre le théorème.

Théorème 5. — *Il existe une fonction* $F(x)$ *telle que*

$$F(x) \in C^{*1}_{d\mathrm{R}}\{M_n\}, \qquad \mathcal{J}_n(F) > \alpha^n M^0_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

(α *constante positive indépendante de* n).

Soit μ_n la partie entière d'un nombre r_n tel que

$$r_n \geqq n, \qquad r_n^n [S(r_n)]^{-1} = \overline{\underset{r \geqq n}{\text{borne}}}\ r^n [S(r)]^{-1}.$$

On a

$$\begin{gathered} \mu_n^n [S(\mu_n)]^{-1} \geqq \mu_n^n [S(r_n)]^{-1} \geqq \mu_n^n (\mu_n + 1)^{-n} M^0_n \geqq e^{-1} M^0_n, \\ \mu_p^p [S(\mu_n)]^{-1} \leqq M^0_p \qquad (p \leqq n). \end{gathered}$$

La fonction

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [2^n S(\mu_n)]^{-\frac{1}{2}} L_{\mu_n}(x)$$

a les propriétés voulues. En effet, les inégalités précédentes, la valeur de $\mathcal{J}_n(F)$ donnée par le lemme 2 et la double inégalité

$$n^p e^{-p} \leqq n!\,[\overline{n-p}!]^{-1} \leqq n^p \qquad (n \geqq p)$$

conduisent aux inégalités du type cherché

$$2^{-p} e^{-p-1} M^0_p \leqq \mathcal{J}_p(F) \leqq M^0_p \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

THÉORÈME 6. — *Pour que* $C^{*1}_{d\mathrm{R}}\{M_n\} \subset C^{*1}_{d\mathrm{R}}\{M'_n\}$ *il faut et suffit que*

$$(M_n^0)^{\frac{1}{n}} = O\left(M_n'^{\frac{1}{n}}\right) \qquad (n \to \infty).$$

Ce théorème résulte des deux précédents comme dans le n° 1.

3. CLASSES $C^{-1}_{d\mathrm{R}}\{M_n\}$:

THÉORÈME 7. — *Si* $\overline{\lim_n} M_n^{\frac{1}{n}} = 0$, $C^{-1}_{d\mathrm{R}}\{M_n\}$ *ne contient que la fonction nulle. Si* $\overline{\lim_n} M_n^{\frac{1}{n}} > 0$, $C^{-1}_{d\mathrm{R}}\{M_n\}$ *et* $C^{-1}_{d\mathrm{R}}\{M_n^d\}$ *sont équivalentes.*

Nous emploierons les notations suivantes (5) :

$$\varphi(x) = f(C^{-1}x), \qquad \Phi(x) = \int_x^{x'} \int_x^{x'_1} \cdots \int_x^{x'_{p-1}} \varphi^{(n)}(x_p)\, dx_1 \ldots dx_p$$

$$\mu_n = \overline{\text{borne}}_{x \geq 0} e^{x} \varphi^{(n)}(x).$$

$|\varphi(x) - \Phi(x)|$ est un polynome en x de degré $(n-1)$. Si n est tel que M_n soit fini, il résulte des hypothèses que $|\varphi(x)|$ et $|\Phi(x)|$ sont bornées sur $[0, +\infty)$, donc que $\varphi(x) - \Phi(x) \equiv 0$. En particulier,

$$\varphi^{(n-1)}(x) = \int_x^{\infty} \varphi^{(n)}(t)\, dt, \qquad |\varphi^{(n-1)}(x)| < \mu_n \int_x^{\infty} e^{-t}\, dt = \mu_n e^{-x}.$$

La suite $\{\mu_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est donc croissante et inférieure à $\{M_n\}$.

Si $\overline{\lim_n} M_n^{\frac{1}{n}} = 0$, on a donc $\mu_0 = 0$ et $f(x) \equiv 0$.

Si $\overline{\lim_n} M_n^{\frac{1}{n}} > 0$, *a fortiori* $\lim_{n\to\infty} (n^n M_n)^{\frac{1}{n}} = +\infty$ et l'on peut considérer $\{M_n^d\}$ définie par $n^n M_n^d = (n^n M_n)^r$. Les inégalités

$$|f^{(n)}(x)| \leq C^n M_n e^{-X} \qquad (x \geq X \geq 0;\ n = 1, 2, \ldots)$$

entraînent (*voir* Mandelbrojt [18], p. 227)

$$|f^{(n)}(X)| \leq B^n M_n^d e^{-X} \qquad (X \geq 0;\ n = 1, 2, \ldots),$$

ce qui montre l'équivalence des deux classes.

THÉORÈME 8. — *Si* $\lim M_n^{\frac{1}{n}} > 0$, *il existe une fonction* $F(x)$ *telle que*

$$F(x) \in C^{-1}_{d\mathrm{R}}\{M_n\}, \qquad |F^{(n)}(0)| > \alpha^n M_n^d \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

α, *constante positive indépendante de* n.

---

(5) Pour cette démonstration, nous nous plaçons dans le cas où, pour (2), $C_1 = C$. Dans le cas général, les calculs sont les mêmes, en remplaçant M_n par $(C_1 C^{-1})^n M_n$.

Soit λ_p la partie entière d'un nombre positif r_p tel que

$$r_p^p = p^p M_p^d H(r_p), \qquad H(r) = \overline{\text{borne}}_{p \geq 1} r^p / M_p p^p, \qquad p^p M_p^d = \overline{\text{borne}}_{r \geq 1} r^p / H(r).$$

On a

$$(\alpha) \qquad \lambda_p^n < n^n M_n^d H(\lambda_p) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$(\beta) \qquad \lambda_p^p \geq 2^{-p} p^p M_p^d H(\lambda_p) \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

La fonction

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [2^n H(\lambda_n)]^{-1} \varphi_{\lambda_n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

écrite avec les notations (10) a les propriétés voulues, car

$$F(x) = \sum_{n=1}^{p} u_n(x) - \sum_{n=p+1}^{\infty} u_n(x) = G_1(x) + G_2(x).$$

Or (15) et $\overline{\lim_n} M_n^{\frac{1}{n}} > 0$ d'une part, (16) d'autre part, donnent avec (α)

$$|G_1^{(p)}(x)| \leq A^p e^{-\frac{x}{2}} \leq B^p M_p e^{-\frac{x}{2}}, \qquad |G_2^{(p)}(x)| \leq B^p M_p^d e^{-\frac{x}{2}} \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Ces relations, où B ne dépend pas de p, montrent que $F(x) \in C_{dR}^{-1}\{M_n\}$. Mais (17) et (β) montrent que

$$2^p |F^{(p)}(0)| \geq H^{-1}(\lambda_p) |\varphi_{\lambda_p}^{(p)}(0)| \geq H^{-1}(\lambda_p) p^{-p} \lambda_p^p \geq 2^{-p} M_p^d \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 9. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $C_{dR}^{-1}\{M_n\} \subset C_{dR}^{-1}\{M_n'\}$ *est que l'une des conditions soit satisfaite :*

a. $\overline{\lim_n} M_n^{\frac{1}{n}} = 0$;

b. $\overline{\lim_n} M_n^{\frac{1}{n}} > 0$, *avec* $(M_n')^{\frac{1}{n}} = O\left(M_n^{\frac{1}{n}}\right)$ $(n \to \infty)$.

Ce théorème qui résulte des deux précédents résout le problème d'équivalences pour les classes $C_{dR}^{-1}\{M_n\}$.

4. CLASSES $C_{dR}^{1}\{M_n\}$:

LEMME 3. — *Si* $P_n(x)$ *est un polynome de degré* $n > 1$, *tel que pour* $x \geq 0$ *on ait* $|P_n(x)| \leq M_0 e^x$, *il en résulte pour* $1 \leq p < n$

$$|P_n^{(p)}(x)| \leq 4[e(1 + 40e)]^p n^{p-p} M_0 e^x \qquad (x \geq 0).$$

On a

$$g_n(x) = P_n(1 - e^{-x}) = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i(x), \qquad a_i = \int_0^{\infty} e^{-x} g_n(x) L_i(x)\, dx \qquad (0 \leq i \leq n).$$

Comme $|g_n(x)e^{-\frac{x}{2}}| \leq M_0$ pour $x \geq 0$, l'inégalité de Schwarz appliquée à a_i montre que $|a_i| \leq 2M_0$, d'où

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}[e^{-x}P_n(x)]\right| \leq 2M_0 5^n \qquad (x \geq 0).$$

Comme, de plus, $|e^{-x}P_n(x)| \leq M_0$ il en résulte (*voir* Mandelbrojt [18], p. 222)

$$\left|\frac{d^p}{dx^p}[e^{-x}P_n(x)]\right| \leq 2M_0(40e)^p n^p p^{-p}.$$

La formule de Leibniz appliquée à $P_n(x) = e^x e^{-x}P_n(x)$ donne alors

$$|P_n^{(p)}(x)| \leq 2M_0 e^x \sum_{k=0}^{p} (40e)^k C_p^k n^k k^{-k}.$$

La fonction $n^n x^{-n}$ croît jusqu'à $x = ne^{-1}$ et a pour maximum $e^{n(e-1)}$.

On peut donc dans le second membre remplacer $n^k k^{-k}$ par $n^p p^{-p}$ si $pe \leq n$, par e^p si $pe \geq n$, ce qui donne l'inégalité annoncée.

Lemme 4. — *Si $f(x)$, fonction n fois dérivable sur $[0, +\infty)$ vérifie*

$$|f(x)| \leq M_0 e^x \quad (x \geq 0), \qquad |f^{(n)}(x)| \leq M_n e^x \quad (x \geq 0),$$

on a pour $0 \leq p < n$ et $x \geq 0$

$$|f^{(p)}(x)| \leq 4[2e(1+40e)]^p n^p p^{-p} e^x \max\left(M_0^{1-\frac{p}{n}} M_n^{\frac{p}{n}}, M_0\right).$$

Considérons la fonction $F(X) = f(a+X)$ $(a \geq 0, X \geq 0)$ et son développement de Taylor d'ordre $(n-1)$ autour de $X = 0$

$$F(X) = P_{n-1}(X) + \int_0^X \frac{(X-t)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n)}(t)\, dt.$$

Les hypothèses entraînent que

$$|P_{n-1}(X)| \leq e^a(M_0 + M_n)e^{aX} \qquad (X \geq 0).$$

Appliquant alors le lemme 3 à $P_{n-1}(\lambda X)$ $(0 < \lambda \leq 1)$ pour $X = 0$ choisissant $\lambda^n = \min(1, M_0 M_n^{-1})$ et remarquant que $P_{n-1}^{(p)}(0) = F^{(p)}(0) = f^{(p)}(a)$, on obtient l'inégalité annoncée.

Théorème 10. — *Les classes $C^1_{dR}\{M_n\}$ et $C^1_{dR}\{n^{-n}(n^n M_n)^n\}$ sont équivalentes.*

Soit $\{n_i\}$ la suite d'indices principaux de $\{n^n M_n\}$ relative à la régularisation exponentielle. Supposons que $n_i \leq n < n_{i+1}$ et que $f(x) \in C^1_{dR}\{M_n\}$. Le lemme 4, appliqué à $f^{(n_i)}(x)$ compte tenu des hypothèses (2) pour $n = n_i$ et $n = n_{i+1}$, conduit, tous calculs faits, moyennant la relation (6) écrite pour $\{n^n M_n\}$, à

$$n^n |f^{(n)}(x)| \leq 4D^n \left[(n-1)n^{\frac{n-n_i}{n_{i+1}-n}}\right]^{n-n_i} C_n^{n_i} (n^n M_n)^n e^x,$$

avec

$$D = C\,2e\,(1+\log e), \qquad u = n_{i-1}n_i^{-1} > 1, \qquad [C.\ \text{constante de (2)}].$$

Comme $C_n^{n_i} < 2^n$ et que la fonction de u entre crochets est inférieure à 1 pour $u > 1$, cette inégalité montre bien que la première des classes considérées est contenue dans la seconde. L'inclusion opposée étant évidente, les deux classes sont équivalentes.

THÉORÈME 11. — *Il existe une fonction* $F(x)$ *telle que*

$$F(x) \in C^1_{dR}\{M_n\}, \qquad |F^{(n)}(0)| > \alpha^n n^{-n}(n^n M_n)^0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

α, *constante positive indépendante de* n.

Soit λ_n la partie entière d'un nombre $r_n \geq r$ tel que

$$r_n^n S_1^{-1}(r_n) = \overline{\text{borne}}_{r \geq n}\, r^n S_1^{-1}(r), \qquad S_1(r) = \max_{n \leq r} r^n n^{-n} M_n^{-1}.$$

On a comme au théorème 5

$$\lambda_p^n S_1^{-1}(\lambda_p) \leq (n^n M_n)^0 \leq e\lambda_n^n S_1^{-1}(\lambda_n) \qquad (p \leq n,\ n = 1, 2, \ldots).$$

Une fonction répondant aux conditions du théorème est

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} S_1^{-1}(\lambda_n) L_{\lambda_n}(2x).$$

Les inégalités précédentes, (18) et (19) conduisent en effet à

$$|F^{(k)}(x)| \leq 2^{k+1}(6\log e)^k k^k (k^k M_k)^0 e^x \qquad (x \geq 0;\ k = 1, 2, \ldots),$$
$$|F^{(k)}(0)| \geq e^{-1} k^{-k} (k^k M_k)^0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

THÉORÈME 12. — *Pour que* $C^1_{dR}\{M_n\} \subset C^1_{dR}\{M'_n\}$, *il faut et il suffit que*

$$[(n^n M_n)^0]^{\frac{1}{n}} = O\left\{n (M'_n)^{\frac{1}{n}}\right\}.$$

Ce théorème résulte des théorème 10 et 11.

III. — Classes de fonctions sur la droite entière.

$F(x)$ étant une fonction indéfiniment dérivable sur $(-\infty, \infty)$, nous poserons

$$(28) \quad I_n^*(F) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} |F^{(n)}(x)|^2\, dx, \qquad \mathfrak{I}_n^*(F) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} |F^{(n)}(x)|^2\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

1. CLASSES $C_R^{*(-2)}\{M_n\}$:

LEMME 1. — *Nous utilisons les notations* (23) *et* (28). *Si* $f(x)$, *indéfiniment dérivable sur* $(-\infty, \infty)$, *est telle que*

$$I_0^*(f) < \infty, \qquad I_{n_i}^*(f) < \infty \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

pour une suite infinie d'entiers positifs $\{n_i\}$, $f(x)$ *est développable en une série*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-x^2}\mathrm{K}_n(x)$$

absolument et uniformément convergente sur $(-\infty, \infty)$ *ainsi que toutes ses dérivées et l'on a*

$$m_p^*=\mathrm{I}_p^*(f)=\sum_{n=0}^{\infty} 2^p a_n^2 \frac{\overline{n+p}\,!}{n\,!} \qquad (p=0, 1, 2, \ldots).$$

La démonstration de ce lemme est analogue à celle du lemme 1 (§ II). Posant

$$a_n=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{K}_m(x)\,dx \qquad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

$$s^*(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-x^2}\mathrm{K}_n(x),$$

on montre à partir de $\mathrm{I}_0^*(f)<\infty$ que

$$a_n=\lim_{i\to\infty}(-1)^p\int_{x_i'}^{x_i} f^{(p)}(x)\,\mathrm{K}_n^{(-p)}(x)\,dx,$$

$\{x_i'\}$ et $\{x_i\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ étant deux suites tendant respectivement vers $(-\infty)$ et $(+\infty)$. Il en résulte moyennant (25) que

$$2^{n_i}\overline{n+n_i}\,!\;a_n^2\leq n\,!\;m_{n_i}^* \qquad (i=1, 2, \ldots),$$

puis, comme le système $\{e^{-x^2}\mathrm{K}_n(x)\}$ est orthonormal complet sur $(-\infty, \infty)$, que $s^*(x)$ a les propriétés que le lemme attribue à $f(x)$, enfin que

$$\mathrm{I}_0^*(f-s)=0, \qquad \text{d'où} \qquad f(x)\equiv s^*(x).$$

Théorème 1. — *Si* $\overline{\lim_n} n^{-1}\mathrm{M}_n^{\frac{1}{n}}=0$, $\mathrm{C}_{\mathrm{R}}^{*(-2)}\{\mathrm{M}_n\}$ *ne contient que la fonction nulle.*

Si $\overline{\lim_n} n^{-1}\mathrm{M}_n^{\frac{1}{n}}>0$, $\mathrm{C}_{\mathrm{R}}^{*(-2)}\{\mathrm{M}_n\}$ et $\mathrm{C}_{\mathrm{R}}^{*(-2)}\{\mathrm{M}_n^c\}$ sont équivalentes. Ceci résulte du lemme 1 (comme au paragraphe II, th. 1).

Théorème 2. — *Si* $\overline{\lim_n} n^{-1}\mathrm{M}_n^{\frac{1}{n}}>0$, *il existe une fonction* $\mathrm{F}(x)$ *telle que*

$$\mathrm{F}(x)\in\mathrm{C}_{\mathrm{R}}^{*(-2)}\{\mathrm{M}_n\}, \qquad m_n^*=\mathrm{I}_n^*(f)>\alpha^n\mathrm{M}_n^c \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

α, *constante positive indépendante de* n.

Avec les notations du théorème 2 (§ II)

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[2^n T(\lambda_n)]^{-\frac{1}{2}} e^{-x^2} K_{\lambda_n}(x).$$

La démonstration est la même que pour le théorème 2 (§ II).

THÉORÈME 3. — *Pour que* $C_R^{*(-2)}\{M_n\}\subset C_R^{*(-2)}\{M'_n\}$, *il faut et suffit que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :*

a. $\underline{\lim}_n n^{-1} M_n^{\frac{1}{n}}=0$;

b. $\underline{\lim}_n n^{-1} M_n^{\frac{1}{n}}>0$ avec $(M_n^c)^{\frac{1}{n}}=O\left(M'^{\frac{1}{n}}_n\right)$ $(n\to\infty)$.

2. CLASSES $C_R^{*2}\{M_n\}$:

LEMME 2. — *Si* $f(x)$, *indéfiniment dérivable sur* (∞, ∞), *est telle que*

$$\mathfrak{I}_n^*(f)<\infty, \qquad \mathfrak{I}_{n_i}^*(f)<\infty \qquad (i=1, 2, \ldots)$$

pour une suite croissante infinie d'entiers $\{n_i\}$, $f(x)$ *est développable en une série de polynomes d'Hermite*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n K_n(x),$$

cette série convergeant absolument et uniformément sur tout segment fini, et l'on a

$$m_n^{*\prime}=\mathfrak{I}_n^*(f)=\sum_{n=p}^{\infty} 2^p a_n^2 \frac{n!}{n-p!}.$$

La marche de la démonstration est la même que pour le lemme 2 (§ II). Avec les notations (23) on pose

$$b_n=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Phi_n(x)\,dx \qquad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

$$s_n^*(x)=\sum_{n=p}^{\infty} b_n K_n(x).$$

On montre que, avec les notations du lemme 1 (§ II),

$$b_n=\lim_{i\to\infty}(-1)^p\int_{x'_i}^{x_i} f^{(p)}(x)\Phi^{(-p)}(x)\,dx,$$

puis on suit un raisonnement analogue à celui du lemme 2 (§ II), e^{-x^2} et (26) remplaçant e^{-x} et (10).

THÉORÈME 4. — *Les classes* $C_R^{*2}\{M_n\}$ *et* $C_R^{*2}\{M''_n\}$ *sont équivalentes.*

THÉORÈME 5. — *Il existe une fonction* $F(x)$ *telle que*

$$F(x)\in C_R^{*2}\{M_n\},\qquad m_n^{*\prime}>\alpha^n M_n^0\qquad (n=1,2,\ldots),$$

α, *constante positive indépendante de* n.

Avec les mêmes notations que pour le théorème 5 (§ II)

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[2^n S(\mu_n)]^{-\frac{1}{2}}K_{\mu_n}(x).$$

THÉORÈME 6. — *Pour que* $C_R^{*2}\{M_n\}\subset C_R^{*2}\{M'_n\}$ *il faut et suffit que*

$$(M_n^0)^{\frac{1}{n}}=O\left(M_n'^{\frac{1}{n}}\right)\qquad (n\to\infty).$$

Les théorèmes 4, 5, 6 se démontrent comme les théorèmes correspondants du paragraphe II.

3. CLASSES $C_R^{-2}\{M_n\}$:

THÉORÈME 7. — *Si* $\overline{\lim_n} n^{-\frac{1}{2}}M_n^{\frac{1}{n}}=0$, $\{C_R^{-2}M_n\}$ *ne contient que la fonction nulle.*

Si $\overline{\lim_n} n^{-\frac{1}{2}}M_n^{\frac{1}{n}}>0$, $C_R^{-2}\{M_n\}$ *et* $C_R^{-2}\{M'_n\}$ *sont équivalentes.*

C étant la constante intervenant dans (4)(6), soit

$$\varphi(x)=f(C^{-1}x),\qquad \psi_p(x)=\int_{-x}^{x}\frac{(x-t)^{n-p-1}}{(n-p-1)!}\varphi^{(n)}(t)\,dt\qquad (0\leq p<n).$$

Soit n tel que M_n soit fini. Comme $|\varphi^{(n)}(x)|\leq M_n e^{-x^2}$ et que $e^{x^2}|\varphi(x)|$ est borné sur la droite, $[\varphi(x)-\psi_0(x)]$ est un polynome $P_{n-1}(x)$ tel que $e^{x^2}|P_{n-1}(x)|$ soit borné sur la droite, donc identiquement nul. D'où en dérivant

$$\varphi^{(p)}(x)\equiv\psi_p(x)\qquad (p=0,1,\ldots,n-1).$$

Tenant compte dans l'expression de $\psi_p(x)$ des inégalités

$$|\varphi^{(n)}(t)|\leq M_n e^{-t^2},\qquad (k+1)^{\frac{k+1}{2}}u^k<2^{k+1}k!\,e^{u^2}\qquad (u>0,\ k=0,1,2,\ldots),$$

il vient

$$(\alpha)\qquad (n-p)^{\frac{n-p}{2}}|\varphi^{(p)}(x)|\leq 3\left(2\sqrt{2}\right)^{n-p}M_n e^{-x^2}\qquad (p=0,1,2,\ldots,n-1).$$

Si $\overline{\lim_n} n^{-\frac{1}{2}}M_n^{\frac{1}{n}}>0$, soit

$$F(x)=\varphi(x)e^{x^2}.$$

(6) Dans cette démonstration, on se place dans le cas où, dans (4), $C_1=C$, ce qui simplifie l'écriture. Dans le cas général, les calculs sont les mêmes, en remplaçant M_n par $(C_1C^{-1})^n M_n$.

Exprimant $F^{(n)}(x)$ par la formule de Leibniz, utilisant (α) et (20) on obtient, tous calculs faits

$$|F^{(n)}(x)| \leq 3.5^n M_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Il en résulte, d'après le chapitre I (th. 6, § I)

$$|F^{(n)}(x)| \leq 6.5^n M_n^c \qquad (n = 1, 2, \ldots; -\infty < x < \infty).$$

Comme $\overline{\lim_n} n^{-\frac{1}{2}} M_n^{\frac{1}{n}} > 0$, on a

$$\left| \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(p)} \right| \leq 2^p p^{\frac{p}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} \leq a^p M_c^p e^{-\frac{x^2}{4}} \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Exprimant la dérivée d'ordre n de $\varphi(x) = F(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ par la formule de Leibniz et utilisant les deux groupes d'inégalités précédents, on aboutit, en remarquant que $M_p^c M_{n-p}^c \leq M_1^c M_n^c (p = 1, \ldots, n)$, à

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq 6\mu_0 (n+3)^n M_n^c e^{-\frac{x^2}{4}} \qquad (n = 1, 2, \ldots; -\infty < x < \infty),$$

où $\mu_0 = \max(M_0, M_1)$, donc $C_R^{-2}\{M_n\} \subset C_R^{-2}\{M_n^c\}$, ce qui établit le théorème.

Théorème 8. — *Si* $\overline{\lim_n} n^{-\frac{1}{2}} M_n^{\frac{1}{n}} > 0$, *il existe une fonction* $F(x)$ *telle que*

$$F(x) \in C_R^{-2}\{M_n\}, \qquad |F^{(n)}(0)| > \alpha^n M_n^c \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

α, *constante positive indépendante de* n.

Avec les notations du théorème 2 (§ II),

$$F(x) = e^{-x^2} f_1(x) = e^{-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} T^{-1}(\lambda_n) \cos\left(\lambda_n x + \frac{\pi}{4}\right)$$

a les propriétés voulues. Car les inégalités vérifiées par λ_n (*voir* th. 2, § II) montrent d'abord que

$$|f_1^{(n)}(x)| \leq M_n^c \qquad (-\infty < x < \infty; n = 1, 2, \ldots),$$
$$|f_1^{(n)}(0)| \geq \frac{1}{4} 2^{-n} 2^{-\frac{1}{2}} M_n^c \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Il en résulte d'abord comme à la fin du théorème précédent que $F(x) \in C_R^{-2}\{M_n\}$. D'autre part,

$$F^{(n)}(0) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f_1^{(p)}(0) (e^{-x^2})_{x=0}^{(n-p)}.$$

Or $f_1^{(p)}(0)$ a le signe de $\cos\left(\frac{\pi}{4} + p\frac{\pi}{2}\right)$ et, pour $x = 0$, les dérivées d'ordre impair de e^{-x^2} sont nulles tandis que les dérivées d'ordre pair $2k$ ont le signe de

$(-1)^k$. Donc les termes de la somme précédente out tous le même signe, d'où la relation du type cherché

$$|F^{n)}(0)| > |f_1^{n)}(0)| > 4^{-n} 2^{-\frac{1}{2}} M_n' \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

THÉORÈME 9. — *Pour que* $C_R^{-2}\{M_n\} \subset C_R^{-2}\{M_n'\}$ *il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :*

a. $\overline{\lim_n} n^{-\frac{1}{2}} M_n^{\frac{1}{n}} = 0$;

b. $\overline{\lim_n} n^{-\frac{1}{2}} M_n^{\frac{1}{n}} > 0$ *avec* $(M_n')^{\frac{1}{n}} = O\left(M_n^{\frac{1}{n}}\right) (n \to \infty)$.

4. CLASSES $C_R^2\{M_n\}$:

LEMME 3. — *Si* $\pi_n(x)$ *est un polynome de degré n tel que*

$$|\pi_n(x)| \leq M_0 e^{x^2} \qquad (-\infty < x < \infty),$$

on a pour $0 \leq p \leq n$

$$|\pi_n^{(p)}(x)| \leq 4 M_0 K^p n^{\frac{p}{2}} e^{2x^2} \qquad (-\infty < x < \infty),$$

K *étant une constante absolue. On peut prendre*

$$K = 2 + 12(2 + \sqrt{2})\sqrt{e}.$$

On peut écrire

$$\pi_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \sum_{p=0}^{n} a_p H_p(x).$$

$$a_p = (2^p p! \sqrt{\pi})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \pi_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) e^{-x^2} H_p(x)\, dx.$$

L'inégalité de Schwarz et (24) donnent

$$(2^p p!)^{\frac{1}{2}} |a_p| \leq 2^{\frac{1}{2}} M_0 \qquad (0 \leq p \leq n).$$

Ces inégalités, jointes à (22), entraînent une majoration de la dérivée d'ordre n de $e^{\frac{x^2}{2}} \pi_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$, donc aussi de $e^{-x^2} \pi_n(x)$.

Tous calculs faits, on obtient

$$|[e^{-x^2} \pi_n(x)]^{n)}| < 2 M_0 \partial^n n^{\frac{n}{2}} \qquad (-\infty < x < \infty),$$

avec

$$S = 12(2 + \sqrt{2})\sqrt{e}$$

Comme, de plus, $|e^{-x^2} \pi_n(x)| \leq M_0$, il en résulte

$$|[e^{-x^2} \pi_n(x)]^{p)}| \leq 4 M_0 \partial^p n^{\frac{p}{2}} \qquad (0 \leq p \leq n).$$

Comme $\pi_n(x) = e^{x^2} e^{-x^2} \pi_n(x)$, on aboutit, par la formule de Leibniz et les inégalités ci-dessus, à la majoration annoncée.

LEMME 4. — *Si $f(x)$, fonction n fois dérivable sur $(-\infty, \infty)$, vérifie*

$$|f(x)| \leq M_0 e^{Kx^2} \quad \text{et} \quad |f^{(n)}(x)| \leq M_n e^{Kx^2} \qquad (-\infty < x < \infty),$$

on a pour $0 \leq p < n$

$$|f^{(p)}(x)| \leq 8\sqrt{2}(2K)^p \max\left(M_0 n^{-\frac{p}{2}}, M_0^{1-\frac{p}{n}} M_n^{\frac{p}{n}}\right) e^{2Kx^2} \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Considérons la fonction

$$F(u) = f\left(x_0 + 2^{-\frac{1}{2}}\lambda u\right) \qquad (0 < \lambda \leq 1).$$

Les hypothèses faites sur f entraînent

$$|F(u)| \leq M_0 e^{2Kx_0^2} e^{4Ku^2}, \qquad |F^{(n)}(u)| \leq \lambda^n 2^{-\frac{n}{2}} M_n e^{2Kx_0^2} e^{4Ku^2} \qquad (-\infty < u < \infty).$$

Ces inégalités montrent que, si l'on envisage le développement de Taylor d'ordre $(n-1)$ de $F(u)$ autour de $u = 0$, soit

$$F(u) = P_{n-1}(u) + \int_0^u \frac{(u-t)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n)}(t)\, dt,$$

on a

$$|P_{n-1}(u)| \leq \left(M_0 + \sqrt{2}\, 2^{\frac{n}{2}} n^{-\frac{n}{2}} \lambda^n M_n\right) e^{2Kx_0^2} e^{4Ku^2} \qquad (-\infty < u < \infty)$$

(ce résultat s'obtient comme le résultat analogue, pour $\psi_p(x)$, obtenu au cours du théorème 7, § III).

Si l'on applique alors le lemme 3 à $P_{n-1}(u)$ pour $u = 0$, si l'on choisit $\lambda = \min\left(1, M_0 n^{\frac{n}{2}} 2^{-\frac{n}{2}} M_n^{-1}\right)$ et si l'on remarque que

$$P_{n-1}^{(p)}(0) = F^{(p)}(0) = \lambda^p 2^{-\frac{p}{2}} f^{(p)}(x_0) \qquad (0 \leq p < n),$$

on aboutit à l'inégalité annoncée.

THÉORÈME 10. — *Les classes $C_R^2\{M_n\}$ et $C_R^2\{\sqrt{(M_n^2)^0}\}$ sont équivalentes.*

Il suffit de montrer que la première est contenue dans la seconde. Soit $\{n_i\}$ la suite d'indices principaux, relative à la régularisation exponentielle, de $\{M_n^2\}$. Supposons que $f(x) \in C_R^2\{M_n\}$ et que $n_i \leq n < n_{i+1}$. On peut appliquer le lemme 4 à la fonction $f^{(n_i)}(x)$ qui vérifie les inégalités (4) pour $n = n_i$ et $n = n_{i+1}$. Se servant alors de l'égalité (6) écrite pour la suite $\{M_n^2\}$, il vient

$$|f^{(n)}(x)|^2 \leq A^n (M_n^2)^0 e^{4Kx^2}$$

(A indépendant de n), ce qui démontre le théorème.

THÉORÈME 11. — *Il existe une fonction* $F(x)$ *telle que*

$$F(x)\in C_R^2\{M_n\},\qquad |F^{n}(0)|>\alpha^n\sqrt{(M_n^2)^0}\qquad (n=1,2,\dots),$$

α, *constante positive, indépendante de* n.

$L_m(u)$ étant le polynome de Laguerre de degré m, posons

$$\Psi_{2m}(x)=L_m(x^2),\qquad \Psi^*_{2m+1}(x)=\frac{d}{dx}\{L_{m+1}(x^2)e^{-x^2}\},$$

$L_m(x^2)$ et $L_{m+1}(x^2)$ étant inférieurs en module à e^{x^2} on peut leur appliquer le lemme 3, d'où pour $0\leq p\leq n$

$$|\Psi^{(p)}_{2m}(x)|\leq 4.2^{-\frac{p}{2}}K^p(2m)^{\frac{p}{2}}e^{x^2},$$

$$|\Psi^{*(p)}_{2m+1}(x)|\leq 4.2^{-\frac{p-1}{2}}K^{p+1}(2m+2)^{\frac{p+1}{2}}e^{x^2}.$$

D'autre part

$$|\Psi^{(p)}_{2m}(0)|=C_m^p p!\left[\left(\frac{p}{2}\right)!\right]^{-1}>\beta^p(2m)^{\frac{p}{2}}\qquad (p\text{ pair}),$$

$$|\Psi^{*(p)}_{2m+1}(0)|>\beta^p(2m+2)^{\frac{p+1}{2}}\qquad (p\text{ impair}),$$

$$\Psi^{(p)}_{2m}(0)=0\quad (p\text{ impair}),\qquad \Psi^{*(p)}_{2m+1}(0)=0\quad (p\text{ pair}),$$

β étant une constante positive absolue. Donc si l'on pose

$$\Psi_{m+1}(x)=2^{\frac{1}{2}}[4k(2m+2)]^{-\frac{1}{2}}\Psi^*_{2m+1}(x),$$

$$2P_n(x)=\Psi_n(x)+\Psi_{n-1}(x)\qquad (n\text{ entier quelconque}),$$

les polynomes $P_n(x)$ vérifient pour $0\leq p\leq n$

$$a^p|P_n^{(p)}(x)|e^{-x^2}\leq n^{\frac{p}{2}}\leq b^p|P_n^{(p)}(0)|,$$

a et b constantes positives absolues.

Si λ_n est la partie entière d'un nombre $r_n\geq n$ tel que

$$r_n^n S_1^{-1}(r_n)=\overline{\underset{r\geq n}{\text{borne}}}\, r^n S_1^{-1}(r),\qquad S_1(r)=\max_{n\leq r} r^n M_n^{-2},$$

$\{\lambda_n\}$ vérifie les inégalités

$$\lambda_p^n S_1^{-1}(\lambda_p)\leq (M_n^2)^0<e\lambda_n^n S_1^{-1}(\lambda_n)\qquad (p\leq n).$$

Les deux groupes d'inégalités obtenus montrent que

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}S_1^{-\frac{1}{2}}(\lambda_n)P_{\lambda_n}(x)$$

a les propriétés voulues.

THÉORÈME 12. — *Pour que* $C_R^2\{M_n\}\subset C_R^2\{M'_n\}$, *il faut et suffit que*

$$[(M_n^2)^0]^{\frac{1}{n}}=O\left[(M_n'^2)^{\frac{1}{n}}\right]\qquad (n\to\infty).$$

CHAPITRE III.

Tranformées de certaines classes de fonctions par un changement de variable.

1. Introduction ; notions préliminaires. — M. Mandelbrojt ([16] et [18]) a posé et partiellement résolu la question suivante.

Si $f(x)$ appartient à une classe donnée $C_f\{M_n\}$ sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$, à quelle classe appartient, sur la droite entière, la fonction $F(\theta)=f(\cos\theta)$ déduite de $f(x)$ par le changement de variable $x=\cos\theta$? Inversement, sachant qu'une fonction $F(\theta)=f(\cos\theta)$ appartient à une classe donnée $C_R\{M_n\}$, à quelle classe appartient $f(x)$ sur l'intervalle ouvert $(-1, 1)$ ou l'intervalle fermé $[-1, 1]$? Rappelons que $f(x)$ est dite appartenir à $C_f\{M_n\}$ sur $[-1, 1]$ si elle est indéfiniment dérivable sur cet intervalle et y vérifie

$$|f^{(n)}(x)|\leq C^n M_n$$

($n=1, 2, \ldots$; $|x|\leq 1$; C, constante positive pouvant dépendre de f, non de n).

On dit que $f(x)$ appartient à la classe $C_0\{M_n\}$ sur $[-1, 1]$ si elle appartient à $C_f\{M_n\}$ sur tout intervalle fermé intérieur à $(-1, 1)$. M. Mandelbrojt a démontré les résultats suivants :

1° Si $f(x)\in C_f\{M_n\}$ sur $[-1, 1]$, $F(\theta)$ appartient à la classe $C_R\{M_{n+2}^c\}$, M_n^c étant définie par

$$M_n^c=\overline{\text{borne}}_{r\geq 1} r^n S^{-1}(r), \qquad S(r)=\max_{n\leq r} r^n M_n.$$

2° Si $|F^{(n)}(\theta)|<A_n (n=1, 2, \ldots)$ et si $C_R\{A_n'\}$ est une classe dérivable, on a, pour tout $\varepsilon>0$, dans $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$,

$$|f^{(n)}(x)|<\beta^n A_n^a,$$

β, constante indépendante de n, ne dépendant que de $\{A_n'\}$ et de ε, A_n^a étant définie par

$$A_n^a=\overline{\text{borne}}_{r\geq n} r^n T(r), \qquad T(r)=\max_{n\geq 1} r^n A_n.$$

Les notations ci-dessus sont justifiées par l'interprétation géométrique que M. Mandelbrojt a donné des suites M_n^c, M_n^a dans [16]. Dans ce chapitre :

1° Nous trouvons la plus petite classe C_R contenant toutes les transformées $F(\theta)$ des fonctions de la classe $C_f\{M_n\}$ sur $[-1, 1]$ par le changement de variable $x=\cos\theta$. C'est la classe $C_R\{M_n^c\}$;

2° Considérant l'ensemble des fonctions $f(\cos\theta)=F(\theta)$ vérifiant $|F^{(n)}(\theta)|\leq CM_n (n=1, 2\ldots$, C indépendante de $n)$, nous trouvons la plus petite classe C_f sur $[-1, 1]$ et la plus petite classe C_0 sur $(-1, 1)$ contenant toutes

ces fonctions $f(x)$. Ce sont respectivement les classes $C_f\{M_n\}$ et $C_0\{M_n^0\}$, M_n^* étant défini par

$$n^n M_n^* = \overline{\text{borne}}_{r>n} r^{2n}/T(r), \qquad T(r) = \max_{n\geq 1} r^n M^n.$$

Rappelons les propriétés suivantes qui nous seront utiles. $\{M_n^c\}$ s'obtient géométriquement à partir de $\{M_n^0\}$ comme suit. Les points $(x=n, y=\log M_n^c)$ sont situés sur une ligne polygonale convexe obtenue de la façon suivante : pour chacun des contours polygonaux convexes constituant la base exponentielle sur laquelle sont les points $(n, \log M_n^0)$, on prolonge indéfiniment le côté le plus à droite vers les x croissants, et on ne laisse que le contour supérieur de la figure ainsi obtenue.

Soit $\{M_n\}$ une suite (S_x), $\{M_n^c\}$ sa suite régularisée convexe. Les indices principaux (en nombre infini) de $\{M_n\}$ sont les indices n_i tels que $M_{n_i}=M_{n_i}^c$. Les points $(n, \log M_n^c)$ sont sur la ligne polygonale convexe, de pente croissant vers l'infini, ayant pour sommets les points $(n_i, \log M_{n_i})$. Les indices principaux peuvent encore être ainsi définis : si $t\geq 0$, on appelle $D(t)$ la plus haute droite de pente t ne laissant au-dessous d'elle aucun point $(n, \log M_n)$; les indices principaux n_i sont les indices tels que le point $(n_i, \log M_{n_i})$ soit situé sur au moins une droite $D(t)$. Sur chaque $D(t)$ il y a un nombre fini (≥ 1) de points $(n, \log M_n)$. Soit $m(t)$ l'indice du plus à droite de ces points, $t=\log r$, $m(t)=N(r)$. Avec ces notations, on a

$$\log T(r) = \log T(1) + \int_1^r \frac{N(u)}{u}\,du. \tag{A}$$

Nous utiliserons aussi les propriétés suivantes des polynomes de Tchebycheff, énoncés dans [18] et de la régularisation exponentielle (*voir* Mandelbrojt [18], p. 224). On pose

$$T_n(x) = \cos n(\arccos x);$$

$$\begin{cases} (x^2-1)\,T_n^{(k+2)}(x) + (2k+1)\,x\,T_n^{(k+1)}(x) = (n^2-k^2)\,T_n^{(k)}(x), \\ T_{2m}(0) = (-1)^m, \qquad T'_{2m}(0) = 0, \\ T_{2m+1}(0) = 0, \qquad T'_{2m+1}(0) = (-1)^m(2m+1); \end{cases} \tag{B}$$

$$T_n^{(k)}(1) = \frac{n^2(n^2-1)(n^2-2^2)\dots[n^2-(k-1)^2]}{1.3\dots(2k-1)} \qquad (1\leq k\leq n); \tag{C}$$

$$2^{k-1}(ek)^{-k}n^{2k} \leq T_n^{(k)}(1) \leq 2^{k-1}k^{-k}n^{2k} \qquad (1\leq k\leq n); \tag{D}$$

$$(1-x^2)^k\,|T_n^{(k)}(x)| \leq 3^k n^k \qquad (0\leq k\leq n;\ |x|<1). \tag{E}$$

Si $f(x)$, indéfiniment dérivable sur $[-1, 1]$, est telle que

$$|f^{(n)}(x)| \leq \lambda^n M_n \qquad (n=1, 2, \dots;\ \lambda\geq 1),$$

on a

$$|f^{(n)}(0)| \leq (2e\lambda)^n M_n^0 \qquad (n=1, 2, \dots). \tag{F}$$

2. Effet du changement de variable $x=\cos\theta$ sur une classe $C_f\{M_n\}$:

THÉORÈME I. — *Si $f(x)$ appartient sur $[-1, 1]$ à la classe $C_f\{M_n\}$, la fonction $F(\theta)\equiv f(\cos\theta)$ appartient à la classe $C_R\{M_n^c\}$ où $\{M_n^c\}$ est définie à partir de $\{M_n\}$ par les formules*

$$M_n^c = \overline{\text{borne}}_{r>1} r^n/S(r), \qquad S(r) = \max_{n\geq 0} r^n/M_n.$$

On obtient les dérivées de $F(\theta)$ à partir de celles de $f(x)$ au moyen de la formule (où $x_0=\cos\theta$)

$$F^{(n)}(\theta_0) = \sum_{s=1}^{n} \frac{f^{(s)}(x_0)}{s!} \left\{ \frac{D^n}{D\theta^n} (\cos\theta - \cos\theta_0)^s \right\}_{\theta=\theta_0}. \tag{1}$$

Par hypothèse,

$$|f^{(n)}(x)| \leq A^n M_n \qquad (-1\leq x\leq 1,\ n=1, 2, \ldots). \tag{1'}$$

Il en résulte (*voir* Mandelbrojt [18], p. 224)

$$|f^{(n)}(0)| \leq (2eA)^n M_n^0 \qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Soit $H_s(\theta)$ un polynome trigonométrique en θ, d'ordre s. On a

$$|H_s^{(n)}(\theta)| \leq M_0 s^n, \tag{3}$$

M_0 étant le maximum de $|H_s(\theta)|$.

Considérons le développement de Taylor de $f(x)$, d'ordre $(n-1)$, autour de $x=0$, et posons

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \qquad R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt, \qquad \Phi_n(\theta) = R_n(\cos\theta),$$

$$P_n(x) = \sum_{s=0}^{n-1} p_s(x), \qquad p_s(x) = \frac{x^s}{s!} f^{(s)}(0), \qquad \varphi_s(\theta) = p_s(\cos\theta):$$

(2) et (3) entraînent pour tout θ

$$|\varphi_s^{(n)}(\theta)| \leq (2eA)^s M_s^0 [s!]^{-1} s^n \leq (2e^2A)^s M_s^0 s^{n-s}. \tag{4}$$

Soit $\{M_n^0\}$ la suite régularisée exponentielle de $\{M_n\}$, $\{n_i\}$ la suite correspondante d'indices principaux, $\{n_j\}$ la suite des indices de discontinuité. Supposons $n_j\leq n<n_{j+1}$. Comme, pour ces valeurs de n, les points $(n, \log M_n^0)$ sont situés sur une ligne polygonale convexe dont la pente, au point d'abscisse x, est supérieure ou égale à $\log x$, il résulte de (4) que

$$|\varphi_s^{(n)}(\theta)| \leq (2e^2A)^s M_n^0 \qquad (n_j\leq s\leq n<n_{j+1}), \tag{5}$$

$$|\varphi_s^{(n)}(\theta)| \leq (2e^2A)^s M_{n_{j+1}}' n_{j+1}^{n-n_{j+1}} \qquad (n\geq n_{j+1}), \tag{6}$$

$\log M_{n_{j+1}}'$ étant l'ordonnée ($>\log M_{n_{j+1}}^0$) de l'extrémité droite de la base exponentielle de $\{M_n^0\}$ entre n_j et n_{j+1}.

D'autre part, d'après (1) et l'expression de $R_n(x)$, on a

$$\overline{n-s}\,!\,|R_n^{(s)}(x)| \leq A^n M_n \qquad (-1\leq x\leq 1,\ s\leq n).$$

Si, tenant compte de ces inégalités et de (3), on applique la formule (I) à $R_n(x)$, il vient

$$|\Phi_n^{(n)}(\theta)| \leq (1+2e)^n A^n M_n \qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Comme

$$\Phi_{n_j}(\theta) = \sum_{s=n_j}^{n_i-1} \varphi_s(\theta) + \Phi_{n_i}(\theta) = \sum_{s=n_j}^{n_{j+1}-1} \varphi_s(\theta) + \Phi_{n_{j+1}}(\theta) \qquad (n_j \leq n_i < n_{j+1}),$$

on déduit de (5) et (7), puis de (6) et (7), pour $n_j \leq n_i < n_{j+1}$,

$$|\Phi_{n_j}^{(n_i)}(\theta)| \leq (4e^2A)^{n_i} M_{n_i}^0, \qquad |\Phi_{n_i}^{(n_{j+1})}(\theta)| \leq (4e^2A)^{n_{j+1}} M_{n_{j+1}}'.$$

La base exponentielle de $\{M_n\}$ étant un polygone convexe entre $x=n_j$ et $x=n_{j+1}$, ces inégalités entraînent (d'après le chapitre I)

$$|\Phi_{n_j}^{(n)}(\theta)| \leq 2(4e^2A)^n M_n^0 \qquad (n_j \leq n < n_{j+1}). \tag{8}$$

Comme

$$f(x) = \sum_{s=0}^{n_j-1} p_s(x) + R_{n_j}(x), \qquad \max\left(M_{n_\lambda}' n_\lambda^{n-n_\lambda},\ M_n^0\right)_{1\leq\lambda\leq j} = M_n^c \quad (n_j \leq n < n_{j+1}),$$

il résulte de (6) et (8)

$$|F^{(n)}(\theta)| \leq 2n(4e^2A)^n M_n^c \leq (8e^2A)^n M_n^c \qquad (n_j \leq n < n_{j+1}),$$

j pouvant être choisi quelconque, ce résultat vaut pour tout $n \geq 1$ et prouve le théorème.

Théorème 2. — *Il existe une fonction $f^*(x)$ [avec $F^*(\theta) = f^*(\cos\theta)$] telle que, α étant une constante positive indépendante de n,*

$$f^*(x) \in C_f\{M_n\} \quad \textit{sur } [-1, 1], \qquad \left|F^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \geq \alpha^n M_n^c \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

D'après la formule (I) appliquée pour $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$F^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^s \frac{f^{(s)}(0)}{s!} \left\{\frac{D^n}{Du^n}(\sin u)^s\right\}_{u=0}.$$

Or, les $\beta_p (p=1, 2, \ldots)$ étant des coefficients positifs,

$$(\sin u)^s = u^s - \beta_1 u^{s-2} + \ldots + (-1)^p \beta_p u^{s+2p} + \ldots.$$

Donc, en posant $s!\,\delta_s = n!\,\beta_{\frac{n-s}{2}} > 0$, on a

$$F^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n |f^{(n)}(0) - \delta_{n-2} f^{(n-2)}(0) + \delta_{n-4} f^{(n-4)}(0) \ldots]. \tag{9}$$

Posons

$$p_n(x) = \frac{1}{2}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} T_n\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}(-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} T_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right), \qquad P_n(\theta) = p_n(\cos\theta),$$

$$r_n(x) = p_n(2x), \qquad R_n(\theta) = r_n(\cos\theta).$$

Dans ces formules, $T_n(x) = \cos n(\arccos x)$ est le polynome de Tchebycheff de degré n, $\left[\frac{n}{2}\right]$ et $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ désignent les parties entières respectives de $\frac{n}{2}$ et $\frac{n+1}{2}$.

Il résulte de (B) que $p_n^{(k)}(0)$ a le signe de $(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}$.
Comme $r_n^{(k)}(0) = 2^k p_n^{(k)}(0)$, (9) peut alors s'écrire (pour $f = p_n$)

$$\left|P_n^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \frac{1}{2^k}|r_n^{(k)}(0)| - \frac{1}{2^{k-2}}\delta_{k-2}|r_n^{(k-2)}(0)| + \dots.$$

Mais (9) appliquée à $R_n(\theta)$ donne aussi

$$\left|R_n^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = |r_n^{(k)}(0)| + \delta_{k-2}|r_n^{(k-2)}(0)| + \dots$$

La comparaison de ces deux formules et le fait que l'on a $\left|R_n^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \geq \frac{1}{2}n^k$ d'après l'expression directe de $R_n(\theta)$ conduisent à

$$(-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} P_n^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^k \qquad (k \text{ entier} \geq 0). \tag{10}$$

De plus, d'après (E) on a

$$|p_n^{(k)}(x)| \leq 4^k n^k \qquad (-1 \leq x \leq 1,\ k \text{ entier} \geq 0). \tag{11}$$

Soit maintenant λ_n la partie entière d'un nombre $r_n \geq 1$ tel que

$$r_n^n S^{-1}(r_n) = \overline{\text{borne}}_{r \geq 1} r^n S^{-1}(r) = M_n^c.$$

On a aussi

$$\lambda_n^n S^{-1}(\lambda_n) \geq 2^{-n} M_n^c.$$

Soit alors

$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} S^{-1}(\lambda_n) p_{\lambda_n}(x).$$

D'après (11) et les relations précédentes,

$$|f^{*(k)}(x)| \leq 4^k \sum_{\lambda_n \geq k} 2^{-n} \frac{\lambda_n^k}{S(\lambda_n)} < 2.4^k \overline{\text{borne}}_{r \geq k} \frac{r^k}{S(r)} = 2.4^k M_k^0 \leq 2.4^k M_k.$$

D'autre part, d'après (10) et les relations précédentes,

$$\left|F^{*(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \geq \frac{1}{2.4^k} \frac{\lambda_k^k}{S(\lambda_k)} \geq \frac{1}{2.8^k} M_k^c \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

$f^*(x)$ a donc bien les propriétés voulues.
On peut exprimer comme suit les théorèmes 1 et 2 :

La plus petite classe C_R *contenant toutes les transformées par le changement de*

variable $x=\cos\theta$ *des fonctions* $f(x)$ *appartenant sur* $[-1, 1]$ *à* $C_f\{M_n\}$. *est* $C_R\{M_n^{\overline{c}}\}$.

3. Effet du changement de variable $\cos\theta = x$ sur des fonctions périodiques d'une classe $C_R\{M_n\}$. — Nous allons maintenant supposer qu'une fonction de $\cos\theta$, soit $f(\cos\theta)$, est telle que $F(\theta)\equiv f(\cos\theta)\in C_R\{M_n\}$, et nous allons chercher à quelle classe C_f appartient $f(x)$ sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1. — *Soit la fonction de* X

$$\varphi_s(X) = \frac{(\operatorname{Arc}\cos X - \operatorname{Arc}\cos x)^s}{s!}$$

(x *est une constante;* s *un entier* ≥ 1).

On a pour tout entier $n\geq s$

$$\left|\varphi_s^{(n)}(X)_{X=x}\right| \leq (\sqrt{1-x^2})^{s-2n} 6^n n^{n-s} \qquad (|x|<1).$$

Étudions d'abord le cas où $s=1$. On voit par récurrence que

$$\varphi_1^{(n)}(X) = (1-X^2)^{\frac{1}{2}-n} P_{n-1}(X),$$

où $P_{n-1}(X)$ est un polynome en X de degré $(n-1)$ défini par la formule de récurrence

$$P_0(X)=-1, \qquad P_{n-1}(X)=(1-X^2)P'_{n-2}(X)-(2n-3)XP_{n-2}(X).$$

Comme $\left(-\sqrt{1-X^2}P'_{n-2}\right)$ est la dérivée par rapport à θ de $P_{n-2}(\cos\theta)$, polynome trigonométrique d'ordre $(n-2)$, cette quantité est bornée en module par μ_{n-2}, maximum du module de $P_{n-2}(X)$ sur $[-1, 1]$. On déduit alors de la relation de récurrence

$$|\varphi_1^{(n)}(X)| \leq (1-X^2)^{\frac{1}{2}-n} 3^{n-1}(n-1)! \qquad (-1<X<1).$$

L'inégalité du lemme est alors vraie *a fortiori* (pour $s=1$).

Dans le cas général $\varphi_s^{(n)}(X)$ au point $X=x$ peut se calculer en prenant le produit par $n!(s!)^{-1}$ du coefficient de $(X-x)^n$ dans le développement limité à l'ordre n de $\varphi_1^s(X)$ autour de $X=x$. D'après les résultats obtenus pour $\varphi_1(X)$, on voit que

$$\varphi_s^{(n)}(X)_{X=x} = (\sqrt{1-x^2})^{s-2n} P(x),$$

$$\left|\varphi_s^{(n)}(X)_{X=x}\right| < n!(s!)^{-1}(\sqrt{1-x^2})^{s-2n} 3^{n-1} C_{n-1}^{s-1},$$

$P(x)$ étant un polynome. Comme $C_{n-1}^{s-1} < 2^{n-1}$, le lemme en résulte.

Théorème 3. — $\{M_n\}$ *étant une suite* (S_ν), C *une constante positive indépendante*

de n, si une fonction $f(\cos\theta) = F(\theta)$, *indéfiniment dérivable, vérifie pour tout* θ

$$|F^n(\theta)| \leq CM_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

on a, pour $-1 \leq x \leq 1$, α *étant une constante* (>0) *absolue*

$$f^n(x) \qquad C\alpha^n M_n^* \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$\{M_n^*\}$ *étant définie par*

$$n^n M_n^* = \overline{\text{borne}}_{r \geq n} r^{2n} T^{-1}(r), \qquad T(r) = \max_{n \geq 1} r^n M_n^{-1}.$$

Il est clair que l'on peut supposer $C = 1$, c'est-à-dire

$$|F^p(\theta)| \leq M_p \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{12}$$

sans diminuer la généralité. On a

$$F(\theta) = f(\cos\theta) = a_0 - \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\theta.$$

Les relations suivantes, dont la première résulte de (12)

$$a_m \leq 2T^{-1}(m) \qquad (m \geq 1),$$
$$2|T_m^{(p)}(x)| \leq 4^p p^p m^{2p} \qquad (1 \leq p \leq m;\ |x| \leq 1)$$

montrent que $f(x)$ est développable en une série de polynomes de Tchebycheff, absolument et uniformément convergente, ainsi que toutes ses dérivées, sur $[-1, 1]$.

Nous allons, selon un procédé déjà employé au chapitre I (§ II, lemme 4), décomposer $F(\theta)$ en somme de deux fonctions $F_1(\theta)$ et $F_2(\theta)$, de la façon suivante (n désignant un entier positif quelconque, mais désormais fixé). Soit $x_n(\lambda)$ la fonction continue de la variable réelle λ, égale à 1 pour $|\lambda| \leq n$, à 0 pour $|\lambda| \geq 2n$, linéaire entre $\lambda = n$ et $\lambda = 2n$,

$$k_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} x_n(\lambda)\, d\lambda.$$

$$F_1(\theta) = F(\theta) - F_2(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta - t) k_n(t)\, dt.$$

Soit $f_1(x)$ la fonction associée à $F_1(\theta)$ par

$$F_1(\theta) = a_0 + \sum_{m=1}^{2n} x_n(m) a_m \cos m\theta, \qquad f_1(x) = a_0 - \sum_{m=1}^{2n} x_n(m) a_m T_m(x).$$

Il résulte de (12) et de la dernière expression de $F_1(\theta)$ que

$$|F_1^{(p)}(\theta)| \leq 4M_p, \qquad |F_2^{(p)}(\theta)| \leq 4M_p \qquad (p = 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

De plus, le développement en séries de cosinus de $F_2(\theta)$ commence par un

terme d'ordre supérieur à n. On peut donc appliquer à $F_2(\theta)$ le lemme 3 (chap. I, § II). Donc (13) entraîne

$$F_2^{(p)}(0) \leq 8M_p' \quad (p = 1, 2, \ldots). \qquad |F_2^{(p)}(0)| \leq 8M_k n^{p-k} \quad (p \leq k).$$

Prenant $K = N(n)$ (notations de l'introduction), il vient

$$|F_2^{(p)}(0)| \leq 8M_p', \qquad M_p' = \overline{\text{borne}}_{r>n} r^p T^{-1}(r) \qquad (p = 1, 2, \ldots). \tag{14}$$

Étudions d'abord $f_1(x)$. Comme

$$f_1^{(n)}(x) = \sum_{m=n}^{m=2n} a_m x_n(m) T_m^{(n)}(x),$$

les inégalités du début sur $|a_m|$ et $|T_m^{(n)}(x)|$ donnent

$$|f_1^{(n)}(x)| \leq n! n^{n} \overline{\text{borne}}_{m>n} m^{2n} T^{-1}(m) \leq 8^n M_n' \qquad (|x| \leq 1).$$

Pour prouver le théorème, il suffit maintenant de montrer que, si l'on pose $F_2(\theta) = f_2(\cos\theta)$, on a

$$n^n |f_2^{(n)}(x)| \leq \Lambda^n M_{2n}' \qquad (|x| \leq 1) \tag{15}$$

(M_{2n}' défini en (14), A constante indépendante de n).

De façon générale, si $F(\theta) = f(\cos\theta)$ est une fonction de θ indéfiniment dérivable dont chaque dérivée est bornée sur la droite entière, $f(x)$ est indéfiniment dérivable sur $[-1, 1]$, et ses dérivées, pour $|x| < 1$, sont données par

$$f^{(n)}(x) = \sum_{s=1}^{n} F^{(s)}(0) \left\{ \frac{d^n}{dX^n} \frac{(\operatorname{Arc\,cos} X - \operatorname{Arc\,cos} x)^s}{s!} \right\}_{X=x} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{II (16)}$$

On voit par récurrence que

$$f^{n}(x) = (\sin\theta)^{1-2n}[(-1)^n \sin^{n-1}\theta F^{(n)}(\theta) + \alpha_{n,n-1}(\theta)\sin^{n-2}\theta F^{(n-1)}(\theta) + \ldots + \alpha_{n,1}(\theta)F'(\theta)],$$

où $\alpha_{n,s}(\theta)$ est un polynome trigonométrique d'ordre $(n-s)$, le crochet ayant d'ailleurs toutes ses dérivées nulles jusqu'à l'ordre $(n-1)$ exclu pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. Quand $x \to 1$ ou $x \to -1$, le second membre tend vers le produit par $\frac{1}{(2n-1)!}$ de la dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$ du terme entre crochets. Comme les dérivées d'ordre impair de $F(\theta)$ sont nulles pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, on a

$$f^{n}(1) = \beta_{n,2n}F^{(2n)}(0) + \beta_{n,2n-2}F^{(2n-2)}(0) + \ldots + \beta_{n,2}F^{(2)}(0), \tag{17}$$

où les coefficients β sont indépendants de la fonction $F(\theta)$. On a une formule analogue pour $x = -1$ et $\theta = \pi$.

Montrons d'abord que $f_2(x)$ vérifie la relation (15) pour $x = \pm 1$, $x = 1$, par

exemple. Nous allons évaluer $f_2^{(n)}(1)$ au moyen de la formule (17). Les coefficients β étant indépendants de F, on peut les calculer par identification à partir de la fonction particulière $f(x) = T_N(x)$ associée à $F(\theta) = \cos N\theta$, ce qui donne

$$f^{(n)}(1) = \frac{N^2(N^2-1)(N^2-2^2)\dots[N^2-(n-1)^2]}{1.3\dots 2n-1}$$
$$= (-1)^n[\beta_{n,2n}N^{2n} - \beta_{n,2n-2}N^{2n-2}\dots] \quad \text{(tout N)}.$$

Ceci montre que $(-1)^n\beta_{n,2s} = \gamma_{n,2s} > 0$ et que

$$\gamma_{n,2n}x^{2n} - \gamma_{n,2n-2}x^{2n-2} - \dots - \gamma_{n,2}x^2 = \frac{x^2(x^2+1)(x^2+2^2)\dots[x^2+(n-1)^2]}{1.3\dots(2n-1)}.$$

Divisant par x^{2n} les deux membres et faisant $x = n$ dans cette identité, on obtient

$$\gamma_{n,2n} + \frac{\gamma_{n,2n-2}}{n^2} + \dots + \frac{\gamma_{n,2s}}{n^{2n-2s}} + \dots$$
$$\frac{\gamma_{n,2}}{n^{2n-2}} = \frac{1}{1.3\dots(2n-1)}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\dots\left[1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right] < \frac{2^n}{n^n}2^n,$$

car

$$\frac{1}{1.3\dots(2n-1)} = \frac{2^n n!}{(2n)!} < 2^n\frac{1}{n^n}.$$

Comme $\gamma_{n,2s} = |\beta_{n,2s}|$, il vient

$$|\beta_{n,2s}| < 4^n n^{n-2s} \qquad (s \leq n). \tag{18}$$

Cette inégalité, jointe à (14), montre que

$$|\beta_{n,2s}| \cdot |F_2^{(2s)}(0)| \leq \frac{4^n}{n^n}8\,\overline{\text{Borne}}_{r\geq n}\frac{r^{2s}}{T(r)}n^{2n-2s} < 8\cdot\frac{4^n}{n^n}\,\overline{\text{Borne}}_{r\geq n}\frac{r^{2n}}{T(r)} = 8\cdot\frac{4^n}{n^n}M_{2n} \qquad (s \leq n).$$

Portant ces valeurs dans (17), on a l'inégalité (15) pour $x = 1$

$$n^n|f_2^{(n)}(1)| \leq 8^{n+1}M_{2n}. \tag{15'}$$

On raisonnerait de même pour $x = -1$.

De plus, (17) et (18) sont vrais quel que soit l'entier n.

Donc si $k < n$,

$$|f_2^{(k)}(1)| \leq 8\cdot\frac{4^k}{k^k}\sum_{s=1}^{k}\overline{\text{borne}}_{r\geq n}\frac{r^{2s}}{T(r)}k^{2k-2s} < 8k\frac{4^k}{k^k}\,\overline{\text{borne}}_{r\geq n}\frac{r^{2k}}{T(r)} = \frac{8^{k+1}}{k^k}M_{2k}.$$

Cette inégalité nous servira plus loin :

$$k^k|f_2^{(k)}(1)| \leq 8^{k+1}M_{2k} \qquad (k < n). \tag{19}$$

Il suffit maintenant de prouver (15) pour $|x| < 1$, ou même $0 < x < 1$. Considérons le développement de Taylor de $f_2(x)$, d'ordre $(n-1)$, autour

de $x=1$ et posons

$$f_2(x)=p_n(x)+r_n(x), \qquad p_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_k(x), \qquad \varphi_k(x)=f_2^{k)}(1)\frac{(x-1)^k}{k!},$$

$$\varphi_k(\cos\theta)=\Phi_k(\theta), \qquad r_n(\cos\theta)=\mathrm{R}_n(\theta).$$

(19) montre que pour $k<n$

$$|\Phi_k^{(2n)}(\theta)|\leq 8^{k-1}\frac{2^k k^{2n}}{k^k(k!)}\mathrm{M}_{2k}\leq 8^{k-1}(2e)^k k^{2n-2k}\mathrm{M}_{2k}\leq 8(16e)^k\mathrm{M}_{2n},$$

car les points $(p, \log \mathrm{M}_p)$ $(p=1, 2, \ldots)$ sont sur une ligne convexe de pente supérieure ou égale à n.

Revenant alors à $r_n(x)=f_2(x)-p_n(x)$, utilisant l'inégalité ci-dessus et (14), on obtient

$$|\mathrm{R}_n^{(2n)}(\theta)|\leq(2e)^{-1}(32e)^n\mathrm{M}_{2n}. \tag{20}$$

D'autre part, d'après la définition de $r_n(x)$, on a

$$r_n(1)=r_n'(1)=\ldots=r_n^{(n-1)}(1)=0.$$

La formule (I) du théorème 1 donne pour $\theta_0=0$,

$$\mathrm{E}_n(0)=\sum_{s=1}^{n}\frac{(-2)^s f^{s)}(1)}{s!}\frac{\mathrm{D}^n}{\mathrm{D}\theta^n}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2s}\Big|_{\theta=0}.$$

Dans la formule ci-dessus seules interviennent en fait les valeurs $f^{s)}(1)$ pour $2s\leq n$. Les conditions vérifiées par $r_n(x)$ entraînent donc

$$\mathrm{R}_n(0)=\mathrm{R}_n'(0)=\ldots=\mathrm{R}_n^{(2n-1)}(0)=0.$$

Ce fait joint à (20) montre que pour $s<2n$ et $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

$$|\mathrm{R}_n^{(s)}(\theta)|\leq\frac{1}{2e}(32e)^n\mathrm{M}_{2n}\frac{\theta^{2n-s}}{(2n-s)!}\leq\frac{1}{2e}(16e^2\pi)^n\mathrm{M}_{2n}\frac{(\sin\theta)^{2n-s}}{n^{2n-s}}$$

ou, comme un $\theta=\sqrt{1-x^2}$ pour $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$,

$$|\mathrm{R}_n^{(s)}(\theta)|\leq\frac{1}{2e}(16e^2\pi)^n\mathrm{M}_{2n}\frac{(\sqrt{1-x^2})^{2n-s}}{n^{2n-s}} \qquad \left(s<2n,\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right). \tag{21}$$

Enfin $f_2''(x)=r_n''(x)$. La formule (II) (16), écrite pour $r_n''(x)$, avec les notations du lemme 1, donne donc

$$f_2''(x)=\sum_{s=1}^{n}\varphi_{\lambda,x}''(\lambda)\mathrm{R}^{s)}(\theta).$$

Utilisant alors le résultat du lemme 1 et (20), il vient

$$n^n|f_2''(x)|\leq(2e)^{-1}12^n(16e^2\pi)^n\mathrm{M}_{2n} \qquad (0\leq x<1). \tag{15''}$$

De la même façon, on verrait que (15″) vaut pour $-1<x\leq 0$.
On a démontré (15′) et (15″), c'est-à-dire (15), donc le théorème.

Remarque. — Si l'on suppose $\overline{\lim_{n\to\infty}} M_n^{\frac{1}{n}}<+\infty$, la classe $C_R\{M_n\}$ est identique à la classe $C_R(1)$ et se compose des polynomes trigonométriques. Le changement de variable $x=\cos\theta$ fait correspondre à $C_R(1)$ l'ensemble des polynomes en x.

THÉORÈME 4. — *Il existe une fonction* $f(\cos\theta)=F(\theta)$ *telle que*

$$|F^{n}(\theta)|\leq M_n, \qquad |f^{n}(1)|>\alpha^n M_n^2 \qquad (n=1,2,\ldots),$$

α, *constante positive indépendante de* n.

Soit h_n la partie entière d'un nombre $r_n(>n)$ tel que

$$r_n^{2n}T^{-1}(r_n)=\overline{\text{borne}}_{r>n}\, r^{2n}T^{-1}(r), \qquad T(r)=\max_{n\geq 1} r^n M_n.$$

On a, par conséquent, k étant un entier quelconque

$$h_n^k T^{-1}(h_n)\leq M_k^2\leq e^2 h_n^{2n} n^{-n} T^{-1}(h_n).$$

Ces inégalités montrent que les fonctions associées

$$F(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}T^{-1}(h_n)\cos h_n\theta, \qquad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}T^{-1}(h_n)T_{h_n}(x)$$

ont les propriétés voulues. Car elles entraînent, compte tenu de

$$|\cos^{k}(h_n\theta)|\leq h_n^k, \qquad T_{h_n}^{k}(1)\leq 2^{k-1}(ek)^k n^{2k},$$

les inégalités suivantes qui prouvent le théorème

$$|F^{(k)}(\theta)|\leq M_k^2, \qquad f^{k}(1)\geq (2e^2)^{-1}e^{-k}M_k^2 \qquad (k=1,2,\ldots).$$

On peut chercher aussi, connaissant les bornes des dérivées successives de $F(\theta)=f(\cos\theta)$ sur la droite, à quelle classe appartient $f(x)$ sur $(-1,1)$. On a le théorème suivant :

THÉORÈME 5. — $\{M_n\}$ *et* $f(\cos\theta)=F(\theta)$ *remplissant les conditions de l'énoncé du théorème* 3, *on a*

$$|f^{n}(x)|\leq C\alpha^n(\sqrt{1-x^2})^{-n}M_n^n$$

($n=1,2,\ldots;\ |x|<1$; α, *constante absolue*), *avec*

$$M_n^n=\overline{\text{borne}}_{r>n}\, r^n T^{-1}(r), \qquad T(r)=\max_{n\geq 1} r^n M_n^{-1}.$$

La démonstration est analogue à celle du théorème 3. Nous pouvons supposer $C=1$, et décomposer $F(\theta)$, comme pour le théorème 3, en somme

de $F_1(\theta)$ et $F_2(\theta)$. Comme

$$f_1(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{2n} a_m x(m) T_m(x), \qquad |x(m)a_m| \leq 2T^{-1}(m),$$

$$T_m^{(n)}(x) \leq 2^{-1} 4^n n^{-n} m^{2n} \leq 2^{-1} 8^n m^n \qquad (m \leq 2n).$$

$f_1(x)$ vérifie

$$|f_1^{(n)}(x)| \leq 16^n M_n^n \qquad (|x| \leq 1),$$

donc *a fortiori* l'inégalité du lemme (avec $\alpha = 16$).

Reste à montrer que $f_2^{(n)}(x)$ vérifie une inégalité analogue. Plaçons-nous, par exemple, dans le cas où $0 \leq x < 1$, et considérons le développement de Taylor de $f_2(x)$, par rapport à $x = 1$, d'ordre $\left[\frac{n}{2}\right]$, partie entière de $\frac{n}{2}$,

$$f(x) = p_{\left[\frac{n}{2}\right]}(x) + r_{\left[\frac{n}{2}\right]}(x).$$

Avec des notations analogues à celles du théorème 3 et en utilisant les relations (19), on obtient successivement, comme au théorème 3, des inégalités analogues à (20) et (21)

$$\left|R_{\left[\frac{n}{2}\right]}^{(n)}(0)\right| \leq 8(32e)^{\frac{n}{2}} M_n',$$

$$\left|R_{\left[\frac{n}{2}\right]}^{(n)}(0)\right| \leq 8(8\pi^2 e^2)^{\frac{n}{2}} n^{s-n} M_n' (\sqrt{1-x^2})^{n-s} \qquad \left(s \leq n,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Cette inégalité, le lemme 1, et la formule (II) (16) donnent alors

$$|f_2^{(n)}(x)| \leq 8 \cdot 16^n (8\pi^2 e^2)^{\frac{n}{2}} (\sqrt{1-x^2})^{-n} M_n'.$$

Comme $M_n' = M_n^n$, le théorème est démontré.

THÉORÈME 6. — *$\{M_n\}$ étant une suite (S_α), il existe une fonction $f(\cos\theta) = F(\theta)$ telle que, β étant une constante indépendante de n,*

$$|F^{(n)}(\theta)| \leq M_n, \qquad \left|f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \geq 3^n M_n^n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Soit λ_n la partie entière d'un nombre $r_n (\geq n)$ tel que

$$r_n^n T^{-1}(r_n) = \overline{\text{borne}}_{r \geq n} r^n T^{-1}(r) = M_n^n.$$

On a alors

$$\lambda_n^n T^{-1}(\lambda_n) = e^{-1} M_n^n, \qquad \lambda_n^p T^{-1}(\lambda_n) \leq M_n^p \qquad (p \text{ entier quelconque}).$$

Soit $p_n(x)$ le polynome défini et utilisé dans la démonstration du théorème 2. Les inégalités ci-dessus et les inégalités (10) et (11) relatives à $p_n(x)$ montrent

que

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}T^{-1}(\lambda_n)p_{\lambda_n}(x)$$

a les propriétés voulues.

A l'aide des théorèmes précédents, on peut, en supposant que

$$f(\cos\theta)=F(\theta)\in C_R\{M_n\},$$

chercher à quelle classe appartient $f(x)$, d'une part sur l'intervalle fermé $[-1,1]$ (classe C_f), d'autre part sur l'intervalle ouvert $(-1,1)$ (classe C_0). On a le théorème suivant :

THÉORÈME 7. — *Soit* $\{M_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ *une suite positive donnée, telle que*

$$\lim_{n\to\infty}M_n^{\frac{1}{n}}=+\infty.$$

Si $f(\cos\theta)=F(\theta)$ *appartient à la classe* $C_R\{M_n\}$, $f(x)$ *appartient à la classe* $C_f\{n^nM_{2n}^c\}$ *sur* $[-1,1]$ *et à la classe* $C_0\{M_n^c\}$ *sur* $(-1,1)$.

Si, de plus, $\overline{\lim_n} n^{-1}M_n^{\frac{1}{n}}>0$ (*c'est-à-dire si* $C_R\{M_n\}$ *contient* $C_R\{n!\}$), *il existe deux fonctions* $f_1(\cos\theta)=F_1(\theta)$ *et* $f_2(\cos\theta)=F_2(\theta)$ *appartenant à* $C_R\{M_n\}$ *et telles que l'on ait*

$$|f_1^{(n)}(1)|\geq\alpha^n n^{-n}M_{2n}^c \quad (n=1,2,\ldots) \quad \text{et} \quad |f_2^{(n)}(0)|\geq\alpha^n M_n^c \quad (n=1,2,\ldots),$$

α *étant une constante absolue.*

Soit

$$T(r)=\max_{n\geq 1}r^nM_n^{-1}, \qquad T_1(r)=\max_{n\geq 1}r^n\lambda^{-n}M_n^{-1}.$$

On a

$$T_1(r)=T(\lambda^{-1}r).$$

En appliquant le théorème 3 à $\{\lambda^nM_n\}$ $(\lambda>1)$ au lieu de $\{M_n\}$, on voit que si

$$|F^{(n)}(0)|\leq\lambda^nM_n \qquad (n=1,2,\ldots),$$

on a pour $-1\leq x\leq 1$ et $n=1,2,\ldots$

$$|f^{(n)}(x)|\leq\frac{\alpha^n}{n^n}\overline{\text{borne}}_{r\geq n}\frac{r^{2n}}{T_1(r)}=\frac{\alpha^n}{n^n}\overline{\text{borne}}_{r\geq n}\frac{r^{2n}}{T\left(\frac{r}{\lambda}\right)}=\frac{\alpha^n}{n^n}\lambda^{2n}\overline{\text{borne}}_{r\geq\frac{n}{\lambda}}\frac{r^{2n}}{T(r)}=\frac{\alpha^n}{n^n}\lambda^{2n}M_n^{c\lambda}.$$

On a aussi pour $-1<x<1$

$$|f^{(n)}(x)|\leq\frac{\alpha^n}{(\sqrt{1-x^2})^n}\overline{\text{borne}}_{r\geq n}\frac{r^n}{T_1(r)}=\frac{(\alpha\lambda)^n}{(\sqrt{1-x^2})^n}\overline{\text{borne}}_{r\geq\frac{n}{\lambda}}\frac{r^n}{T(r)}=\frac{(\alpha\lambda)^n}{(\sqrt{1-x^2})^n}M_n^{c\lambda}$$

$$(n=1,2,\ldots).$$

Ces inégalités prouvent la première partie du théorème, car

$$M_n^{*(A)} = \overline{\text{borne}}_{r>\frac{n}{A}} \frac{r^{2n}}{T(r)} \leq \overline{\text{borne}}_{r>1} \frac{r^{2n}}{T(r)} = M_{2n}^c$$

et

$$M_n^{*A} = \overline{\text{borne}}_{r>\frac{n}{A}} \frac{r^n}{T(r)} \leq \overline{\text{borne}}_{r>1} \frac{r^n}{T(r)} = M_n^c.$$

Plaçons-nous maintenant dans le cas où $\underline{\lim} n^{-1} M_n^{\frac{1}{n}} > 0$. Cette hypothèse équivaut à

$$\overline{\lim_{r>1}} r^{-1} \log T(r) < \infty.$$

Car $M_n > C^n n^n$ entraîne

$$T(r) = \max_{n>1} r^n M_n^{-1} < \max_{n>1} r^n (Cn)^{-n} < e^{\frac{r}{Ce}} \quad \text{ou} \quad Ce \log T(r) < r.$$

et inversement $\log T(r) \leq Br$ entraîne

$$M_n \geq M_n^c = \overline{\text{borne}}_{r>1} r^n T^{-1}(r) \geq \overline{\text{borne}}_{r>1} r^n e^{-Br} = n^n (Be)^{-n}.$$

La relation (A) de l'introduction et le fait que $N(r)$ croit avec r montrent que $\overline{\lim_{r>1}} r^{-1} \log T(r) < \infty$ équivaut à $\overline{\lim_{r>1}} r^{-1} N(r) < \infty$ ou encore à $\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{-1} T(n) < \infty$.

L'hypothèse de la seconde partie de l'énoncé équivaut donc à

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{-1} N(n) < +\infty. \tag{22}$$

Or, avec les notations de la page précédente,

$$M_n^{*A} = \begin{cases} n^{-n} M_{2n}^c & \text{si } N(A^{-1}n) \leq 2n. \\ (A^{-2}n)^n T^{-1}(A^{-1}n) & \text{si } N(A^{-1}n) > 2n. \end{cases}$$

et

$$M_n^{*A} = \begin{cases} M_n^c & \text{si } N(A^{-1}n) \leq n, \\ (A^{-1}n)^n T^{-1}(A^{-1}n) & \text{si } N(A^{-1}n) > n. \end{cases}$$

Si (22) a lieu, il existe une constante k telle que $N(r) < kr (r \geq 1)$.

Les formules précédentes montrent que, si l'on prend $A = k$,

$$M_n^{*k} = n^{-n} M_{2n}^c \quad \text{et} \quad M_n^{*(k)} = M_n^c.$$

Il en résulte que les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$, construites pour les théorèmes 4 et 6 appliqués à la suite $\{K^n M_n\}$, possèdent les propriétés énoncées dans le théorème 7.

Remarque. — *Lorsque la condition* $\underline{\lim_n} n^{-1} M_n^{\frac{1}{n}} > 0$ *n'est pas vérifiée, c'est*

à-dire lorsqu'il existe une suite infinie d'entiers $\{n_i\}$ *tels que*

$$\lim_{i\to\infty} n_i^{-1}\,\mathrm{N}(n_i) = +\infty, \tag{23}$$

il n'existe pas de fonction $f_1(x)$ *telle que,* $f_1(\cos\theta)$ *appartenant à* $\mathrm{C_R}\{\mathrm{M}_n\}$, *avec* $m_n = \max_{|x|\leq 1} |f^{(n)}(x)|$, *toutes les fonctions* $f(x)$ *telles que* $f(\cos\theta)\in \mathrm{C_R}\{\mathrm{M}_n\}$ *appartiennent à* $\mathrm{C}_f\{m_n\}$ *sur* $[-1, 1]$.

En effet, si $\mathrm{F}_1(\theta)\in \mathrm{C_R}\{\mathrm{M}_n\}$, il existe un entier A tel que

$$|\mathrm{F}_1^{(n)}(0)| \leq \mathrm{A}^n \mathrm{M}_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

On a vu qu'il en résulte

$$|f_1^{(n)}(x)| \leq n^{-n}(\mathrm{A}^2\alpha)^n \mathrm{M}_n^{*(\mathrm{A})} \qquad (n = 1, 2, \ldots; |x|\leq 1). \tag{24}$$

Soit alors $f_{2\mathrm{A}}(x)$ la fonction du théorème 4 relative à la suite $\{(2\mathrm{A})^n \mathrm{M}_n\}$. D'après le théorème 4, si $m'_n = \max_{|x|\leq 1} |f_{2\mathrm{A}}^{(n)}(x)|$, on a

$$m'_n \geq n^{-n}\beta^n \mathrm{A}^{2n} \mathrm{M}_n^{*(2\mathrm{A})} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{25}$$

Mais, en raison de (23) et des formules, rappelées plus haut, donnant une expression de $\mathrm{M}_n^{*(\mathrm{A})}$, on a, pour $\mathrm{N}_i = 2\mathrm{A}n_i$ et i assez grand,

$$[\mathrm{M}_{\mathrm{N}_i}^{*(2\mathrm{A})}/\mathrm{M}_{\mathrm{N}_i}^{*(\mathrm{A})}]^{\frac{1}{\mathrm{N}_i}} \geq 2^{\frac{\mathrm{N}(n_i)}{2\mathrm{A}n_i} - 1}.$$

Le second membre, d'après (23), tend vers $(+\infty)$ avec i.
D'après (24) et (25), on a *a fortiori*

$$\lim_{i\to\infty} [m'_{\mathrm{N}_i}/m_{\mathrm{N}_i}]^{\frac{1}{\mathrm{N}_i}} = +\infty,$$

ce qui prouve que $f_{2\mathrm{A}}(x)$ n'appartient pas à $\mathrm{C}_f\{m_n\}$ sur $[-1, 1]$.

De plus, il peut arriver que toutes les fonctions $f(x)$ *telles que* $\mathrm{F}(\theta)\in \mathrm{C_R}\{\mathrm{M}_n\}$ *appartiennent à une classe strictement plus petite que* $\mathrm{C}_f\{n^{-n}\mathrm{M}_{2n}^c\}$ *sur* $[-1, 1]$.

On peut le voir par l'exemple suivant. Prenons $\mathrm{N}(r) = r^2$, d'où

$$\mathrm{M}_n^c = \overline{\text{borne}}_{r\geq 1}\, r^n e^{-\frac{\Gamma^2}{2}} = e^{-\frac{n}{2}} n^{\frac{n}{2}}.$$

Si $f(\cos\theta) = \mathrm{F}(\theta)\in \mathrm{C_R}\{\mathrm{M}_n^c\}$, il existe une constante k telle que, sur $[-1, 1]$, $f(x)$ appartienne à $\mathrm{C}_f\left\{n^n e^{-\frac{n^2}{2k^2}}\right\}$. Toutes ces fonctions $f(x)$ appartiennent donc, par exemple, sur $[-1, 1]$, à la classe $\mathrm{C}_f\{n^n e^{-n\sqrt{n}}\}$, strictement plus petite que $\mathrm{C}_f\{n^{-n}\mathrm{M}_{2n}^c\} = \mathrm{C}_f\{1\}$. Les mêmes remarques sont valables pour la classe C_0 à laquelle appartient $f(x)$ sur $(-1, 1)$ quand $\mathrm{F}(0) = f(\cos\theta)$ appartient à $\mathrm{C_R}\{\mathrm{M}_n\}$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. Agmon, *Sur l'équivalence des classes de fonctions indéfiniment dérivables sur un demi-axe* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 350).

[2] T. Bang, *On quasi analytiske Funktioner* (*Thèse*, Kyobenhavn, 1946).

[3] H. Cartan, *Sur les inégalités entre les maxima des dérivées successives d'une fonction* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 208, 1939, p, 414).

[4] H. Cartan, *Sur les maxima des dérivées successives d'une fonction* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 210, 1940, p. 431).

[5] H. Cartan et S. Mandelbrojt, *Solution du problème d'équivalence des classes de fonctions indéfiniment dérivables* (*Acta Math.*, t. 72, 1940, p. 31-49).

[6] J. Favard, *Matematisk Tiddskrift* (B. 1936, p. 81-94).

[7] J. Favard, *Sur l'approximation des fonctions périodiques par des polynomes trigonométriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 203, 1936, p. 1122).

[8] A. Gorny, *Contribution à l'étude des fonctions dérivables d'une variable réelle* (*Acta Math.*, t. 71, 1939, p. 317).

[9] J. P. Kahane, *Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles* (*Thèse*, Paris, 1954; *Ann. Inst. Fourier*, 1954).

[10] J. P. Kahane et P. Lalaguë, *Quasi-analyticité des fonctions sommes de séries de Fourier lacunaires* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 2250).

[11] A. Kolmogoroff, *Une généralisation de l'inégalité de J. Hadamard entre les bornes supérieures des dérivées successives d'une fonction* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 207, 1938, p. 764).

[12] P. Lalaguë, *Classes de fonctions indéfiniment dérivables presque périodiques de spectre donné* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 2473).

[13] P. Lalaguë, *Sur des classes de fonctions indéfiniment dérivables* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 240, 1955, p. 1041).

[14] S. Mandelbrojt, *Séries de Fourier et classes quasi analytiques de fonctions* (Gauthier-Villars, Paris, 1935).

[15] S. Mandelbrojt, *La régularisation des fonctions* (*Act. scient. et ind.*, t. 733, 1938).

[16] S. Mandelbrojt, *Quelques nouvelles considérations sur les classes de fonctions dont les dérivées sont bornées* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 208, 1939, p. 1202).

[17] S. Mandelbrojt, *Analytic Functions and Classes of Infinitely Differentiable Functions* (*The Rice Institute Pamphlet*, t. 29, n° 1, 1942).

[18] S. Mandelbrojt, *Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications* (Coll. Borel, Gauthier-Villars, 1952, *voir* p. 1-26 et 201-250).

[19] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials* (*Amer. Math. Soc. Colloqium Publications*, New York, t. 23, 1939).

LOIS DE GROUPES ET ANALYSEURS

PAR M. MICHEL LAZARD

INTRODUCTION.

Ce travail a pour objet d'aborder une étude générale de la notion de *loi de groupe*.

Une loi de groupe est une « formule » ou un algorithme permettant de définir une structure de groupe sur un ensemble où l'on sait effectuer certains calculs, c'est-à-dire dont on sait composer les éléments suivant certaines opérations.

Une telle formulation, d'une généralité excessive, ne peut mener à aucune théorie valable. Il convient donc d'introduire des restrictions assez sévères pour obtenir une théorie « substantielle », mais assez larges pour recouvrir les plus intéressants des cas particuliers déjà connus, et conduire à des résultats et problèmes nouveaux.

Parmi ces cas particuliers, citons la « formule exponentielle symbolique de la théorie des groupes » [4], que nous appellerons loi de Hausdorff, et le « calcul des vecteurs de Witt » [10] (1). Ces exemples justifient le choix des axiomes auquel nous nous sommes arrêtés.

La loi de Hausdorff suggère tout d'abord de ne pas se borner aux calculs finis, mais d'introduire des séries formelles convenablement généralisées. C'est ce que nous avons fait; les scrupules que pouvaient provoquer jadis les calculs « formels » ou « symboliques » sont aujourd'hui apaisés par le recours à des topologies ultramétriques définies par des familles de sous-groupes.

Par rapport aux vecteurs de Witt, la loi de Hausdorff présente l'avantage de ne faire intervenir que deux arguments x et y, sans introduire de « composantes ». Un artifice convenable (2) permet de se ramener toujours à ce cas plus simple (lois de groupes « à un paramètre »). Finalement, nos axiomes servent

(1) Il s'agit dans ce dernier cas d'une loi d'anneau. Nos considérations s'appliqueront, par exemple, au groupe additif des vecteurs de Witt.

(2) *Cf.* n° 18.

à définir une loi de groupe $f(x, y)$ comme une somme infinie de « composantes homogènes », vérifiant les identités fondamentales

$$f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z)) \qquad (\textit{associativité}),$$
$$f(x, 0) = f(0, x) = x \qquad (\textit{existence de l'élément neutre } 0).$$

Quant aux ensembles M que $f(x, y)$ permettra de transformer en groupes, ce seront des *modules* où seront définies des opérations ou fonctions généralisant les fonctions polynomes dans une algèbre associative et commutative [1]. Essentiellement, nous supposerons qu'on puisse *composer* ces fonctions, et qu'une notion de *degré* y soit définie.

Il apparaît alors que l'ensemble M ne joue aucun rôle par lui-même. Seules importent les propriétés des fonctions qui s'y trouvent définies, ou, en d'autres termes, les *règles générales de calcul* dans cet ensemble.

Nous sommes donc conduit à pousser plus loin l'abstraction, et à étudier directement la structure algébrique dont est muni l'ensemble de fonctions sur M sans faire intervenir ce module. Nous parvenons ainsi à la notion d'*analyseur*.

Ce point de vue présente des avantages considérables. Il nous permet de séparer plus nettement deux problèmes distincts : la recherche des lois de groupes, et l'étude des structures qu'on peut transformer en un groupe au moyen d'une loi de groupe donnée. Une loi de groupe cesse d'être un algorithme pour devenir un élément d'une structure algébrique, ce qui simplifie considérablement le langage.

Conformément aux principes de la méthode axiomatique, nous donnons *a priori* la définition des analyseurs (n° 5). Mais, aussitôt après, nous introduisons des notations qui font apparaître les éléments d'un analyseur comme des fonctions dans un ensemble. Ces notations sont en vérité des « abus de langage », car les éléments d'un analyseur ne sont pas des fonctions; mais elles sont indispensables, car elles font pressentir les théorèmes et leurs démonstrations, tandis que les notations « correctes » compliquent inutilement les énoncés les plus simples.

Au n° 21, le lecteur trouvera une discussion plus approfondie de l'axiomatique des analyseurs, qui apparaissent comme un cas particulier de la notion plus générale de « compositeur ».

Le chapitre I, le plus ingrat, donne les définitions et propriétés élémentaires des analyseurs. Il s'agit simplement de généraliser les propriétés des séries formelles sans terme constant [1] en les considérant du point de vue de leur composition, et non de leur multiplication. Même dans ce cas classique, la notion d'analyseur ne correspond pas aux définitions usuelles.

Le chapitre II s'ouvre par la définition des lois de groupes. Les paragraphes suivants constituent une étude directe des lois de groupes dans les analyseurs *rationnels* : les méthodes, aussi bien que les résultats, dérivent directement de la théorie des groupes de Lie. J'ai suivi, parfois de très près, un Mémoire de

Dynkin [3], qui est d'ailleurs à l'origine de ces recherches (3). Cette méthode directe me paraît illustrer la puissance du formalisme introduit au chapitre I: on verra qu'il suffit d'y traduire quelques propriétés élémentaires de la formule du binome et de la fonction exponentielle pour obtenir une démonstration directe des théorèmes fondamentaux de Lie où les passages à la limite sont remplacés par des spécialisations, et où la part de l'analyse (c'est-à-dire des démonstrations de convergence) est réduite au minimum (4). Les principaux résultats de ce chapitre seront retrouvés au chapitre IV par une méthode différente.

Le chapitre III traite de la cohomologie des analyseurs. Il a un caractère auxiliaire, et le lecteur sera peut-être bien avisé de n'en lire d'abord que le premier paragraphe, puis de passer au début du chapitre suivant où il trouvera aussitôt la justification des définitions introduites. Pour mener à bien cette étude, j'ai pu exploiter l'analogie de la cohomologie des analyseurs avec celle des groupes ou monoïdes, et renvoyer au traité de Cartan-Eilenberg [2], ce qui évite de refaire certains calculs assez compliqués.

Le chapitre IV expose une méthode générale d'étude des lois de groupes et de leurs équivalences. C'est la vieille méthode du « calcul des limites » de Cauchy, du « lemme de Hensel », etc. Elle consiste à construire successivement les composantes homogènes d'une fonction. Mais ici les constructions ne sont pas toujours possibles ni déterminées. On rencontre des *obstructions* qui s'interprètent comme des éléments de groupes de cohomologie. Dans le cas des analyseurs rationnels, les obstructions sont nulles et l'on rend compte ainsi très simplement des résultats principaux du chapitre II (moyennant, il est vrai, la connaissance de ceux du chapitre III). A côté de la loi de Hausdorff, on trouve une autre loi de groupe remarquable, la loi *unilinéaire*. Elle conduit à une nouvelle espèce d'algèbre et intervient, par exemple, dans le calcul de la formule de Taylor pour les polynomes.

J'ai montré antérieurement [7] sur un cas très particulier comment il était possible de faire une étude globale du système des obstructions. Le problème fondamental est le suivant : comment les choix effectués lors du « passage » d'une obstruction nulle peuvent-ils déterminer la nullité des obstructions suivantes? Je donne ici la démonstration du théorème général sur les lois abéliennes universelles de groupes de Lie formels annoncé dans [7]. Mais l'étude globale du problème des obstructions paraît difficile et ne pourra vraisemblablement être abordée que dans des cas particuliers.

Au terme de cette étude, il semble qu'on ait seulement établi la partie générale et, en un certain sens, élémentaire d'une théorie qui devra se spécia-

(3) Les résultats de ce chapitre sont résumés dans [5].

(4) Il s'agit des théorèmes locaux pour les groupes de Lie donnés à l'avance comme variétés analytiques.

liser dans diverses directions. Deux d'entre elles me paraissent les plus importantes. D'abord la construction de p-groupes à l'aide de lois de groupes convenables. Les résultats obtenus avec la loi de Hausdorff [6] laissent espérer qu'on pourra progresser si l'on connaît mieux les lois de groupes. C'est aussi la conclusion où conduisent des travaux récents [8], [9] sur le problème de Burnside. L'autre direction de recherches est celle des lois de groupes de Lie formels, en liaison avec l'étude des groupes algébriques.

Je souhaite que des développements ultérieurs viennent justifier la tentative que j'expose aujourd'hui.

CHAPITRE I.

Généralités sur les analyseurs.

1. Fonctions homogènes et modules multigradués.

1. Fonctions dans un module. — Nous conserverons, autant que possible, la terminologie de N. Bourbaki. En particulier, Z, N, $\mathbf{N}^*$, Q désigneront respectivement l'anneau des entiers rationnels, l'ensemble des entiers ≥ 0, l'ensemble des entiers > 0, et le corps des nombres rationnels.

La lettre Ω désignera toujours un anneau commutatif possédant une unité. Nous entendrons par « module » un Ω-module unitaire.

Si E est un ensemble quelconque, M un module, l'ensemble des applications de E dans M est muni de sa structure naturelle de module. En particulier, nous aurons à considérer des applications dans M du produit cartésien M^n ($n \in \mathbf{N}^*$). Une telle application sera dite *fonction de n arguments dans* M, et notée f. La valeur de f pour la famille d'arguments $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{M}^n$ sera notée $f(x_1, \ldots, x_n)$. Le module des fonctions de n arguments dans M sera noté $\mathfrak{F}_n(\mathrm{M})$.

Nous dirons que l'argument x_i est *neutre* dans la fonction $f \in \mathfrak{F}_n(\mathrm{M})$ si $f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$ dès qu'on a $x_j = y_j$ pour $1 \leq j \leq n$ $(j \neq i)$.

2. Les relations d'homogénéité.

Définition (1.1). — *Soient* M *un* Ω*-module,* $f \in \mathfrak{F}_n(\mathrm{M})$, *et* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ *une famille d'entiers* ≥ 0. *La fonction f sera dite vérifier la relation d'homogénéité de degré* α *si l'on a*

$$f(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n) = \lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_n^{\alpha_n} f(x_1, \ldots, x_n)$$

pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{M}$ *et* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Omega$. *De plus, si l'un des* (α_i), *soit* α_j, *est nul, l'argument* x_j *doit être neutre* (3).

(3) Cette dernière convention revient à poser $0^0 = 1$ dans la relation d'homogénéité.

Remarquons qu'une même fonction peut vérifier plusieurs relations d'homogénéité différentes : c'est ainsi que l'application identique du corps premier F_p de caractéristique $p \neq 0$ peut se voir attribuer l'un quelconque des degrés p^h ($h \in N$).

3. Modules multigradués.

Définition (1.2). — *Un Ω-module* H *sera dit n-gradué s'il est donné comme la somme directe d'une famille de sous-modules* $(H_\alpha)_{\alpha \in N^n}$.

Nous désignerons par P_α le *projecteur* de H sur son facteur direct H_α. Si $f \in H$, $P_\alpha f$ sera dit la *composante homogène de degré* α de f; f n'a qu'un nombre fini de composantes homogènes non nulles, et est égal à leur somme

$$f = \sum_{\alpha \in N^n} P_\alpha f, \qquad \text{avec} \quad P_\alpha f \in H_\alpha.$$

Nous appellerons *degré total* du multidegré $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et noterons $|\alpha|$ l'entier $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)$, et nous poserons, pour tout $r \in N$,

$$H_r = \sum_{\alpha \in N^n, |\alpha| = r} H_\alpha.$$

Nous définissons ainsi sur H, par « sommation partielle des composantes », une structure de module simplement gradué. C'est en ce sens que nous parlerons des composantes homogènes pour le degré total des éléments de H.

Un *sous-module n-gradué* K de H sera un sous-module *homogène*, c'est-à-dire vérifiant

$$K = \sum_{\alpha \in N^n} (K \cap H_\alpha).$$

Un *homomorphisme* φ d'un module *n*-gradué H dans un module *n*-gradué H' sera une application Ω-linéaire vérifiant $\varphi H_\alpha \subset H'_\alpha$ pour tout $\alpha \in N^n$.

4. Critères concernant la définition des fonctions homogènes. — Les principaux modules multigradués que nous rencontrerons seront des modules H de fonctions dans un module (n° 1), où les éléments de H_α vérifieront la relation d'homogénéité de degré α [déf. (1.1)]. La remarque finale du n° 1 montre qu'il faudra, en général, définir axiomatiquement les modules de fonctions homogènes. Cependant, dans certains cas particuliers, les relations d'homogénéité suffisent pour caractériser les H_α : il faut pour cela que toute somme finie de fonctions vérifiant respectivement des relations d'homogénéité pour des multidegrés distincts ne puisse être nulle que si tous ses termes sont nuls.

Proposition (1.1). — *Soit* M *un espace vectoriel sur le corps infini* Ω. *Une*

somme finie $\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n} f_\alpha$, *où chaque* $f_\alpha\in\mathfrak{F}_n(\mathbf{M})$ *vérifie la relation d'homogénéité de degré* α, *ne peut être nulle que si chaque terme* f_α *est nul.*

Démonstration. — Nous pouvons écrire, pour tous $x_1, \ldots, x_n\in\mathbf{M}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n\in\Omega$,

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n} \lambda_1^{\alpha_1}\ldots\lambda_n^{\alpha_n} f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{1}$$

La proposition s'en déduit aisément : par exemple, par récurrence sur n et application des déterminants de Vandermonde.

Proposition (1.2). — *Soit* M *un* Ω*-module. Considérons la somme finie* $\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n} f_\alpha$, *où les* f_α ($\in\mathfrak{F}_n(\mathbf{M})$) *vérifient respectivement les relations d'homogénéité de degré* α. *Supposons que, pour* $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $f_\alpha\neq 0$ *implique* $\alpha_1!\ldots\alpha_n! f_\alpha\neq 0$. *Alors la somme considérée ne peut être nulle que si chacun de ses termes est nul.*

Démonstration. — Écrivons à nouveau la relation (1) dont nous désignerons le premier membre par $\mathrm{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Introduisons les opérateurs différences Δ_i :

$$(\Delta_i\mathrm{P})(\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_n) = \mathrm{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_i+1, \ldots, \lambda_n) - \mathrm{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_n).$$

Si la somme considérée est nulle sans que tous ses termes le soient, définissons $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ comme le plus grand des multidegrés $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, ordonnés lexicographiquement, tels que $f_\beta\neq 0$. Alors

$$0 = (\Delta_n^{\beta_n}\ldots\Delta_1^{\beta_1}\mathrm{P})(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \beta_1!\ldots\beta_n! f_\beta,$$

contrairement à l'hypothèse.

Remarque. — On se trouvera dans les conditions de la proposition (1.2) dans les cas particuliers suivants :

1° M est un module sans torsion sur l'anneau d'intégrité Ω de caractéristique 0 ;

2° L'*ordre additif* de chaque fonction f_α non nulle n'est pas un diviseur de $|\alpha|!$.

2. — Analyseurs incomplets.

5. Axiomes des analyseurs incomplets.

Définition (2.1). — *Un analyseur incomplet* $\mathfrak{A}$ *sur l'anneau* Ω *est constitué par la donnée :*

a. d'une suite $(\mathfrak{A}^n)^{n\in\mathbf{N}^*}$ *de* Ω*-modules multigradués, tels que chaque* $\mathfrak{A}^n$

soit n-gradué

$$\mathfrak{A}^n = \sum_{x \in \mathbf{N}^n} \mathfrak{A}^n_x ;$$

b. d'une famille d'applications $(\mathrm{T}_{m,n})$ $(m, n \in \mathbf{N}^*)$, *telle que* $\mathrm{T}_{m,n}$ *applique* $\mathfrak{A}^n$ *dans* $\mathfrak{L}_m(\mathfrak{A}^n)$;

c. d'une famille d'éléments distingués $(\mathbf{e}_{m,i})$ $(m, i \in \mathbf{N}^*, i \leq m)$, *tels que* $\mathbf{e}_{m,i} \in \mathfrak{A}^m_{\delta_{m,i}}$, *où* $\delta_{m,i}$ *est le multidegré* $(\delta^1_i, \ldots, \delta^m_i)$, *et* δ^j_i *désigne le symbole de Kronecker* (6), *satisfaisant aux axiomes suivants :*

(**A1**) *Pour tous* $m, n \in \mathbf{N}^*$, *l'application* $\mathrm{T}_{m,n}$ *est un homomorphisme* Ω*-linéaire de* $\mathfrak{A}^n$ *dans le module* $\mathfrak{L}_m(\mathfrak{A}^n)$. *De plus, pour tout* $m \in \mathbf{N}^*$, $\mathrm{T}_{m,m}$ *est injectif.*

(**A2**) *Si* $m, n \in \mathbf{N}^*$, $\alpha \in \mathbf{N}^m$, $f \in \mathfrak{A}^m_\alpha$, *alors* $\mathrm{T}_{m,n} f$ *vérifie la relation d'homogénéité de degré* α.

(**A3**) *Soient* $m, n, p \in \mathbf{N}^*$, $f \in \mathfrak{A}^m$, $g_i \in \mathfrak{A}^n$ (*pour* $1 \leq i \leq m$), $h_j \in \mathfrak{A}^p$ (*pour* $1 \leq j \leq n$). *Posons*

$$(\mathrm{T}_{m,n} f)(g_1, \ldots, g_m) = k \in \mathfrak{A}^n$$

et

$$(\mathrm{T}_{n,p} g_i)(h_1, \ldots, h_n) = l_i \in \mathfrak{A}^p \qquad (\text{pour } 1 \leq i \leq m).$$

Alors

$$(\mathrm{T}_{n,p} k)(h_1, \ldots, h_n) = (\mathrm{T}_{m,p} f)(l_1, \ldots, l_m).$$

(**A4**) *Pour tous* $m, n, i \in \mathbf{N}^*$, $i \leq m$, $f_j \in \mathfrak{A}^n$ (*pour* $1 \leq j \leq m$),

$$(\mathrm{T}_{m,n} \mathbf{e}_{m,i})(f_1, \ldots, f_m) = f_i.$$

(**A5**) *Soient* $m, n \in \mathbf{N}^*$,

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbf{N}^m, \qquad f \in \mathfrak{A}^m_\alpha ;$$
$$\beta_i = (\beta_{i,1}, \ldots, \beta_{i,n}) \in \mathbf{N}^n, \qquad g_i \in \mathfrak{A}^n_{\beta_i} \qquad (\text{pour } 1 \leq i \leq m).$$

Alors $(\mathrm{T}_{m,n} f)(g_1, \ldots, g_m) \in \mathfrak{A}^n_\gamma$, *avec*

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n), \qquad \gamma_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \beta_{j,i} \qquad (1 \leq i \leq n).$$

(**A6**) *Soient* $m \in \mathbf{N}^*$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbf{N}^m$, $f \in \mathfrak{A}^m_\alpha$. *Posons*

$$g = (\mathrm{T}_{m,m-1} f)(\mathbf{e}_{m-1,1} + \mathbf{e}_{m-1,2}, \mathbf{e}_{m-1,3}, \ldots, \mathbf{e}_{m-1,m-1}),$$

et $g_\beta = \mathbf{P}_\beta g$ *pour* $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}) \in \mathbf{N}^{m-1}$. *Alors :*

a. $g_\beta = 0$ *si l'on n'a pas simultanément*

$$\beta_1 + \beta_2 = \alpha_1, \qquad \beta_i = \alpha_{i-1} \ (3 \leq i \leq m+1) ;$$

---

(6) $\delta^j_i = 1$ si $i = j$, $\delta^j_i = 0$ si $i \neq j$.

b. Si $\beta_1+\beta_2=\alpha_1$, $\beta_i=\alpha_{i-1}$ $(3\leq i\leq m+1)$, *alors*

$$(\mathbf{T}_{m,1+m}g_2)(\mathbf{e}_{m,1},\mathbf{e}_{m,2},\mathbf{e}_{m,3},\ldots,\mathbf{e}_{m,m})=\binom{\alpha_1}{\beta_1}f\quad(^{7}).$$

(**A7**) *Pour tout* $m\in\mathbf{N}^*$, *le module* $\mathfrak{A}_0^m$ (*des éléments de degré total* 0) *est nul.*

Ce dernier axiome n'interviendra qu'au paragraphe 3.

Exemple : l'analyseur classique. — Nous appelons analyseur classique l'analyseur défini comme suit : $\mathfrak{A}^n\subset\Omega[\mathbf{e}_{n,1},\ldots,\mathbf{e}_{n,n}]$ ($n\in\mathbf{N}^*$) est l'anneau des polynomes *sans terme constant*, à coefficients dans Ω, en les indéterminées $(\mathbf{e}_{n,i})_{1\leq i\leq n}$ [1]. Nous prenons sur $\mathfrak{A}^n$ la graduation usuelle. Si $f=\mathrm{P}(\mathbf{e}_{n,1},\ldots,\mathbf{e}_{n,n})\in\mathfrak{A}^n$, $g_i\in\mathfrak{A}^n$ $(1\leq i\leq m)$, nous posons

$$(\mathbf{T}_{m,n}f)(g_1,\ldots,g_m)=\mathrm{P}(g_1,\ldots,g_m).$$

On vérifiera sans peine que les axiomes (**A1**) à (**A7**) sont satisfaits.

Nous laissons au lecteur le soin de formuler, conformement à la théorie générale des structures algebriques où les lois de composition sont partout définies, les notions d'*homomorphisme d'analyseurs* et de *sous-analyseur*. Si l'on a un homomorphisme d'un analyseur $\mathfrak{A}$ dans un analyseur $\mathfrak{A}'$, l'*image* de $\mathfrak{A}$ est un *sous-analyseur* de $\mathfrak{A}'$; si l'image coïncide avec $\mathfrak{A}'$, nous dirons que ce dernier est un *analyseur quotient* de $\mathfrak{A}$. Remarquons que le noyau d'un homomorphisme d'analyseurs n'est pas un sous-analyseur [car il ne contient pas les elements $(\mathbf{e}_{n,1})$].

6. Un lemme de theorie des ensembles. — Nous allons effectuer sur les analyseurs incomplets une construction par « dédoublement », analogue à la representation régulière des groupes ou des algèbres associatives. Cette construction est basée sur le lemme général suivant :

Lemme (2.1). — *Soient* $(\mathrm{E}^n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *une suite d'ensembles*, $\varepsilon_n:\mathrm{E}^n\to\mathrm{E}^{n-1}$ *une suite d'applications, et* $(\mathrm{T}_{m,n})$ *une famille de lois de composition* $(m+1)$*-aires* $(m,n\in\mathbf{N})$, *telles que, pour* $f\in\mathrm{E}^n$, $g_i\in\mathrm{E}^n$ $(1\leq i\leq m)$, *on ait* $(\mathrm{T}_{m,n}f)(g_1,\ldots,g_m)\in\mathrm{E}^n$. *Supposons que pour tous* m, n, f, g_i *définis comme précédemment, on ait*

$$(1)\qquad \varepsilon_n(\mathrm{T}_{m,n}f)(g_1,\ldots,g_m)=(\mathrm{T}_{m,n-1}f)(\varepsilon_n g_1,\ldots,\varepsilon_n g_m).$$

Désignons par $\mathrm{E}=\varprojlim\mathrm{E}^n$ *la limite inductive de la suite* (E^n) *pour les appli-*

---

(7) Plus précisément : $g=(\mathrm{T}_{m,m+1}f)(h_1,\ldots,h_m)$, où

$$h_1=\mathbf{e}_{m,1}+\mathbf{e}_{m,2},\qquad h_i=\mathbf{e}_{m,i-1}\quad(\text{pour } 2\leq i\leq m+1).$$

Nous appliquons le projecteur d'homogénéité $\mathbf{P}_\beta$ conformément aux notations du nº 3. Dans b, il faut entendre $(\mathrm{T}_{m,1+m}g_2)(h_1,\ldots,h_{m+1})$, avec

$$h_1=h_2=\mathbf{e}_{m,1},\qquad h_i=\mathbf{e}_{m,i-1}\quad(\text{pour } 3\leq i\leq m+1).$$

Enfin $\binom{\alpha_1}{\beta_1}$ désigne le coefficient binomial $\frac{\alpha_1!}{\beta_1!\,\beta_2!}$.

cations (ε_n), *et par* π_n *l'application canonique de* E^n *dans* E $(n \in \mathbf{N}^*)$. *Alors il existe des applications* T_m, *respectivement de* E^m *dans l'ensemble des fonctions de m arguments dans* E, *univoquement déterminées par les conditions*

$$(T_m f)(\pi_n g_1, \ldots, \pi_n g_m) = \pi_n((T_{m,n} f)(g_1, \ldots, g_m)),$$

pour tous $m, n \in \mathbf{N}^*$, $f \in E^m$, $g_i \in E^n$ $(1 \leq i \leq m)$.

Démonstration. — Elle résulte immédiatement de la définition de la limite inductive. Définissons, pour $p \leq q$, les applications $\pi_p^q : E^p \to E^q$, par les relations de récurrence $\pi_p^{q+1} = \varepsilon_q \pi_p^q$ (π_p^p est l'application identique de E^p). L'ensemble E et les applications π_n sont caractérisés par les propriétés suivantes :

a. pour tous $p \leq q$, $\pi_p = \pi_q \pi_p^q$;

b. $E = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} (\pi_n E^n)$;

c. si $f \in E^p$, $g \in E^q$, $\pi_p f = \pi_q g$, alors il existe $r \geq p, q$ tel que $\pi_p^r f = \pi_q^r g$.

Par récurrence sur $q - p \geq 0$, on démontre que, pour tous $f \in E^m$, $g_1, \ldots, g_m \in E^p$,

$$\pi_p^q((T_{m,p} f)(g_1, \ldots, g_m)) = (T_{m,q} f)(\pi_p^q g_1, \ldots, \pi_p^q g_m).$$

L'existence et l'unicité des applications T_m s'en déduisent sans difficulté.

7. Représentation régulière des analyseurs incomplets. — Soit $\mathfrak{A}$ un analyseur incomplet [déf. (2.1)].

Proposition (2.1). — *Pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$ *et* $f \in \mathfrak{A}^n$,

$$(T_{n,n} f)(\mathbf{e}_{n,1}, \ldots, \mathbf{e}_{n,n}) = f.$$

Démonstration. — Posons $f' = (T_{n,n} f)(\mathbf{e}_{n,1}, \ldots, \mathbf{e}_{n,n})$. Alors (**A3**) et (**A4**) montrent que $T_{n,m} f = T_{n,m} f'$, pour tout $m \in \mathbf{N}^*$. Comme $T_{n,n}$ est injectif (**A1**), $f = f'$.

Lemme (2.2). — *Définissons les applications* $\varepsilon_n : \mathfrak{A}^n \to \mathfrak{A}^{n+1}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ *par*

$$\varepsilon_n f = (T_{n,n+1} f)(\mathbf{e}_{n+1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{n+1,n}) \quad \text{pour} \quad f \in \mathfrak{A}^n.$$

Alors :

a. les (ε_n) *et* $(T_{m,n})$ *vérifient la condition* (1) *du lemme* (2.1) ;

b. pour tout $n \in \mathbf{N}$, ε_n *est injectif ; plus précisément, la restriction de* ε_n *à* $\mathfrak{A}_\alpha^n$ *est un isomorphisme de ce module sur* $\mathfrak{A}_{(\alpha,0)}^{n+1}$ *avec*

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n. \qquad (\alpha, 0) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0) \in \mathbf{N}^{n+1}.$$

Démonstration. — *a* est une conséquence immédiate de (**A3**) et de la définition des applications ε_n. Pour $g \in \mathfrak{A}^{n+1}$, posons

$$\gamma_{n+1} g = (T_{n+1,n} g)(\mathbf{e}_{n,1}, \ldots, \mathbf{e}_{n,n}, 0).$$

Alors, si $f \in \mathfrak{A}^n$,

$$\tau_{n-1}\varepsilon_n f = f.$$

d'après (**A3**), (**A4**) et la proposition (2.1). De même, si $g \in \mathfrak{A}^{n+1}$,

$$\varepsilon_n \tau_{n-1} g = (\mathrm{T}_{n-1,n-1} g)(\mathbf{e}_{n-1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{n-1,n}, 0).$$

Or, si $g \in \mathfrak{A}^{n+1}_{\alpha,n}$, le $(n+1)^{\text{ième}}$ argument de $\mathrm{T}_{n-1,m} g$ est neutre pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, d'après (**A2**) et la définition (1.1); nous avons donc dans ce cas

$$\mathrm{T}_{n+1,n-1}\varepsilon_n \tau_{n-1} g = \mathrm{T}_{n-1,n+1} g,$$

ce qui prouve que $g = \varepsilon_n \tau_{n-1} g$ (**A1**). Enfin (**A5**) achève la démonstration de b.

Nous sommes donc en mesure d'appliquer le lemme (2.1) et de poser la

Définition (2.2). — *Avec les notations des lemmes* (2.1) *et* (2.2), *nous appellerons module de la représentation régulière de* $\mathfrak{A}$ *le module* $\mathfrak{M} = \varinjlim \mathfrak{A}^n$. *La représentation régulière de* $\mathfrak{A}$ *est la correspondance qui, à tout* $f \in \mathfrak{A}^n$ *associe la fonction* $\mathrm{T}_n f$ *de n arguments dans* $\mathfrak{M}$.

Proposition (2.2). — *a. Les applications* $\mathrm{T}_n : \mathfrak{A}^n \to \mathfrak{L}_n(\mathfrak{M})$ *sont des monomorphismes de modules.*

b. Si $f \in \mathfrak{A}^n_\alpha$, $\mathrm{T}_n f$ *vérifie la relation d'homogénéité de degré* α.

c. Si $f \in \mathfrak{A}^m$, $g_i \in \mathfrak{A}^n$ (*pour* $1 \leq i \leq m$), *alors*

$$\mathrm{T}_n((\mathrm{T}_{m,n} f)(g_1, \ldots, g_m)) = (\mathrm{T}_m f)(\mathrm{T}_n g_1, \ldots, \mathrm{T}_n g_m).$$

Démonstration. — Les applications ε_n sont des monomorphismes [lemme (2.2, b)]. Il en est donc de même des applications $\tau_n : \mathfrak{A}^n \to \mathfrak{M}$. Comme $\varepsilon_n \mathbf{e}_{n,i} = \mathbf{e}_{n-1,i}$ (pour $1 \leq i < n$), $\tau_n \mathbf{e}_{n,i}$ est indépendant de n; nous poserons, pour $n \geq i$, $\tau_n \mathbf{e}_{n,i} = \mathbf{e}_i \in \mathfrak{M}$. Soit alors $f \in \mathfrak{A}^n$: d'après la définition de T_n et la proposition (2.1), $(\mathrm{T}_n f)(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = \tau_n f$. Cette relation établit simultanément que tout élément x de $\mathfrak{M}$ peut s'écrire sous la forme $(\mathrm{T}_n f)(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, où $f \in \mathfrak{A}^n$, et que $(\mathrm{T}_n f)(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \neq 0$ si $f \neq 0$, donc que les (T_n) sont des monomorphismes. La démonstration de b résulte immédiatement de (**A2**); quant à c, c'est la traduction de (**A3**).

La notion de représentation régulière nous permet d'*identifier un analyseur à une famille de fonctions dans un module*. Les éléments distingués $(\mathbf{e}_{n,i})$ s'identifient alors respectivement aux x_i, considérés comme fonctions des n arguments $(x_1, \ldots, x_n)$. Quant aux lois de composition $(\mathrm{T}_{m,n})$, elles traduisent la composition des fonctions; l'axiome (**A3**) est vérifié *a priori* dans les familles de fonctions comme l'axiome analogue d'associativité dans les groupes de permutations.

L'identification permise par la représentation régulière va justifier les « abus de langage » nombreux et indispensables que nous commettrons sans remords. Nous renoncerons à la lourde notation des $(\mathrm{T}_{m,n})$, nous écrirons $f(g_1, \ldots, g_m)$

au lieu de $(T_{m,n}f)(g_1, \ldots, g_m)$. Un élément $f \in \mathfrak{A}^n$ sera dit, à l'occasion, « *fonction de n arguments* »; il sera souvent commode d'utiliser la notation fonctionnelle « incorrecte » $f(x_1, \ldots, x_n)$, et d'employer d'autres signes que les (x_i) pour désigner les arguments; par exemple, nous écrirons des formules telles que

$$f(x, y) \in \mathfrak{A}^2, \qquad f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z)) = 0 \quad (^8).$$

Si $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{A}^n_\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, nous dirons que f est homogène de degré α_i par rapport à l'argument x_i $(1 \leq i \leq n)$; cela nous permettra de parler de fonctions homogènes par rapport à l'un de leurs arguments.

8. $\mathfrak{A}$-modules et familles de fonctions polynomiales.

Définition (2.3). — *Soient $\mathfrak{A}$ un analyseur incomplet, M un module. Une structure de $\mathfrak{A}$-module sur M est définie par la donnée d'une famille d'homomorphismes $\tau_n : \mathfrak{A}^n \to \mathfrak{L}_n(M)$, pour $n \in N^*$, tels que :*

a. si $f \in \mathfrak{A}^n_\alpha$, $\tau_n f$ vérifie la relation d'homogénéité de degré α;

b. si $f \in \mathfrak{A}^m$, $g_i \in \mathfrak{A}^n$ $(1 \leq i \leq m)$,

$$\tau_n(f(g_1, \ldots, g_m)) = (\tau_m f)(\tau_n g_1, \ldots, \tau_n g_m);$$

c. $\tau_1(e_{1,1})$ est l'application identique de M.

Exemple. — Le module $\mathfrak{M}$ de la représentation régulière est un $\mathfrak{A}$-module $(\tau_n = T_n)$.

Si $\mathfrak{A}$ est un analyseur incomplet, *la catégorie des $\mathfrak{A}$-modules correspond à une espèce de structure algébrique*. Si, par exemple, $\mathfrak{A}$ est l'analyseur classique (n° 5), les $\mathfrak{A}$-modules coïncident avec les Ω-algèbres associatives et commutatives. Toute propriété d'un analyseur incomplet peut donc être considérée comme une « règle de calcul » valable dans les structures algébriques d'une certaine espèce.

Réciproquement, un analyseur incomplet peut être défini par les fonctions correspondantes dans un $\mathfrak{A}$-module M, pourvu que le module M ne vérifie pas d'autre identité générique que celles communes à tous les $\mathfrak{A}$-modules.

Si, avec les notations de la définition (2.3), les homomorphismes (τ_n) sont *injectifs*, nous pouvons identifier les modules $\mathfrak{A}^n$ aux modules de fonctions $\mathfrak{P}^n = \tau_n \mathfrak{A}^n$. Nous dirons alors que la famille de fonctions $\mathfrak{P} = (\mathfrak{P}^n)_{n \in N^*}$ est une *famille de fonctions polynomiales associée à l'analyseur $\mathfrak{A}$ dans le module* M.

Partant de la notion de famille de fonctions polynomiales, on pourrait définir ensuite celle d'analyseur incomplet en « faisant abstraction » du module M. Ce procédé aurait l'avantage d'éviter l'axiome (**A3**) mais, en fin de compte, il compliquerait l'axiomatique.

---

(8) Avec les notations antérieures, il aurait fallu écrire : $(T_{2,3}f)((T_{2,3}f)(e_{3,1}, e_{3,2}), e_{3,3})$ au lieu de $f(f(x, y), z)$; la simplification se passe de commentaires.

Remarquons que si M est un $\mathfrak{A}$-module défini par les homomorphismes $\tau_n : \mathfrak{A}^n \to \mathfrak{L}_n(M)$, comme dans la définition (2.3), la famille $(\mathfrak{P}_n) = (\tau_n \mathfrak{A}^n)$ *n'est pas nécessairement* une famille de fonctions polynomiales associée à un analyseur dans M; exemple : $\mathfrak{A}$ est l'analyseur classique sur Z, et M est un corps fini. Pour que $(\tau_n \mathfrak{A}^n)$ soit une famille de fonctions polynomiales (associée, en général, à un *analyseur quotient* de $\mathfrak{A}$), il faut et il suffit que tous les homomorphismes τ_n aient des *noyaux homogènes* (n° 3).

Il est facile de caractériser en tant que $\mathfrak{A}$-module le module $\mathfrak{M}$ de la représentation régulière : on définit d'une manière naturelle la notion de $\mathfrak{A}$-*générateurs* $\mathfrak{A}$-*libres* [*cf.* la démonstration de la proposition (2.2, *a*)], et $\mathfrak{M}$ est défini, à un isomorphisme près, comme le $\mathfrak{A}$-module admettant une *famille dénombrable de* $\mathfrak{A}$-*générateurs* $\mathfrak{A}$-*libres*.

9. Opérations sur $\mathfrak{A}^n$ du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. — Nous noterons $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique des permutations des n premiers entiers naturels, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $\mathfrak{A}$ un analyseur incomplet. Pour $f \in \mathfrak{A}^n$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, nous poserons

$$\sigma f = f(\mathbf{e}_{n,\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{e}_{n,\sigma(n)})$$

ou, avec nos nouvelles notations simplifiées,

$$(\sigma f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}). \tag{1}$$

Avec cette définition, $\mathfrak{A}^n$ devient un module lié au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ (9). Si $f \in \mathfrak{A}^n$, $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$,

$$(\sigma\tau) f = \sigma(\tau f). \tag{2}$$

De plus, d'après (**A5**), si $f \in \mathfrak{A}^n_\alpha$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$,

$$\sigma f \in \mathfrak{A}^n_{\sigma\alpha}, \qquad \text{où} \quad \sigma\alpha = (\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma^{-1}(n)}) \in \mathbf{N}^n. \tag{3}$$

Chaque opérateur σ est donc un automorphisme de $\mathfrak{A}^n$ considéré seulement comme module (et non comme module n-gradué).

Nous dirons que $f \in \mathfrak{A}^n$ est *symétrique* (resp. *antisymétrique*) si $\sigma f = f$ (resp. $\sigma f = \varepsilon_\sigma f$, ε_σ désignant la signature de σ) pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

10. Les axiomes (**A5**) et (**A6**). — Nous n'avons pas fait intervenir jusqu'à présent les axiomes (**A5**) ni (**A6**) (10). Dans certains cas particuliers, correspondant aux propositions (1.1) et (1.2) du n° 4, ces deux axiomes sont des conséquences des précédents. Il en est ainsi quand Ω est un *corps infini*; nous n'examinerons ici que ce cas.

Avec les notations de (**A5**), simplifiées conformément aux conventions du

(9) Bourbaki, *Algèbre*, chap. III, § 5, n° 1, déf. 1.

(10) Exception faite de la fin du lemme (2.2, *b*), et de (3) (n° 9), qui utilisent (**A5**). Mais nous n'avons encore tiré aucune conséquence de ces résultats.

n° 8, nous avons, en posant

$$f(g_1, \ldots, g_m) = h(x_1, \ldots, x_n),$$
$$h(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n) = \lambda_1^{\gamma_1}, \ldots, \lambda_n^{\gamma_n} h(x_1, \ldots, x_n)$$

pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Omega$, ce qui établit, d'après la proposition (1.1), que $h(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{A}_\gamma^n$.

De même, avec les notations de (**A6**), nous avons

$$f(x_1 + x_2, x_3, \ldots, x_{m+1}) = \sum_{\beta \in \mathbf{N}^{n+1}} g_\beta(x_1, \ldots, x_{m+1}).$$

D'où, pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \Omega$,

$$f(\lambda_1(x_1 + x_2), \ldots, \lambda_m x_{m+1}) = \sum_{\beta \in \mathbf{N}^{m+1}} \lambda_1^{\beta_1+\beta_2} \ldots \lambda_m^{\beta_{m+1}} g_\beta(x_1, \ldots, x_{m+1})$$
$$= \sum_{\beta \in \mathbf{N}^{m+1}} \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \ldots \lambda_m^{\alpha_m} g_\beta(x_1, \ldots, x_{m+1}),$$

ce qui établit (**A6**, *a*). Enfin,

$$\sum_{\beta \in \mathbf{N}^{m+1}} \lambda_1^{\beta_1} \lambda_2^{\beta_2} \ldots \lambda_{m+1}^{\beta_{m+1}} g_\beta(x_1, x_1, \ldots, x_m)$$
$$= \sum_{\beta \in \mathbf{N}^{m+1}} g_\beta(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_1, \ldots, \lambda_{m+1} x_m)$$
$$= f((\lambda_1 + \lambda_2) x_1, \lambda_3 x_2, \ldots, \lambda_{m+1} x_m)$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_2)^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \ldots \lambda_{m+1}^{\alpha_m} f(x_1, \ldots, x_m),$$

ce qui établit (**A6**, *b*), en égalant les coefficients des mêmes monomes en $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1})$.

On démontrerait de la même manière la dépendance des axiomes (**A5**), (**A6**) dans les cas qui permettent d'appliquer la proposition (1.2).

Nous aurons à utiliser l'axiome (**A6**) sous une forme plus générale.

PROPOSITION (2.3). — [*généralisation de* (**A.6**)]. — *Soient* $f(x_1, \ldots, x_m) \in \mathfrak{A}_\alpha^m$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $n \geq m$, *et* $(\mathrm{I}_j)_{1 \leq j \leq m}$ *une partition de l'intervalle d'entiers* $[1, n]$ *en sous-ensembles non vides* (11). *Posons*

$$g(x_1, \ldots, x_n) = f\left(\sum_{i \in \mathrm{I}_1} x_i, \ldots, \sum_{i \in \mathrm{I}_m} x_i\right) \quad \text{et} \quad g_\beta = \mathbf{P}_\beta g$$

pour $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbf{N}^n$. *Alors :*

a. $g_\beta = 0$ *si l'on n'a pas* $\alpha_j = \sum_{i \in \mathrm{I}_j} \beta_i$ *pour* $1 \leq j \leq m$;

(11) C'est-à-dire que les ensembles non vides (I_j) sont disjoints, et que leur réunion est l'intervalle $[1, n]$.

b. Si $\alpha_j = \sum_{i \in I_j} \beta_i$ *pour* $1 \leq j \leq m$, *et si l'on pose* $y_i = x_j$ *pour* $i \in I_j$,

$$g_\beta(y_1, \ldots, y_n) = \left(\frac{\prod_{1 \leq j \leq m} \alpha_j !}{\prod_{1 \leq i \leq n} \beta_i !} \right) f(x_1, \ldots, x_m).$$

Démonstration. — Par récurrence sur $(n - m)$. Pour $n = m + 1$, la proposition coïncide avec (**A6**), à une transformation près par un élément de $\mathfrak{S}_n$ [*cf.* n° 9, notamment (3)]. Le passage de n à $n+1$ s'effectue en appliquant (**A6**), les opérateurs de $\mathfrak{S}_{n-1}$ et (**A3**) (rendu « évident » par la notation fonctionnelle).

11. Calculs dans les analyseurs : opérateurs de Sanov et formules de Taylor. — Nous aurons souvent à calculer les composantes homogènes d'une fonction composée $f(g_1, \ldots, g_m)$. D'après (**A3**) et (**A5**), il nous suffira d'étudier le cas où les g_i sont des sommes de $\mathbf{e}_{n,j}$. Nous poserons donc la définition suivante (où nous utilisons la notation fonctionnelle) :

Définition (2.4). — *Soient* $\mathfrak{A}$ *un analyseur incomplet,* $f(x_1, \ldots, x_m) \in \mathfrak{A}^m$, $(I_i)_{1 \leq i \leq m}$ *une partition de l'intervalle d'entiers* $[1, n]$. *Considérons la fonction*

$$g(x_1, \ldots, x_n) = f\Big(\sum_{i \in I_1} x_i, \ldots, \sum_{i \in I_m} x_i \Big) \in \mathfrak{A}^n.$$

Pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, *la composante homogène* $\mathbf{P}_\alpha g(x_1, \ldots, x_n)$, *de degré* α_j *par rapport à* x_j $(1 \leq j \leq n)$ *sera notée*

$$\mathbf{P}_\alpha g(x_1, \ldots, x_n) = \mathfrak{D}_{x_i \to \sum_{j \in I_i} |\alpha_j| x_j} f(x_1, \ldots, x_m).$$

Les opérateurs $\mathfrak{D}$ *ainsi définis seront dits opérateurs de Sanov simples* (12).

Lorsque les arguments des fonctions seront désignés par d'autres signes que les (x_i), nous utiliserons des notations plus explicites. Par exemple, si $f(x, y) \in \mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{D}_{\substack{x \to |2|x + |3|y \\ y \to |0|z + |5|t}} f(x, y)$ désignera la composante homogène de multidegré $(2, 3, 1, 4)$ par rapport à (x, y, z, t) de la fonction $f(x + y, z + t)$.

Avec les notations de la définition (2.4), l'opérateur de Sanov $\mathfrak{D}_{x_i \to \sum_{j \in I_i} |\alpha_j| x_j}$ est un homomorphisme linéaire de $\mathfrak{A}^m$ dans $\mathfrak{A}^n$. De plus, d'après la proposition

(12) De tels opérateurs ont été considérés par Sanov [9] dans le cas des polynomes à variables non permutables. La définition de Sanov correspond plutôt à notre définition (2.5).

(2.3. *a*), cet opérateur annule toutes les composantes homogènes $\mathfrak{A}_\beta^m$ de $\mathfrak{A}^m$, à l'exception de celle pour laquelle

$$\beta_j = \sum_{i \in \mathrm{I}_j} \alpha_i \qquad (1 \leq j \leq m).$$

Si nous combinons cette propriété avec l'axiome (**A3**), nous obtenons la

Proposition (2.4). — *Soient m, n, $p \in \mathbf{N}^*$, $(\mathrm{I}_i)_{1 \leq i \leq m}$ une partition de l'intervalle d'entiers $[1, n]$, $(\mathrm{J}_j)_{1 \leq j \leq n}$ une partition de l'intervalle $[1, p]$,*

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n, \qquad \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p) \in \mathbf{N}^p.$$

Alors, si l'on pose $\mathrm{K}_i = \bigcup_{j \in \mathrm{I}_i} \mathrm{J}_j$ (pour $1 \leq i \leq m$), le composé des opérateurs de Sanov

$$\mathfrak{D}_{x_j \to \sum_{k \in \mathrm{J}_j} |\beta_k| x_k} \cdot \mathfrak{D}_{x_i \to \sum_{j \in \mathrm{I}_i} |\alpha_j| x_j}$$

est égal à l'opérateur de Sanov

$$\mathfrak{D}_{x_i \to \sum_{k \in \mathrm{K}_i} |\beta_k| x_k} \qquad \text{si} \quad \alpha_j = \sum_{k \in \mathrm{J}_j} \beta_k$$

pour $1 \leq j \leq n$, et est nul dans tous les autres cas.

Comme nous le verrons, la détermination des fonctions

$$f\Big(\sum_{j \in \mathrm{I}_1} x_j, \ \ldots, \ \sum_{j \in \mathrm{I}_m} x_j\Big)$$

ne représente qu'une étape intermédiaire dans les calculs. Aussi, posons-nous la

Définition (2.5). — *Soient $f \in \mathfrak{A}^m$, $(\mathrm{I}_i)_{1 \leq i \leq m}$ un partition de $[1, n]$. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ et $g_j \in \mathfrak{A}^p$ pour $1 \leq j \leq n$. Nous écrirons*

$$\mathfrak{D}_{x_i \to \sum_{j \in \mathrm{I}_i} |\alpha_j| g_j} f(x_1, \ldots, x_n) = h(g_1, \ldots, g_n) \in \mathfrak{A}^p,$$

où

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \mathfrak{D}_{x_i \to \sum_{j \in \mathrm{I}_i} |\alpha_j| x_j} f(x_1, \ldots, x_m).$$

Un opérateur tel que $\mathfrak{D}_{x_i \to \sum_{j \in \mathrm{I}_j} |\alpha_j| g}$ sera dit opérateur de Sanov composé.

Remarque. — Nos définitions générales ont fait intervenir comme « familles d'arguments » des ensembles $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, mais, dans les applications, nous utiliserons des notations adaptées à chaque cas particulier. Le lecteur se souvien-

dra que ces « arguments » sont seulement des symboles évitant l'introduction des éléments $\mathbf{e}_{n,i}$.

Si, dans la définition (2.5), l'un des degrés, soit α_k, est *nul*, l'argument x_k est *neutre* dans la fonction $\mathfrak{D}_{x_i \to \sum_{j\in I_i} |\alpha_j| x_j} f(x_1, \ldots, x_m)$. Par conséquent, le choix de g_k est sans influence sur la valeur de la fonction $\mathfrak{D}_{x_i \to \sum_{j\in I_i} |\alpha_j| g_j} f(x_1, \ldots, x_m)$.

Plus précisément, si nous appliquons la proposition (2.4), nous voyons que la *suppression d'un symbole tel que* $|0|g_k$ *au bas d'un opérateur de Sanov composé* [jointe à la modification correspondante des ensembles d'indices (I_i), puisque l'un d'eux perd un élément, et qu'ils ne recouvrent plus, en général, un intervalle d'entiers], *ne modifie pas cet opérateur* ([13]).

Nous pourrons donc appliquer une convention commode, qui consiste à écrire des sommes finies comme des sommes infinies n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls. Nous obtiendrons ainsi des opérateurs de Sanov composés avec des ensembles d'indices (I_i) infinis, les degrés α_j étants tous nuls, à l'exception d'un nombre fini d'entre eux.

Proposition (2.5) (*formule de Taylor dans les analyseurs*). — *Soit* $\mathfrak{A}$ *un analyseur incomplet* $f \in \mathfrak{A}^m$, $g_i \in \mathfrak{A}^n$ $(1 \leq i \leq m)$. *Posons*

$$h = f(g_1, \ldots, g_m),$$

et, pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$,

$$h_\alpha = \mathbf{P}_\alpha h, \qquad g_{i,\alpha} = \mathbf{P}_\alpha g_i \qquad (1 \leq i \leq m).$$

Alors $h = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} h_\alpha$, *et*

$$h_\alpha = \sum_{(j_{i,\beta})} \mathfrak{D}_{x_i \to \sum_{\beta\in\mathbf{N}^n} |j_{i,\beta}| g_{i,\beta}} f(x_1, \ldots, x_m),$$

où la sommation s'étend à toutes les familles $(j_{i,\beta})$ *d'entiers* ≥ 0, *dont les indices sont caractérisés par* $1 \leq i \leq m$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbf{N}^n$, *et qui vérifient*

$$\sum_{1\leq l\leq m,\ \beta\in\mathbf{N}^n} \beta_k j_{l,\beta} = \alpha_k \qquad (\textit{pour } 1 \leq k \leq n).$$

Démonstration. — Il suffit de remplacer d'abord les composantes homogènes non nulles des (g_i) par des arguments indépendants $(x_{i,\beta})$, puis d'appliquer les axiomes (**A**) et la définition des opérateurs de Sanov composés, que nous avons précisément introduits pour énoncer cette proposition.

([13]) Il n'en irait pas de même pour un opérateur de Sanov simple, à moins d'identifier des fonctions qui ne diffèrent que par des arguments neutres (mais qui appartiennent à des modules $\mathfrak{A}^n$ différents). Les démonstrations rigoureuses des résultats énoncés ne présentent ni difficulté ni intérêt.

Dans certains cas particuliers, nous pouvons établir des résultats qui se rapprochent de la « formule de Taylor » classique.

DÉFINITION (2.6). — *Soit* $f(x, y_1, \ldots, y_n) \in \mathfrak{A}^{n+1}$ *une fonction de l'argument* x *et (éventuellement) d'autres arguments. L'opérateur* $\left(y\frac{\partial}{\partial x}\right)$ *est défini par*

$$\left(y\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x, y_1, \ldots, y_n) = g(x, y, y_1, \ldots, y_n),$$

où $g(x, z, y_1, \ldots, y_n) \in \mathfrak{A}^{n+2}$ *désigne la composante homogène de degré* 1 *par rapport à* z *de la fonction* $f(x+z, y_1, \ldots, y_n)$; z *est un nouvel argument, distinct de* x *et des* (y_i); y *peut éventuellement coïncider avec l'un des arguments de* f.

Remarque. — L'opérateur $\left(y\frac{\partial}{\partial x}\right)$ est la « dérivation de Hausdorf » [4]. Si $f(x) \in \mathfrak{A}^1$,

$$\left(y\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) = \sum_{1 \leq l < \infty} \mathfrak{D}_{x \to |l|\, y + |l|\, x} f(x).$$

PROPOSITION (2.6). — *Soit* $f(x) \in \mathfrak{A}^1$. *Alors,*

a. $$\left(y_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdots\left(y_n\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) = \sum_{0 \leq i < \infty} \mathfrak{D}_{x \to |i|\, x}^{z \to \sum_{1 \leq j \leq n} |1|\, y_j} \cdot \mathfrak{D}_{x \to |i|\, x + |n|\, z} f(x);$$

b. $$\left(y\frac{\partial}{\partial x}\right)^n f(x) = n! \sum_{0 \leq i < \infty} \mathfrak{D}_{x \to |i|\, x + |n|\, y} f(x).$$

Démonstration. — On établit d'abord, par récurrence sur n, que

$$\left(y_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdots\left(y_n\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) = \sum_{0 \leq i < \infty} \mathfrak{V}_{x \to |i|\, x + \sum_{1 \leq j \leq n} |1|\, y_j} f(x),$$

d'où a, d'après la proposition (2.4); b en résulte d'après la proposition (2.3).

COROLLAIRE. — *Si* Ω *est un corps de caractéristique* 0, *on a, pour* $f(x) \in \mathfrak{A}^1$,

$$f(x+y) = \sum_{0 \leq n < \infty} \frac{1}{n!}\left(y\frac{\partial}{\partial x}\right)^n f(x).$$

Lorsque Ω est un corps de *caractéristique* $p \neq 0$, on obtient des résultats entièrement analogues, que nous indiquerons brièvement. On notera $(y^{p^h} \mathrm{D}_x)$ les opérateurs définis de la même manière que $\left(y\frac{\partial}{\partial x}\right)$, à ceci près que l'on calculera la composante homogène de degré p^h par rapport à z des fonctions composées $f(x+z, y_1, \ldots, y_n)$, avant d'y substituer y à z (pour $h \in \mathrm{N}$); en particulier, $(y\mathrm{D}_x) = \left(y\frac{\partial}{\partial x}\right)$. On démontrera comme précédemment que,

pour $f(x)\in\mathfrak{A}^1$,

$$(y_1^{p^{h_1}}\mathrm{D}_x)\dots(y_n^{p^{h_n}}\mathrm{D}_x)f(x)=\sum_{0\leq i<\alpha}\mathfrak{D}_{\substack{x\to|i|x\\ z\to\sum_{1\leq j\leq n}|p^{h_j}|y_j}}\cdot\mathfrak{D}_{x\to|i|x+\left|\sum_{1\leq j\leq n}p^{h_j}\right|z}f(x).$$

On en déduira que la puissance $p^{\text{ième}}$ de chacun des opérateurs $(y^{p^h}\mathrm{D}_x)$ est nulle, que ces opérateurs sont permutables entre eux, et que, si $n=\sum_{0\leq i<r}\alpha_i p^i$, avec $0\leq\alpha_i<p$,

$$(y\,\mathrm{D}_x)^{\alpha_0}(y^p\mathrm{D}_x)^{\alpha_1}\dots(y^{p^r}\mathrm{D}_x)^{\alpha_r}f(x)=\alpha_0!\,\alpha_1!\dots\alpha_r!\sum_{i\geq 1}\mathfrak{D}_{x\to|i|x+|n|y}f(x),$$

ce qui permet d'écrire une formule de Taylor semblable à celle qui vaut pour les polynomes usuels en caractéristique p.

Tous ces résultats s'étendent aux fonctions de plusieurs variables.

12. Fonctions linéaires et multilinéaires.

Définition (2.7). — *Nous dirons qu'une fonction $f(x_1,\dots,x_n)\in\mathfrak{A}^n$ est linéaire par rapport à l'argument x_i si elle est homogène de degré 1 en x_i. Nous dirons qu'elle est n-linéaire si elle est linéaire par rapport à chacun de ses arguments.*

Comme conséquence immédiate de la proposition (2.5), nous obtenons la

Proposition (2.7). — *Soit $f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)\in\mathfrak{A}^n$, linéaire par rapport à x_i. Alors*

$$f(x_1,\dots,y_1+y_2,\dots,x_n)=f(x_1,\dots,y_1,\dots,x_n)+f(x_1,\dots,y_2,\dots,x_n)\quad(^{15}).$$

Soit $f(x_1,\dots,x_n)\in\mathfrak{A}^n$ une fonction n-linéaire. Posons

$$g(x)=f(x,\dots,x)\in\mathfrak{A}_n^1.$$

Il est facile de calculer les transformées de g par les opérateurs de Sanov. Par exemple, pour $0\leq r\leq n$,

$$(1)\qquad \mathfrak{D}_{x\to|r|x+|n-r|y}g(x)=\sum_{(z_1,\dots,z_n)}f(z_1,\dots,z_n).$$

où la sommation s'étend aux $\binom{n}{r}$ systèmes d'arguments (z_i) dont r sont égaux à x, et $(n-r)$ à y. Cette formule se simplifie lorsque f est n-linéaire et symétrique (n° 9); dans ce cas, les $\binom{n}{r}$ termes du second membre sont égaux entre eux.

---

(15) Autrement dit, la définition des fonctions linéaires implique bien les propriétés usuelles.

DÉFINITION (2.8). — *Soit* $g(x)\in\mathfrak{A}_n^1$. *Nous dirons que* $f(x_1, \ldots, x_n)\in\mathfrak{A}^n$ *est une multilinéarisée de* g *si* f *est* n*-linéaire et si*

$$g(x)=f(x, \ldots, x).$$

Une même fonction peut admettre plusieurs multilinéarisées.

Une fonction $g(x)$ n'admet pas toujours de multilinéarisée. Si nous posons

$$h(x_1, \ldots, x_n)=\mathfrak{D}_{x\to\sum_{1\leq i\leq n}x_i} g(x)\in\mathfrak{A}^n,$$

$h(x)$ est n-linéaire symétrique, mais vérifie seulement $h(x, \ldots, x)=n!\,g(x)$ [prop. (2.3)]. S'il est possible de diviser univoquement h par $n!$, $\frac{1}{n!}h$ est une fonction multilinéarisée symétrique de $g(x)$.

Ces considérations s'étendent au cas de fonctions de plusieurs arguments.

3. — Analyseurs complets.

13. Modules multigradués complets.

DÉFINITION (3.1). — *Un* Ω*-module* $\hat{\mathrm{H}}$ *sera dit* n*-gradué complet s'il est donné comme produit direct (ou somme directe complète) d'une famille de sous-modules* $(\mathrm{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$.

Nous noterons comme précédemment (n° 3) $(\mathbf{P}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ les projecteurs d'homogénéité dans $\hat{\mathrm{H}}$. Un élément $f\in\hat{\mathrm{H}}$ peut donc être identifié à la famille $(\mathbf{P}_\alpha f)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ de ses composantes homogènes. A la différence des modules n-gradués incomplets [déf. (1.2)], f peut avoir une infinité de composantes homogènes non nulles.

Nous appellerons *topologie canonique* dans le module n-gradué complet $\hat{\mathrm{H}}$ la topologie *produit* des topologies discrètes sur les facteurs directs $(\mathrm{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$. Cette définition permet d'écrire tout élément f de $\hat{\mathrm{H}}$ comme la somme infinie de ses composantes homogènes

$$f=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\mathbf{P}_\alpha f.$$

Connaissant les modules $(\mathrm{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$, on peut construire le module n-gradué H et le module n-gradué complet $\hat{\mathrm{H}}$ qui admettent $(\mathrm{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ comme composantes homogènes. Les modules H et $\hat{\mathrm{H}}$ seront dits *associés*; H s'identifie à un sous-module de $\hat{\mathrm{H}}$; $\hat{\mathrm{H}}$ est le *complété* de H pour sa topologie canonique (induite par celle de $\hat{\mathrm{H}}$).

Nous pouvons caractériser la topologie canonique de H par le système fonda-

mental de voisinages de zéro, constitué par les modules $({}_rH)_{r\in\mathbf{N}}$, ainsi définis : $f\in{}_rH$ si et seulement si $\mathbf{P}_\alpha f=0$ pour $|\alpha|<r$. Le module complété $\hat{H}$ peut aussi s'interpréter comme la limite projective $\varprojlim H/{}_rH$ des modules quotients $H/{}_rH$, munis de leurs épimorphismes canoniques. Nous définirons de même les sous-modules ${}_r\hat{H}$ dans le module n-gradué complet $\hat{I}$ associé à H. Pour écrire les congruences $(\mathrm{mod}\,{}_rH)$ [resp. $(\mathrm{mod}\,{}_r\hat{H})$], nous utiliserons les notations suivantes :

Définition (3.2). — *Soit* H *un module n-gradué* (*resp. n-gradué complet*). *Pour* $f, g\in H$, *la relation*

$$f\equiv g \quad (\mathrm{mod.\ deg.}\ r) \quad (^{15})$$

équivaut à $\mathbf{P}_\alpha f=\mathbf{P}_\alpha g$ *pour tout* $\alpha\in\mathbf{N}^n$ *tel que* $|\alpha|<r$.

14. Congruences (mod. deg. r) dans les analyseurs. — Nous appliquons aux modules multigradués des analyseurs les définitions du n° 13. Les propositions suivantes font intervenir, pour la première fois, l'axiome (**A7**).

Proposition (3.1). — *Soient* $\mathfrak{A}$ *un analyseur incomplet* $m, n, r, s\in\mathbf{N}^*$, $f\in\mathfrak{A}^m$, $g_i, h_i\in\mathfrak{A}^n$ (*pour* $1\leq i\leq m$), *vérifiant*

$$f\equiv 0 \quad (\mathrm{mod.\ deg.}\ r),$$
$$g_i\equiv h_i \quad (\mathrm{mod.\ deg.}\ s), \qquad \textit{pour} \quad 1\leq i\leq m.$$

Alors

$$f(g_1, \ldots, g_m)\equiv f(h_1, \ldots, h_m) \qquad [\mathrm{mod.\ deg.}\ (r+s-1)].$$

Démonstration. — Soient, pour $1\leq i\leq m$, $j\in\mathbf{N}^*$, $g_{i,j}$ (resp. $h_{i,j}$) la composante homogène de degré total j de g_i (resp. h_i) (16). Nous avons, d'après la « formule de Taylor » (n° 11),

$$(1)\quad f(g_1, \ldots, g_m)-f(h_1, \ldots, h_m)=\sum_{(\alpha_{i,j})}\left(\mathfrak{D}_{x_i\to\sum_{j\in\mathbf{N}^*}|\alpha_{i,j}|g_{i,j}}-\mathfrak{D}_{x_i\to\sum_{j\in\mathbf{N}^*}|\alpha_{i,j}|h_{i,j}}\right)f(x_1, \ldots, x_m).$$

où la sommation est étendue aux familles $(\alpha_{i,j})$ d'entiers ≥ 0, tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux. Distinguons dans (1) deux sortes de termes :

1° Ceux pour lesquels $\alpha_{i,j}=0$ pour $j\geq s$; ces termes sont *nuls*; 2° Ceux pour lesquels l'un des $\alpha_{i,j}$, soit $\alpha_{p,q}$, n'est pas nul, avec $q\geq s$. Si $\sum_{i,j}\alpha_{i,j}<r$, le terme considéré est *nul* [prop. (2.3)]. Si, par contre, $\sum_{i,j}\alpha_{i,j}\geq r$, le degré

(15) Abréviation pour : « modulo des termes de degré total $\geq r$ ».

(16) L'axiome (**A7**) exprime le fait que $g_i=\sum_{1\leq j<\omega} g_{i,j}$.

total du terme considéré est

$$\sum_{i,j} j\alpha_{i,j} \geqq \sum_{i,j} \alpha_{i,j} + (q-1)\alpha_{p,q} \geqq r+s-1.$$

C. Q. F. D.

Proposition (3.2). — *Soient* $f, f' \in \mathfrak{A}^m$, $g_i, g'_i \in \mathfrak{A}^n$ $(1 \leqq i \leqq m)$, *vérifiant*

$$f \equiv f' \quad (\text{mod. deg. } r),$$
$$g_i \equiv g'_i \quad (\text{mod. deg. } r), \qquad \text{pour } 1 \leqq i \leqq m.$$

Alors

$$f(g_1, \ldots, g_m) \equiv f'(g'_1, \ldots, g'_m) \qquad (\text{mod. deg. } r).$$

Démonstration. — En appliquant deux fois la proposition (3.1), on trouve successivement

$$(f'-f)(g_1, \ldots, g_m) \equiv 0 \qquad (\text{mod. deg. } r)$$

et

$$f'(g'_1, \ldots, g'_m) \equiv f'(g_1, \ldots, g_m) \qquad (\text{mod. deg. } r).$$

15. Analyseurs complets.

Définition (3.3). — *Un analyseur complet* $\hat{\mathfrak{A}}$ *sur l'anneau* Ω *est constitué par la donnée :*

a. d'une suite $(\hat{\mathfrak{A}}^n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *de* Ω*-modules n-gradués complets ;*

b. d'une famille d'applications $\hat{\mathrm{T}}_{m,n} : \hat{\mathfrak{A}}^m \to \mathfrak{L}_m(\hat{\mathfrak{A}}^n)$, *pour* $m, n \in \mathbf{N}^*$;

c. d'une famille d'éléments distingués $\mathbf{e}_{m,i}$ $(m, i \in \mathbf{N}^*, i \leqq m)$ *tels que* $\mathbf{e}_{m,i} \in \hat{\mathfrak{A}}^m_{\delta_{m,i}}$,

satisfaisant aux axiomes suivants :

(**AC1**) *Si l'on note* $(\mathfrak{A}^n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *les modules n-gradués (incomplets) associés aux modules* $(\hat{\mathfrak{A}}^n)$. $f \in \mathfrak{A}^m$, $g_i \in \mathfrak{A}^n$ (*pour* $1 \leqq i \leqq m$) *impliquent* $(\hat{\mathrm{T}}_{m,n} f)(g_1, \ldots, g_m) \in \mathfrak{A}^n$.

(**AC2**) *La suite* $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, *les restrictions* $(\mathrm{T}_{m,n})$ *des applications* $(\hat{\mathrm{T}}_{m,n})$ *et les éléments* $(\mathbf{e}_{m,i})$ *définissent un analyseur incomplet que nous dirons associé à* $\hat{\mathfrak{A}}$.

(**AC3**) *Pour tous* $m, n \in \mathbf{N}^*$, $(\hat{\mathrm{T}}_{m,n} f)(g_1, \ldots, g_m)$ *dépend continûment de* $f \in \hat{\mathfrak{A}}^m$ *et des* $g_i \in \hat{\mathfrak{A}}^n$ $(1 \leqq i \leqq m)$, *ces modules étant munis de leurs topologies canoniques.*

Proposition (3.3). — *Soit* $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *un analyseur incomplet. Désignons par* $\hat{\mathfrak{A}}^n$, *pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$, *le complété du module n-gradué* $\mathfrak{A}^n$ (n° 13). *Alors les applications* $\mathrm{T}_{m,n}$ *se prolongent univoquement en des applications* $(\hat{\mathrm{T}}_{m,n})$ *qui font de* $\hat{\mathfrak{A}} = (\hat{\mathfrak{A}}^n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *un analyseur complet.* $\mathfrak{A}$ *est l'analyseur incomplet associé à* $\hat{\mathfrak{A}}$.

Démonstration. — L'existence et l'unicité du prolongement des $(\mathrm{T}_{m,n})$ résultent de la proposition (3.2) qui montre que l'application $(f, g_1, \ldots, g_m) \to f(g_1, \ldots, g_m)$ est *uniformément continue* (pour les topologies canoniques).

Il résulte du « principe du prolongement des identités » ([17]) que tous les axiomes (**A**) des analyseurs incomplets sont encore valables pour les analyseurs complets. Nous pourrons donc définir la *représentation régulière* d'un analyseur complet sans rien changer aux énoncés du n° 7. L'identification des éléments $\hat{\mathfrak{A}}$ à des fonctions, permise par la représentation régulière, justifiera encore l'usage des notations fonctionnelles. Nous écrirons désormais $f(g_1, \ldots, g_m)$ au lieu de $(\hat{\mathrm{T}}_{m,n} f)(g_1, \ldots, g_m)$.

Nous conservons, pour les analyseurs complets, les définitions des opérateurs de Sanov (simples et composés). La proposition (2.5) est encore valable, et permet de calculer les composantes homogènes (généralement en nombre infini) d'une fonction composée. Les propositions (3.1) et (3.2) restent valables sans modification.

Par contre, les notions de $\mathfrak{A}$-modules et de familles de fonctions polynomiales (n° 8) ne s'étendent pas sans modification. Si $\hat{\mathfrak{A}}$ est un analyseur complet, la définition d'un $\hat{\mathfrak{A}}$-module M répétera les conditions de la définition (2.3); mais nous supposerons de plus que M est un *module topologique* et que, si l'on munit les modules de fonctions $\mathfrak{F}_n(\mathrm{M})$ de la topologie de la convergence simple, les homomorphismes $\tau_n : \hat{\mathfrak{A}}^n \to \mathfrak{F}_n(\mathrm{M})$ sont *continus*. L'introduction d'une topologie dans M est nécessaire si l'on veut pouvoir considérer les fonctions $\tau_n f (f \in \mathfrak{A}^n)$ comme sommes infinies de leurs composantes homogènes. Si les homomorphismes τ_n sont *injectifs*, nous obtiendrons, par définition, une *famille de fonctions analytiques dans le module topologique* M.

Le module $\mathfrak{M} = \varinjlim \hat{\mathfrak{A}}^n$ de la représentation régulière est muni de sa topologie naturelle de limite inductive, et la représentation régulière permet ainsi d'identifier l'analyseur complet à une famille de fonctions analytiques ([18]).

Tout $\hat{\mathfrak{A}}$-module peut être considéré, par restriction des opérations, comme un $\mathfrak{A}$-module ($\mathfrak{A}$ désignant l'analyseur incomplet associé). Mais *la réciproque est inexacte :* si M est un $\mathfrak{A}$-module, il n'est pas possible, en général, de définir une structure de $\hat{\mathfrak{A}}$-module sur une extension $\hat{\mathrm{M}}$ de M qui prolonge les opérations du $\mathfrak{A}$-module M.

Il est un cas où des analyseurs (complets et incomplets) associés coïncident : c'est celui des *analyseurs nilpotents*.

Définition (3.4). — *Un analyseur $\mathfrak{A}$ sera dit nilpotent de classe r si r est le plus petit entier tel que :*

$$f \in \mathfrak{A}^n \text{ et } f = 0 \ [\text{mod. deg. } (r+1)] \quad \text{impliquent} \quad f = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}^*.$$

Cette définition vaut pour les analyseurs complets ou incomplets. Elle permet

([17]) Bourbaki, *Topologie générale*, chap. III, § 3, n° 4.

([18]) On notera que le module topologique $\mathfrak{M}$ n'est en général pas complet.

de formuler différemment la proposition (3.2), qui exprime l'existence d'une *suite canonique d'analyseurs nilpotents quotients de* $\mathfrak{A}$. L'analyseur $\hat{\mathfrak{A}}$ peut alors s'interpréter comme la *limite projective* de ces analyseurs nilpotents, munis de leurs épimorphismes canoniques (*cf.* n° 13).

Nous avons donné la première place dans notre exposé à la notion d'analyseur incomplet, car elle est purement algébrique et correspond exactement aux « calculs » dans des structures algébriques usuelles. Par contre, les notions de $\hat{\mathfrak{A}}$-modules et de familles de fonctions analytiques sont très artificielles. Cependant l'étude des lois de groupes ne pourra s'effectuer que dans les analyseurs complets.

Quand nous ne ferons pas intervenir l'analyseur incomplet associé, nous omettrons les signes $\hat{}$ dans la notation des analyseurs complets.

16. Le théorème des fonctions implicites. — L'introduction des analyseurs complets est rendue nécessaire si l'on veut construire des fonctions en calculant successivement leurs composantes homogènes : en général un tel procédé conduit à une suite infinie de composantes non nulles. En voici un exemple typique.

Théorème (3.1). — *Soient* $\mathfrak{A}$ *un analyseur complet, et* $f(x; y_1, \ldots, y_n) \in \mathfrak{A}^{n+1}$ *vérifiant* $f(x; 0, \ldots, 0) \equiv x \pmod{\text{deg. } 2}$. *Alors il existe une fonction* $g(y_1, \ldots, y_n) \in \mathfrak{A}^n$ *et une seule telle que* $f(g(y_1, \ldots, y_n); y_1, \ldots, y_n) = 0$.

Démonstration. — Posons

$$h(x; y_1, \ldots, y_n) = x - f(x; y_1, \ldots, y_n).$$

En s'appuyant sur la proposition (3.1), on démontre que les relations g, $g' \in \mathfrak{A}^n$, $g \equiv g' \pmod{\text{deg. } r}$ impliquent

$$h(g(y_1, \ldots, y_n); y_1, \ldots, y_n) \equiv h(g'(y_1, \ldots, y_n); y_1, \ldots, y_n) \quad [\text{mod. deg. } (r+1)].$$

Posons alors

$$g_0 = 0 \quad \text{et} \quad g_i(y_1, \ldots, y_n) = h(g_{i-1}(y_1, \ldots, y_n); y_1, \ldots, y_n) \quad \text{pour} \quad i \in \mathbf{N}^*.$$

Nous avons $g_i \equiv g_{i-1} \pmod{\text{deg. } i}$ pour tout $i \in \mathbf{N}^*$. La suite $(g_i)_{i \in \mathbf{N}}$ converge donc dans $\mathfrak{A}^n$ vers une fonction f qui vérifie les conditions du théorème. Elle est unique, car les relations

$$f(g; y_1, \ldots, y_n) = f(g'; y_1, \ldots, y_n) = 0 \quad \text{et} \quad g \equiv g' \pmod{\text{deg. } r}$$

impliquent $g \equiv g' [\text{mod. deg. } (r+1)]$, d'où $g = g'$.

Remarques. — On généraliserait facilement ce théorème avec l'hypothèse plus faible : $f(x; 0, \ldots, 0) \equiv k(x) \pmod{\text{deg. } 2}$, où $k \in \mathfrak{A}_1^1$ est *inversible* [déf. (5.2)]. Quant au théorème concernant les systèmes de plusieurs fonctions, sa validité résulte de la construction des puissances cartésiennes d'analyseurs (n° 18).

4. — Constructions sur les analyseurs. Exemples.

Dans tout ce paragraphe, il ne sera question que d'analyseurs incomplets ([19]).

17. Adjonction de constantes a un analyseur. — Soit $\mathfrak{A}$ un analyseur. Dans une fonction $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathfrak{A}^{n+1}$, nous pouvons convenir de considérer le dernier argument x_{n+1} comme une « constante » a; f devient ainsi une fonction $f(x_1, \ldots, x_n, a)$ de ses n premiers arguments. Si nous conservons la graduation par rapport aux n premiers arguments, et si nous nous restreignons aux fonctions dont la composante homogène de degré total o par rapport aux n premiers arguments est nulle, nous obtenons un module n-gradué $\mathfrak{B}^n$. On peut définir d'une manière naturelle une structure d'analyseur sur la suite $(\mathfrak{B}^n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

Définition (4.1). — *Soit $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^n)$ un analyseur, avec les éléments distingués $(\mathbf{e}_{m,i})$ et les lois de composition $(\mathrm{T}_{m,n})$. Nous définirons l'analyseur $\mathfrak{B}(\mathfrak{B}^n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ par ses éléments distingués $(\mathbf{e}'_{m,i})$ et ses lois de composition $(\mathrm{T}'_{m,n})$ en posant :*

$$a.\quad \mathfrak{B}^n = \sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n,\,|\alpha|\,=\,0} \mathfrak{B}^n_\alpha,$$

$$\mathfrak{B}^n_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \mathfrak{A}^{n+1}_{\alpha,i},$$

où

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \qquad \text{et} \qquad (\alpha, i) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, i);$$

$$b.\quad \mathbf{e}'_{m,i} = \mathbf{e}_{m+1,i};$$

$$c.\quad (\mathrm{T}'_{m,n} f)\,(g_1, \ldots, g_m) = (\mathrm{T}_{m+1,n+1} f)\,(g_1, \ldots, g_m, \mathbf{e}_{n+1,n+1})$$

pour tous $m, n \in \mathbf{N}^*$, $f \in \mathfrak{B}^m$, $g_i \in \mathfrak{B}^n$ $\quad (1 \leqslant i \leqslant m)$.

L'analyseur $\mathfrak{B}$ sera dit obtenu à partir de $\mathfrak{A}$ par adjonction d'une constante, et noté éventuellement $\mathfrak{A}(a)$.

Le lecteur vérifiera sans peine que les axiomes (**A**) du n° 5 sont effectivement vérifiés par $\mathfrak{B}$.

Si l'on itère la construction précédente, on obtient les analyseurs $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_q)$ définis à partir de $\mathfrak{A}$ par adjonction d'une famille finie de « constantes ». On pourrait définir d'une manière analogue l'adjonction d'une famille quelconque de « constantes » ([20]).

([19]) Toutes les constructions que nous effectuerons s'étendent d'elles-mêmes aux analyseurs complets (par complétion des analyseurs incomplets obtenus). Par contre, les considérations des n°s 20 et 21 ne valent que pour les analyseurs incomplets.

([20]) On remarquera que la définition de $\mathfrak{A}(a)$ se simplifierait si l'on ne tenait pas compte de l'axiome (**A** 7).

18. Puissances cartésiennes d'analyseurs. — Soient $\mathfrak{A}$ un analyseur, $\mathfrak{M}$ le module de sa représentation régulière (n° 7). Nous identifions chaque module $\mathfrak{A}^n$ à un module de fonctions de n arguments dans $\mathfrak{M}$.

Soit I un ensemble d'indices. Formons le produit direct $\mathfrak{M}^{\mathrm{I}}$. Un élément $\mathrm{X}\in\mathfrak{M}^{\mathrm{I}}$ coïncide avec la famille $(x_\iota)_{\iota\in\mathrm{I}}$ de ses composantes. Nous définissons le module $\mathrm{M}(\mathrm{I})$ d'applications de $\mathfrak{M}^{\mathrm{I}}$ dans $\mathfrak{M}$ en convenant que $f\in\mathrm{M}(\mathrm{I})$ si et seulement si :

a. $f(\mathrm{X})=f((x_\iota)_{\iota\in\mathrm{I}})$ *ne dépend que d'un nombre fini de composantes de* $\mathrm{X}\in\mathfrak{M}^{\mathrm{I}}$, *soient* $(x_{\iota_1}, \ldots, x_{\iota_n})$;

b. après suppression des arguments neutres, f, *considéré comme fonction de* $(x_{\iota_1}, \ldots, x_{\iota_n})$ *appartient à* $\mathfrak{A}^n$.

Si I est un ensemble ordonné de p éléments, $\mathrm{M}(\mathrm{I})$ s'identifie donc à $\mathfrak{A}^p$.

Le même procédé permet de définir, pour tout $n\in\mathrm{N}^*$, des modules de fonctions de n arguments parcourant $\mathfrak{M}^{\mathrm{I}}$, à valeurs dans $\mathfrak{M}$: nous nous ramènerons en effet au cas précédent en remplaçant I par l'ensemble produit $\mathrm{I}\times[1, n]$ des couples (ι, i), où $\iota\in\mathrm{I}$, $1\leq i\leq n$. Nous conviendrons de noter $\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}$ ce module de fonctions; en particulier, nous remplacerons la notation $\mathrm{M}(\mathrm{I})$ par $\mathfrak{A}^{\mathrm{I},1}$. Un élément de $\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}$ sera noté soit f, soit $f(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$, soit $f((x_{\iota,i})_{\iota\in\mathrm{I},1\leq i\leq n})$, ... Un argument X représenté par une lettre majuscule pourra toujours être remplacée par la famille $(x_\iota)_{\iota\in\mathrm{I}}$ de ses composantes.

Si I est un ensemble ordonné de p éléments, soit, pour simplifier, l'intervalle d'entiers $[1, p]$, $\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}$ s'identifie à $\mathfrak{A}^{p,n}$: un élément $f\in\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}$ est identifié à $f(x_{1,1}, \ldots, x_{p,1}; \ldots; x_{1,n}, \ldots, x_{p,n})$. Nous définirons alors une *structure de module n-gradué sur* $\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}$ en posant, pour $f(x_{1,1}, \ldots, x_{p,n})\in\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}$, $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\in\mathrm{N}^n$, $f\in\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}_\alpha$ si et seulement si f est de degré total α_i par rapport aux p arguments $(x_{j,i})_{1\leq j\leq p}$ pour tout $1\leq i\leq n$. Il est clair que cette graduation ne dépend pas de l'ordre où sont donnés les éléments de I.

La définition précédente s'étend au cas d'un ensemble d'indices I quelconque : si $f(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)\in\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}$, on peut choisir, par définition, une partie finie $\mathrm{J}\subset\mathrm{I}$ telle que les arguments $(x_{\iota,i})$ soient neutres dans f pour tout $1\leq i\leq n$ et $\iota\notin\mathrm{J}$: f peut ainsi être identifié, par suppression d'arguments neutres, à un élément f' de $\mathfrak{A}^{\mathrm{J},n}$, et nous poserons, pour tout $\alpha\in\mathrm{N}^n$, $f\in\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}_\alpha$ si et seulement si $f'\in\mathfrak{A}^{\mathrm{J},n}_\alpha$. Cette définition est indépendante du choix de la partie J, et *introduit sur* $\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}$ *une structure de module n-gradué.*

Définition (4.2). — *Soient* $\mathfrak{A}$ *un analyseur,* $\mathfrak{M}$ *le module de sa représentation régulière,* I *un ensemble d'indices. Nous définissons comme suit une famille de modules multigradués* $\mathfrak{B}^n\subset\mathfrak{L}_n(\mathfrak{M}^{\mathrm{I}})$, *pour* $n\in\mathrm{N}^*$: $\mathrm{F}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)\in\mathfrak{B}^n$ *si et seulement si chaque composante* $f_\iota(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ *de* $\mathrm{F}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ *appartient à* $\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}$ (*pour* $\iota\in\mathrm{I}$). *Les graduations sur les modules* $\mathfrak{B}^n$ *s'obtiennent en posant,*

pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\alpha \in \mathbf{N}^n$: $F \in \mathfrak{B}^n_\alpha$ *si et seulement si chaque composante* $f_i \in \mathfrak{A}^{1,n}_\alpha$, *pour tout* $i \in I$.

PROPOSITION (4.1). — *Avec les notations précédentes, la suite de modules* $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}^n)$, *les éléments distingués* $\mathbf{E}_{n,i} \in \mathfrak{B}^n$ *définis par* $\mathbf{E}_{n,i}(X_1, \ldots, X_n) = X_i$, *et les lois de composition* $(T_{m,n})$ *définies par la composition des fonctions dans* $\mathfrak{M}^I$, *constituent un analyseur, que nous noterons* $\mathfrak{B} = \Pi^I \mathfrak{A}$. *Si* I *est un ensemble ordonné de p éléments, nous écrirons plus simplement* $\mathfrak{B} = \Pi^p \mathfrak{A}$, *et nous dirons que* $\mathfrak{B}$ *est la puissance cartésienne* $p^{ième}$ *de* $\mathfrak{A}$.

On vérifie sans peine que $\mathfrak{B}$ satisfait aux axiomes (**A**) du n° 5.

L'analyseur $\Pi^I \mathfrak{A}$ a été défini à partir d'une famille de fonctions polynomiales dans le module $\mathfrak{M}^I$. Plus généralement, si M est un $\mathfrak{A}$-module, on définit canoniquement sur M^I une structure de $\Pi^I \mathfrak{A}$-module.

19. CHANGEMENTS D'ANNEAUX DE BASE ; PRODUITS TENSORIELS. — Jusqu'à maintenant, nous n'avons guère fait intervenir l'anneau de base Ω d'un analyseur, qui n'était parfois même pas mentionné dans nos énoncés. Dans ce numéro, nous décrivons des constructions qui permettent de changer d'anneau de base. Pour abréger, nous parlerons d' « Ω-analyseurs » au lieu d' « analyseurs sur l'anneau Ω ».

Un homomorphisme d'anneaux, $\varphi : \Omega \to \Omega'$ sera toujours un *homomorphisme unitaire*, c'est-à-dire vérifiant $\varphi(1) = 1$, où nous désignons par le même symbole 1 les unités des différents anneaux. La donnée de l'homomorphisme $\varphi : \Omega \to \Omega'$ équivaut à la définition sur Ω' d'une structure de Ω-*algèbre* (unitaire, associative et commutative).

Si $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^n)_{n \in \mathbf{N}}$ est un Ω'-analyseur, l'homomorphisme $\varphi : \Omega \to \Omega'$ permet de définir canoniquement sur chaque $\mathfrak{A}^n$ une structure de Ω-module : si $\lambda \in \Omega$, $f \in \mathfrak{A}^n$, nous posons $\lambda f = \varphi(\lambda) f$. Si nous conservons les graduations de $\mathfrak{A}$, ses éléments distingués, et ses opérations $(T_{m,n})$, il est clair que nous obtenons un Ω-analyseur. Cette construction sera dite *restriction de l'anneau de base*. Nous l'appliquerons en particulier au cas où Ω est un sous-anneau de Ω' (φ étant l'injection canonique), ainsi qu'au cas où $\Omega = \mathbf{Z}$ (φ désignant l'homomorphisme unitaire canonique de Z dans Ω').

La construction suivante (*extension de l'anneau de base*) est moins élémentaire.

PROPOSITION (4.2). — *Soient* Ω, Ω' *deux anneaux,* $\varphi : \Omega \to \Omega'$ *un homomorphisme,* $\mathfrak{A}$ *un* Ω*-analyseur. Il existe un analyseur* $\mathfrak{B} = \Omega' \otimes_\Omega \mathfrak{A}$ *et un seul, dit « produit tensoriel sur* Ω *de* Ω' *et de* $\mathfrak{A}$ », *défini par les conditions suivantes* :

a. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, *le module n-gradué* $\mathfrak{B}^n = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \mathfrak{B}^n_\alpha$ *est donné par*

$$\mathfrak{B}^n = \Omega' \otimes_\Omega \mathfrak{A}^n, \qquad \mathfrak{B}^n_\alpha = \Omega' \otimes_\Omega \mathfrak{A}^n_\alpha \qquad (\text{pour } \alpha \in \mathbf{N}^n),$$

en considérant Ω' *comme un* Ω*-module, et en prenant sur* $\mathfrak{B}^n$ *sa structure naturelle de* Ω'*-module.*

b. Les éléments distingués $\mathbf{e}'_{m,i}$ *de* $\mathfrak{B}$ *sont donnés par*

$$\mathbf{e}'_{m,i} = 1 \otimes \mathbf{e}_{m,i}, \qquad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq m < \infty.$$

c. Les lois de composition $\mathrm{T}'_{m,n}$ *de* $\mathfrak{B}$ *vérifient*

$$(\mathrm{T}'_{m,n}(1 \otimes f))\,(1 \otimes g_1, \ldots, 1 \otimes g_m) = 1 \otimes (\mathrm{T}_{m,n} f)\,(g_1, \ldots, g_m),$$

pour $m, n \in \mathbf{N}^*$, $f \in \mathfrak{A}^m$, $g_i \in \mathfrak{A}^n (1 \leq i \leq m)$.

Démonstration. — Montrons que les propriétés énoncées permettent de calculer $(\mathrm{T}'_{m,n} f')\,(g'_1, \ldots, g'_m)$ pour tous $f' \in \mathfrak{B}^m$, $g'_i \in \mathfrak{B}^n$. Prenons d'abord $f' = \lambda \otimes f$, $g'_i = \lambda_i \otimes g_i$ avec

$$\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \Omega, \qquad f \in \mathfrak{A}^m_\alpha, \qquad g_1, \ldots, g_m \in \mathfrak{A}^n, \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m).$$

Alors les conditions *a* et *c* montrent que

$$(1) \qquad (\mathrm{T}'_{m,n} f')\,(g'_1, \ldots, g'_m) = \lambda \lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_m^{\alpha_m} \otimes (\mathrm{T}_{m,n} f)\,(g_1, \ldots, g_m).$$

Nous pourrons ramener le cas général au précédent si nous savons calculer les opérateurs de Sanov dans $\mathfrak{B}$. Or, si $f \in \mathfrak{A}^m$, et si $(\mathrm{I}_j)_{1 \ldots m}$ est une partition de l'intervalle d'entiers $[1, n]$, nous avons d'après *b* et *c*

$$(\mathrm{T}'_{m,n}(1 \otimes f))\left(\sum_{i \in \mathrm{I}_1} \mathbf{e}'_{n,i}, \ldots, \sum_{i \in \mathrm{I}_m} \mathbf{e}'_{n,i}\right) = (\mathrm{T}'_{m,n}(1 \otimes f))\left(1 \otimes \sum_{i \in \mathrm{I}_1} \mathbf{e}_{n,i}, \ldots, 1 \otimes \sum_{i \in \mathrm{I}_m} \mathbf{e}_{n,i}\right)$$
$$= 1 \otimes (\mathrm{T}_{m,n} f)\left(\sum_{i \in \mathrm{I}_1} \mathbf{e}_{n,i}, \ldots, \sum_{i \in \mathrm{I}_m} \mathbf{e}_{n,i}\right),$$

ce qui se résume par la formule

$$(2) \qquad \mathfrak{D}(1 \otimes f) = 1 \otimes \mathfrak{D} f,$$

où $\mathfrak{D}$ désigne un opérateur de Sanov simple.

Nous savons maintenant *calculer* $(\mathrm{T}'_{m,n} f')\,(g'_1, \ldots, g'_m)$ pour tous $f' \in \mathfrak{B}^m$, $g'_i \in \mathfrak{B}^n$, en utilisant les relations (1) et (2), ainsi que des représentations de f' et des g'_i sous forme de sommes telles que $f' = \sum_j \lambda_j \otimes f_j$, où $\lambda_j \in \Omega'$, $f_j \in \mathfrak{A}^m$, ...

Il reste à démontrer que les éléments de $\mathfrak{B}^n$ ainsi obtenus *ne dépendent que de* f' *et des* g'_i, et non du choix de leurs représentations.

Nous construirons directement la *représentation régulière* de l'analyseur $\mathfrak{B}$. Soit $\mathfrak{M}$ le module de la représentation régulière de $\mathfrak{A}$, que nous identifierons désormais à une famille de fonctions polynomiales dans $\mathfrak{M}$. Posons $\mathfrak{M}' = \Omega' \otimes_\Omega \mathfrak{M}$. Nous utiliserons la définition « constructive » suivante de $\mathfrak{M}'$: soit R l'ensemble des parties finies du produit $\Omega' \times \mathfrak{M}$; nous définissons sur R une structure de monoïde abélien par l'opération de réunion (des parties finies de $\Omega' \times \mathfrak{M}$). Le monoïde R sera noté additivement : ses éléments s'écriront donc sous la forme $\sum_j (\lambda_j, a_j)$, avec $\lambda_j \in \Omega'$, $a_j \in \mathfrak{M}$, j parcourant un ensemble fini. Nous avons

un épimorphisme canonique ϱ de R sur $\mathfrak{M}'$ (considéré comme monoïde abélien additif), défini par

$$\varrho\left(\sum_j (\lambda_j, a_j)\right) = \sum_j \lambda_j \otimes a_j. \tag{3}$$

Pour tout $f \in \mathfrak{A}^m$, nous définissons une application *univoque* ψf du produit cartésien R^m dans $\mathfrak{M}'$ en posant

$$(\psi f)\left(\sum_{i\in I_1} (\lambda_i, \alpha_i), \ldots, \sum_{i\in I_m} (\lambda_i, \alpha_i)\right) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \left(\prod_{1\leq i\leq n} \lambda_i^{\alpha_i}\right) \otimes \mathfrak{D}_{x_j \to \sum_{i\in I_j} |\alpha_i|\, a_i} f(x_1, \ldots, x_m). \tag{4}$$

Dans cette formule, $(I_j)_{1\leq j\leq m}$ désigne une partition de l'intervalle d'entiers $[1, n]$; la sommation s'étend aux familles d'entiers $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$; dans les symboles des opérateurs de Sanov composés, nous avons introduit des éléments $a_i \in \mathfrak{M}$, par une convention évidente.

Nous noterons $\xi \equiv \xi'$ la relation d'équivalence entre deux éléments de R qui signifie que la substitution de ξ' à ξ comme argument dans l'une quelconque des fonctions $\psi f (f \in \mathfrak{A})$ ne modifie pas la valeur de cette fonction. Nous voulons démontrer que le second membre de (4) ne dépend que des éléments

$$\sum_{i\in I_j} \lambda_i \otimes a_i \in \mathfrak{M}' \qquad (\text{pour } 1 \leq j \leq m),$$

c'est-à-dire que $\varrho(\xi) = \varrho(\xi')$ implique $\xi \equiv \xi'$. Il suffit pour cela, d'après la définition du produit tensoriel, c'est-à-dire de l'application ϱ, d'établir les quatres relations :

$$\xi \equiv \xi' \text{ implique } \zeta + \eta \equiv \xi' + \eta \quad \text{pour } \xi, \xi', \eta \in R, \tag{5a}$$
$$(\lambda + \lambda', a) \equiv (\lambda, a) + (\lambda', a) \quad \text{pour } \lambda, \lambda' \in \Omega', \quad a \in \mathfrak{M}. \tag{5b}$$
$$(\lambda, a + a') \equiv (\lambda, a) + (\lambda, a') \quad \text{pour } \lambda \in \Omega', \quad a, a' \in \mathfrak{M}. \tag{5c}$$
$$(\varrho(\mu)\lambda, a) \equiv (\lambda, \mu a) \quad \text{pour } \lambda \in \Omega', \quad \mu \in \Omega, \quad a \in \mathfrak{M}. \tag{5d}$$

On démontre (5a) à partir de la proposition (2.4) et (5b) à partir de la proposition (2.3); (5c) et (5d) résultent de la définition des opérateurs de Sanov.

Puisque $(\psi f)(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ ne dépend que de $\varrho(\xi_1), \ldots, \varrho(\xi_m)$ pour tout $f \in \mathfrak{A}^m$, nous définissons $\chi f \in \mathfrak{L}_m(\mathfrak{M}')$ en posant

$$(\chi f)(\varrho(\xi_1), \ldots, \varrho(\xi_m)) = (\psi f)(\xi_1, \ldots, \xi_m) \tag{6}$$

pour $f \in \mathfrak{A}^m$, $\xi_1, \ldots, \xi_m \in R$.

Soit $f' = \sum_j \lambda_j \otimes f_j \in \mathfrak{B}^n$, où $\lambda_j \in \Omega'$, $f_j \in \mathfrak{A}^m$. Nous définissons $(\Gamma'_m f') \in \mathfrak{L}_m(\mathfrak{M}')$

en posant

$$(7) \qquad T'_m f' = \sum_j \lambda_j (\gamma_j f_j).$$

Il est aisé de voir que cette définition est cohérente. Nous laissons au lecteur le soin d'achever la démonstration d'existence de l'analyseur $\mathfrak{B}$, dont nous venons de construire la représentation régulière : $f' \to T'_m f'$ dans le Ω'-module $\mathfrak{M}'$.

Remarque. — Soit M un $\mathfrak{A}$-module défini par les homomorphismes τ_n [déf. (2.3)]. Notre démonstration nous permet de définir canoniquement sur $M' = \Omega' \otimes_\Omega M$ une structure de $\mathfrak{B}$-module (avec les homomorphismes τ'_n). Mais, si les $\mathfrak{P}_n = (\tau_n \mathfrak{A}^n)$ constituent une famille de fonctions polynomiales associée à $\mathfrak{A}$ dans M, il se peut que les $\mathfrak{P}'_n = (\tau'_n \mathfrak{B}^n)$ ne constituent pas une famille de fonctions polynomiales dans M', ou encore constituent une famille de fonctions polynomiales associées à un analyseur différent de $\mathfrak{B}$.

20. Compositeurs et analyseurs. — Pour mieux étudier les analyseurs, et pour en construire des exemples, il nous sera utile d'introduire la notion plus générale de « *compositeur* », obtenue en conservant seulement les axiomes (**A 3**) et (**A 4**) des analyseurs incomplets. Plus précisément, nous poserons la

Définition (4.3). — *Un compositeur* E *est constitué par la donnée :*

a. d'une suite d'ensembles $E^n (n \in \mathbf{N}^*)$;

q. d'une famille de lois de composition $(T_{m,n})$, *telles qu'à tous* $f \in E^m$, $g_i \in E^n (1 \leq i \leq m)$, $T_{m,n}$ *associe l'élément* $(T_{m,n} f)(g_1, \ldots, g_m) \in E^n$ (*pour tous* $m, n \in \mathbf{N}^*$);

c. d'une famille d'éléments distingués $(\mathbf{e}_{m,i})$ *tels que* $\mathbf{e}_{m,i} \in E^m$ *pour* $1 \leq i \leq m < \infty$. *satisfaisant aux axiomes suivants :*

(**C 1**) *Soient* m, n, $p \in \mathbf{N}^*$, $f \in E^m$, $g_i \in E^n$ (*pour* $1 \leq i \leq m$), $h_j \in E^p$ (*pour* $1 \leq j \leq n$). *Posons*

$$(T_{m,n} f)(g_1, \ldots, g_m) = k \in E^n$$

et

$$(T_{n,p} g_i)(h_1, \ldots, h_n) = l_i \in E^p \qquad (\text{pour } 1 \leq i \leq m).$$

Alors

$$(T_{n,p} k)(h_1, \ldots, h_n) = (T_{m,p} f)(l_1, \ldots, l_m).$$

(**C 2**) *Pour tous* $m, n \in \mathbf{N}^*$, $i \leq m$, $f_1, \ldots, f_m \in E^n$, *on a*

$$(T_{m,n} \mathbf{e}_{m,i})(f_1, \ldots, f_m) = f_i.$$

Pour tous $m \in \mathbf{N}^*$, $f \in E^n$, *on a*

$$(T_{m,m} f)(\mathbf{e}_{m,1}, \ldots, \mathbf{e}_{m,m}) = f.$$

Exemples. — *a.* Le *compositeur unité* $\mathrm{I} = (\mathrm{I}^n)$, où chaque ensemble I^n se réduit aux éléments $(\mathbf{e}_{n,i})_{1 \leq i \leq n}$.

b. Soit Ω un anneau unitaire. Nous noterons $[\Omega]$ le *compositeur canoniquement associé* à Ω, obtenu en prenant pour ensemble $[\Omega]^n$ le Ω-module libre de base $(\mathbf{e}_{n,i})_{1 \leq i \leq n}$. Les lois de composition $\mathrm{T}_{m,n}$ sont définies en posant, pour

$$f = \sum_{1 \leq i \leq m} \lambda_i \mathbf{e}_{m,i} \qquad \text{et} \qquad g_i = \sum_{1 \leq j \leq n} \mu_{i,j} \mathbf{e}_{n,j}$$

(avec $\lambda_i, \mu_{i,j} \in \Omega$)

$$(\mathrm{T}_{m,n} f)(g_1, \ldots, g_m) = \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{1 \leq j \leq m} \lambda_j \mu_{j,i} \right) \mathbf{e}_{n,i}.$$

c. Tout analyseur incomplet [déf. (2.1)] ou complet [déf. (3.3)] *est un compositeur.*

On définit la *représentation régulière d'un compositeur* comme celle d'un analyseur incomplet. Les opérations $(\mathrm{T}_{m,n})$ peuvent ainsi être identifiées à la composition des fonctions dans un ensemble.

On définit d'une manière naturelle les notions de *sous-compositeur* et de *famille de générateurs d'un compositeur*, ainsi que celle d'*homomorphisme de compositeurs*.

Soient Ω et Ω' deux anneaux unitaires; à tout homomorphisme unitaire $\varphi : \Omega \to \Omega'$ on peut faire correspondre de façon évidente un homomorphisme des compositeurs associés $[\Omega]$ et $[\Omega']$, que nous désignerons encore par φ.

Définition (1.4). — *Soit Ω un anneau commutatif unitaire. Un compositeur sur Ω (ou Ω-compositeur) est constitué par la donnée d'un compositeur* E *et d'un homomorphisme* $\omega : [\Omega] \to \mathrm{E}$.

Dans un Ω-compositeur, chaque E^n possède une structure de Ω-*module* définie canoniquement : pour $f_1, f_2 \in \mathrm{E}^n$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \Omega$, on pose

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = (\mathrm{T}_{2,n} \omega(\lambda_1 \mathbf{e}_{2,1} + \lambda_2 \mathbf{e}_{2,2}))(f_1, f_2).$$

On remarquera que l'axiome analogue à (**A1**) est satisfait [en conséquence de (**C1**)].

Tout Ω-analyseur est un Ω-compositeur. Cependant la notion de Ω-compositeur est plus générale, car elle ne fait pas intervenir de graduation. Nous avons vu au numéro précédent que la construction des produits tensoriels d'analyseurs utilisait essentiellement les graduations. Cette constatation est le point de départ d'une nouvelle axiomatique des analyseurs qui les fait apparaître comme des Ω-compositeurs dont on sait construire, canoniquement, les produits tensoriels (21); nous allons définir la notion de Ω-*compositeur analytique*, qui

(21) Je dois à P. Cartier l'idée de remplacer entièrement les axiomes des graduations par ceux des produits tensoriels.

correspond à celle de Ω-analyseur incomplet, à ceci près que l'axiome (**A 7**) ne sera pas vérifié en général ([22]). Pour abréger cette définition nous formulerons préalablement un lemme élémentaire.

LEMME (4.1). — *Soient Ω, Ω' deux anneaux commutatifs unitaires, φ un homomorphisme unitaire de Ω dans Ω', E et E' deux compositeurs respectivement sur Ω et Ω', $\psi : E \to E'$ un homomorphisme tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} [\Omega] & \xrightarrow{\omega} & E \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ [\Omega'] & \xrightarrow{\omega'} & E' \end{array}$$

soit commutatif. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit canoniquement, à partir de ce diagramme, un homomorphisme $\tau_n : \Omega' \underset{\varphi}{\otimes} E^n \to E'^n$ en posant

$$\tau_n(\lambda \otimes f) = \lambda \psi(f) \qquad \text{pour} \quad \lambda \in \Omega', \quad f \in E^n.$$

Dans cet énoncé nous avons noté $\Omega' \underset{\varphi}{\otimes} E^n$ le produit tensoriel sur Ω de Ω' considéré comme Ω-module grâce à la donnée de φ et du Ω-module E^n.

DÉFINITION (4.5). — *Un compositeur analytique $\mathfrak{A}$ sur l'anneau commutatif unitaire Ω est constitué par la donnée :*

a. d'un Ω-compositeur $\mathfrak{A}$;

b. d'une construction canonique (ou foncteur) qui, à tout couple (Ω', φ) formé d'un anneau commutatif unitaire Ω' et d'un homomorphisme unitaire $\varphi : \Omega \to \Omega'$ associe un Ω'-compositeur $\mathfrak{A}' = \Omega' \underset{\varphi}{\otimes} \mathfrak{A}$, et un diagramme commutatif d'homomorphismes

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} [\Omega] & \xrightarrow{\omega} & \mathfrak{A} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ [\Omega'] & \xrightarrow{\omega'} & \mathfrak{A}' = \Omega' \underset{\varphi}{\otimes} \mathfrak{A} \end{array}$$

satisfaisant aux axiomes suivants :

(**A'1**) *Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'homomorphisme $\tau_n : \Omega' \underset{\varphi}{\otimes} \mathfrak{A}^n \to \mathfrak{A}'^n$ défini à partir du diagramme (1) conformément au lemme (4.1) est un isomorphisme.*

(**A'2**) *Si $\Omega' = \Omega$ et si φ est l'identité sur Ω, alors $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$, et l'homomorphisme ψ du diagramme (1) est l'identité sur $\mathfrak{A}$.*

(**A'3**) *Si $\varphi : \Omega \to \Omega'$ et $\varphi' : \Omega' \to \Omega''$ sont deux homomorphismes unitaires*

([22]) Rappelons que cet axiome n'est destiné qu'à faciliter le passage aux analyseurs complets associés. Si (**A 7**) n'est pas vérifié dans un Ω-compositeur analytique donné, l'ensemble des éléments dont la composante homogène de degré total 0 est nulle est un sous-compositeur analytique, où (**A 7**) se trouve satisfait.

d'anneaux commutatifs, posons

$$\varphi''=\varphi'\varphi, \qquad \mathfrak{A}'=\Omega'\underset{\varphi}{\otimes}\mathfrak{A}, \qquad \mathfrak{A}''=\Omega''\underset{\varphi''}{\otimes}\mathfrak{A}.$$

Alors, dans le diagramme commutatif d'homomorphismes construits en juxtaposant deux diagrammes du type (1) *:*

(2)
$$\begin{array}{ccccc}
[\Omega] & & \xrightarrow{\quad\omega\quad} & & \mathfrak{A} \\
{\scriptstyle\varphi''}\downarrow & \searrow^{\varphi} & & & \\
 & & [\Omega'] & \xrightarrow{\omega'} & \mathfrak{A}' \\
 & \swarrow_{\varphi'} & & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\
[\Omega''] & & \xrightarrow{\quad\omega''\quad} & & \mathfrak{A}''
\end{array}$$

il est possible d'introduire un homomorphisme $\psi'\colon\mathfrak{A}'\to\mathfrak{A}''$ *qui respecte la commutativité.*

D'après (**A'1**), les sous-compositeurs $\psi\mathfrak{A}$ et $\omega'[\Omega']$ de $\mathfrak{A}'$ engendrent $\mathfrak{A}'$. Par conséquent, l'homomorphisme ψ' de (**A'3**) est *nécessairement unique.*

D'après la propriété d'associativité du produit tensoriel, $\Omega''\underset{\varphi''}{\otimes}\mathfrak{A}^n$ s'identifie à

$$\Omega''\underset{\varphi'}{\otimes}\Big(\Omega'\underset{\varphi}{\otimes}\mathfrak{A}^n\Big) \quad \text{pour tout } n\in\mathbf{N}^*.$$

Il en résulte que le Ω'*-compositeur* $\mathfrak{A}'=\Omega'\underset{\varphi}{\otimes}\mathfrak{A}$ *peut être défini canoniquement comme un compositeur analytique sur* Ω' *:* on prendra, par définition,

$$\Omega''\underset{\varphi'}{\otimes}\mathfrak{A}'=\Omega''\underset{\varphi''}{\otimes}\mathfrak{A},$$

et le diagramme du type (1)

$$\begin{array}{ccc}
[\Omega'] & \xrightarrow[\omega']{} & \mathfrak{A}' \\
{\scriptstyle\varphi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi'} \\
[\Omega''] & \xrightarrow[\omega'']{} & \mathfrak{A}''=\Omega''\underset{\varphi'}{\otimes}\mathfrak{A}'
\end{array}$$

sera extrait du diagramme (2) complété par l'homomorphisme ψ'.

L'équivalence axiomatique entre graduations et produits tensoriels s'exprime par la proposition suivante :

Proposition (4.3). — *Si* $\mathfrak{A}$ *est un compositeur sur l'anneau* Ω *vérifiant les axiomes* (**A1**), ..., (**A6**) *du n° 5,* $\mathfrak{A}$ *peut être défini canoniquement comme un compositeur analytique sur* Ω. *Réciproquement, si* $\mathfrak{A}$ *est un compositeur analytique sur* Ω, *on peut définir canoniquement sur chaque* $\mathfrak{A}^n$ *une structure de* Ω*-module n-gradué, de telle sorte que les axiomes* (**A1**), ..., (**A6**) *soient vérifiés.*

Cette proposition justifie la nouvelle définition suivante des analyseurs : *un* Ω*-analyseur incomplet* $\mathfrak{A}$ *est un* Ω*-compositeur analytique tel que*

$$(\mathrm{T}_{n,n}f)(0,\ldots,0)=0 \quad \text{pour tout } f\in\mathfrak{A}^n.$$

La première partie de la proposition résulte de la proposition (4.2) que nous avons démontrée sans faire intervenir l'axiome (**A7**). Quant à la seconde partie, nous nous contenterons de définir les graduations canoniques dans un compositeur analytique, en laissant au lecteur le soin d'achever les démonstrations.

Soit donc $\mathfrak{A}$ un Ω-compositeur analytique. Prenons pour Ω' l'anneau de polynomes $\Omega[X_1, \ldots, X_n]$, et pour φ l'injection canonique de Ω dans Ω'. Nous avons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} |\Omega| & \xrightarrow{\omega} & \mathfrak{A} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ [\Omega'] & \xrightarrow{\omega'} & \mathfrak{A}' = \Omega' \underset{\varphi}{\otimes} \mathfrak{A} \end{array}$$

Soit $f \in \mathfrak{A}^n$; alors

$$f' = (\mathrm{T}_{n,n}(\psi f))(X_1 \mathbf{e}'_{n,1} \quad \ldots, X_n \mathbf{e}'_{n,n}) \in \mathfrak{A}'^n.$$

L'axiome (**A'1**) signifie que f' s'écrit *univoquement* comme une somme finie

$$f' = \sum_{\alpha \in \mathrm{N}^n} X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n} \psi f_\alpha,$$

où les $f_\alpha \in \mathfrak{A}^n$ seront, *par définition*, les *composantes homogènes* de f.

Remarque. — Si Ω est un *corps infini* et si $\mathfrak{A}$ est un Ω-compositeur, on ne peut définir $\mathfrak{A}$ comme Ω-compositeur analytique que d'une seule manière au plus [*cf.* prop. (1.1)]. L'expression « le Ω-compositeur $\mathfrak{A}$ est analytique » a donc un sens. Il n'en est pas de même dans tous les cas. Si, par exemple, Ω est un corps fini, et $\mathfrak{A}$ un Ω-compositeur, il peut arriver que l'on puisse définir sur $\mathfrak{A}$ une infinité de graduations distinctes, dont chacune fait de $\mathfrak{A}$ un Ω-compositeur analytique conformément à la proposition (1.3); la donnée de la graduation, ou, ce qui revient au même, du foncteur $\underset{\varphi}{\otimes} \mathfrak{A}$, est donc indispensable ([23]).

21. Génération des analyseurs. Exemples. — Le procédé de définition le plus usuel des compositeurs et analyseurs consiste à donner une famille de *générateurs* et de *relations* entre ces générateurs (le procédé analogue est bien connu en théorie des groupes).

Si $A = (A^n)_{n \in \mathrm{N}^*}$ est une suite d'ensembles, nous définirons, à un isomorphisme canonique près, le *compositeur libre* $E = (E^n)$ *engendré par* A par les propriétés suivantes : il existe une famille i d'injections $i_n : A^n \to E^n$ $(n \in \mathrm{N}^*)$ telle que E soit engendré par $(i_n A^n)$, et que toute famille φ d'applications $\varphi_n : A^n \to F^n$ de A

([23]) *Cf.* la fin du n° 21. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire, pour définir le foncteur $\underset{\varphi}{\otimes} \mathfrak{A}$, d'introduire la *catégorie* des Ω-algèbres Ω' : il suffira de faire parcourir à Ω' l'*ensemble* des algèbres quotients d'une algèbre de polynomes $\Omega[(X_i)_{i \in \mathrm{N}}]$.

dans un compositeur $F=(F^n)$ puisse être factorisée sous la forme $\varphi=\psi i$, où ψ est un homomorphisme de E dans F. L'existence de E peut s'établir par une construction explicite.

Un *système* R *de relations* dans le compositeur libre E est constitué par une famille de relations du type $b_\iota \equiv b'_\iota$, où ι parcourt un ensemble d'indices, et où, pour chaque ι b_ι et b'_ι appartiennent au même ensemble E^n.

Si l'on forme la *relation d'équivalence* $\mathcal{R}$ la plus fine dans E qui implique les relations R et qui soit compatible avec les lois de composition $(T_{m,n})$, on peut passer au quotient et obtenir ainsi, par définition, le compositeur $E/\mathcal{R}$ engendré par les générateurs A liés par les relations R.

Si Ω est un anneau, on définira de même le Ω-compositeur F engendré par la suite d'ensembles A, et le système de relations R. Ce cas se ramène d'ailleurs au précédent, si l'on adjoint aux générateurs A les éléments $\omega(\lambda \mathbf{e}_{i,1})$, pour $\lambda \in \Omega$, et au système R les relations exprimant que l'application $\omega=[\Omega]\to F$ est un homomorphisme de compositeurs ([25]).

Il est un cas particulier important où des Ω-compositeurs qui sont définis par générateurs et relations peuvent être munis naturellement d'une structure de Ω-compositeurs analytiques, et fournissent ainsi des analyseurs [prop. (4.3)] : c'est celui où tous les générateurs sont *multilinéaires*, ainsi que toutes les relations ([25]). Dans ce cas, la notion de produit tensoriel d'applications linéaires ou multilinéaires (*cf.* Bourbaki, *Algèbre*, chap. III) permet en effet de définir canoniquement les produits tensoriels.

Exemples ([26]). — *a. Analyseur de Kurosch* ([27]), engendré par une fonction bilinéaire $f(x_1, x_2)$ sans autres relations que celle exprimant la bilinéarité.

b. Analyseur annulaire, engendré par une fonction bilinéaire, notée x_1x_2, avec la relation

$$(x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3)=0.$$

c. Analyseur classique, engendré par une fonction bilinéaire, notée x_1x_2, avec les deux relations

$$(x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3)=0 \qquad \text{et} \qquad x_1x_2 - x_2x_1=0.$$

([24]) Plus généralement, toute loi de composition externe se ramène à une famille de lois de composition internes (Bourbaki *Algèbre*, chap. I).

([25]) Le lecteur reconstituera sans peine la définition précise des générateurs (resp. relations) multilinéaires dans un Ω-compositeur : les exemples ci-dessous éclairciront cette notion. On remarquera qu'un analyseur est engendré par ses éléments multilinéaires si et seulement si toute fonction γ admet une multilinéarisée (déf. 2.5).

([26]) Les compositeurs analytiques qui suivent, définis conformément aux considérations précédentes, vérifient (**A 7**) et sont donc présentés comme des analyseurs. Nous utilisons des notations fonctionnelles simplifiées au lieu des $(T_{m,n})$.

([27]) Cf. *Mat. Sbor.*, t. 20, (62), 1947, p. 239-262.

d. Analyseur de Lie, engendré par une fonction bilinéaire, notée $[x_1, x_2]$, avec les deux relations

$$[x_1, x_1] = 0$$

et

$$[x_1, [x_2, x_3]] + [x_2, [x_3, x_1]] + [x_3, [x_1, x_2]] = 0,$$

e. Analyseur de Ritt, engendré par les deux fonctions $x_1 x_2$ et x_1', respectivement bilinéaire et linéaire avec les trois relations :

$$(x_1 x_2) x_3 - x_1 (x_2 x_3) = 0, \qquad x_1 x_2 - x_2 x_2 = 0$$

et

$$x_1' x_2 + x_1 x_2' - (x_1 x_2)' = 0.$$

Ces analyseurs sont tous définis sur un anneau de base Ω donné. Ils s'obtiennent d'ailleurs à partir des analyseurs correspondants construits sur l'anneau Z des entiers en formant les produits tensoriels par Ω (considéré comme Z-algèbre). Les exemples *b* à *e* répondent respectivevent aux espèces suivantes de Ω-*algèbres* : algèbres associatives, associatives et commutatives, de Lie, associatives et commutatives à dérivation. L'analyseur classique peut être identifié à un quotient de l'analyseur annulaire, qui lui même s'identifie à un quotient de l'analyseur de Kurosch. D'autre part, le théorème de Poincaré-Witt valable notamment pour les algèbres de Lie libres, permet d'identifier l'analyseur de Lie à un *sous-analyseur* de l'analyseur annulaire, en posant

$$[x_1, x_2] = x_1 x_2 - x_2 x_1.$$

Il existe des analyseurs qui ne peuvent pas être engendrés par des éléments multilinéaires: c'est le cas notamment pour l'*analyseur de Jacobson* $\mathfrak{J}$, défini sur un anneau de caractéristique p première (soit, par exemple, sur le corps premier F_p) comme le sous-analyseur de l'analyseur annulaire $\mathfrak{A}$ engendré par l'analyseur de Lie $\mathfrak{L}$ et l'élément $x_1'' \in \mathfrak{A}_p^1$. L'élément x_1'' n'a pas de multilinéarisé dans $\mathfrak{J}$, qui correspond à l'espèce des algèbres de Lie p-restreintes ([28]).

Nous signalerons enfin une construction due à J. Tits, qui fournit des exemples de Ω-compositeurs possédant plusieurs structures distinctes de compositeurs analytiques.

Soit E un compositeur, S un monoïde unitaire. Nous appellerons *extension de* E *par* S le compositeur $F = (E, S)$ ainsi défini : F est engendré par des éléments

$$\circ f \in F^n \quad (f \in E^n) \qquad \text{et} \qquad \downarrow s \in F^1 \quad (s \in S)$$

en correspondance avec ceux de E et de S. Les relations entre ces générateurs sont :

1° celles qui expriment que $\varphi : E \to F$ est un homomorphisme:

([28]) Cf. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 50, 1941, p. 15–25.

2° $\psi c = \mathbf{e}_{1,1}$, c désignant l'unité dans S, et

$$(\mathrm{T}_{1,1}(\psi s))(\psi t) = \psi(st) \quad \text{pour tous } s, t \in \mathrm{S};$$

3° $(\mathrm{T}_{1,n}(\psi s))(\varphi f) = (\mathrm{T}_{n,n}(\varphi f))(\psi s(\mathbf{e}_{n,1}), \ldots, \psi s(\mathbf{e}_{n,n}))$ pour tous $n \in \mathbf{N}^*$, $f \in \mathrm{E}^n$, $s \in \mathrm{S}$.

On démontre que φ et ψ sont *injectifs*. Supposons maintenant que E soit donné comme un Ω-compositeur analytique sur le *corps fini* Ω à q éléments, et prenons pour S le monoïde libre unitaire à un générateur t. Le compositeur $\mathrm{F} = (\mathrm{E}, \mathrm{S})$ est alors un Ω-compositeur, sur lequel nous pouvons introduire une infinité de graduations prolongeant celle de $\varphi\mathrm{E}$ et transformant F en un Ω-compositeur analytique : une telle graduation sera complètement déterminée si nous donnons à ψt l'un des degrés q^h ($h \in \mathbf{N}$).

CHAPITRE II.

Étude des lois de groupes dans les analyseurs rationnels.

Dans tout ce chapitre, il ne sera question que d'analyseurs complets.

5. — Les lois de groupes et leurs équivalences.

22. Lois de groupes.

Définition (5.1). — *Nous appellerons loi de groupe dans un analyseur* $\mathfrak{A}$ *une fonction* $f(x, y) \in \mathfrak{A}^2$ *vérifiant :*

a. $f(f(x, y), z) - f(x, f(y, z)) = 0$;

b. $f(x, y) \equiv x + y \pmod{\text{deg. } 2}$.

Une loi de groupe $f(x, y)$ *sera dite abélienne si* $f(x, y) = f(y, x)$.

Exemples. — $x + y$ est une loi de groupe dans tout analyseur; $x + y + xy$ est une loi de groupe dans l'analyseur annulaire (n° **21**, ex. *b*).

Proposition (5.1). — *Si* $f(x, y)$ *est une loi de groupe dans l'analyseur* $\mathfrak{A}$, $f(x, 0) = f(0, x) = x$, *et il existe une fonction* $g(x) \in \mathfrak{A}^1$ *et une seule vérifiant* $f(x, g(x)) = f(g(x), x) = 0$.

Démonstration. — Posons $h(x) = f(x, 0)$. Alors

$$h(x) \equiv x \qquad (\text{mod. deg. } 2)$$

et d'après le théorème (3.1), il existe $h'(x) \in \mathfrak{A}^1$ tel que $h(h'(x)) = x$. Si nous faisons $y = z = 0$ dans *a* [déf. (5.1)], il vient $h(h(x)) = h(x)$; il

suffit d'y substituer $h'(x)$ à x pour obtenir $f(x, 0) = h(x) = x$. On démontre de même que $f(0, x) = x$.

D'après b et le théorème (3.1), il existe $g(x)$, $g'(x) \in \mathfrak{A}^1$ telles que

$$f(g(x), x) = f(x, g'(x)) = 0.$$

Si nous appliquons a, il vient

$$\begin{aligned} g(x) &= f(g(x), 0) = f(g(x), f(x, g'(x))) \\ &= f(f(g(x), x), g'(x)) = f(0, g'(x)) = g'(x). \end{aligned}$$

La donnée d'une loi de groupe dans un analyseur $\mathfrak{A}$ permet de définir une structure de groupe sur chaque $\mathfrak{A}$-module M (*cf.* n° 15).

La démonstration de la proposition (5.1) n'est en partie qu'une traduction de démonstrations élémentaires connues de la théorie des groupes. Plus généralement toutes les *identités génériques* de la théorie des groupes se traduisent par des identités dans un analyseur, dès que l'on s'y est donné une loi de groupe. Pour simplifier les notations, il nous arrivera d'écrire xy une loi de groupe, par analogie avec la notation multiplicative des groupes. Les fonctions $g_n(x)$ correspondant aux puissances seront appelées *itérées* de la loi de groupe $f(x, y) = xy$; nous les écrirons x^n si aucune confusion n'est à craindre (ce qui entraîne la notation fâcheuse $x^0 = 0$). On a

$$(1) \qquad g_0(x) = 0, \qquad g_n(x) = f(g_{n-1}(x), x) \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{Z},$$

$$(2) \qquad f(g_n(x), g_{n'}(x)) = g_{n+n'}(x) \quad \text{pour tous } n, n' \in \mathbf{Z},$$

$$(3) \qquad g_n(g_{n'}(x)) = g_{nn'}(x) \quad \text{pour tous } n, n' \in \mathbf{Z}.$$

Si la loi est *abélienne*,

$$(4) \qquad g_n(f(x, y)) = f(g_n(x), g_n(y)) \quad \text{pour tous } n, n' \in \mathbf{Z}.$$

Soit $xy \equiv x + y + \Lambda(x, y)$ (mod. deg. 3) une loi de groupe dans l'analyseur $\mathfrak{A}$, avec $\Lambda(x, y) \in \mathfrak{A}_2^2$. Nous noterons $(x, y) = xyx^{-1}y^{-1}$ le « *commutateur* » de x et y, et $x^y = yxy^{-1}$ le « *transformé de x par l'automorphisme intérieur associé à y* ».

Proposition (5.2). — *La composante homogène de degré total 2 du commutateur (x, y) d'une loi de groupe xy est un crochet de Lie.*

Démonstration. — Soit $[x, y]$ la composante de degré total 2 de (x, y). Les relations $(x, 0) = (0, x) = (x, x) = 0$ montrent que $[x, y]$ est bilinéaire et vérifie $[x, x] = 0$. D'ailleurs, avec les notations précédentes, on vérifie que $[x, y] = \Lambda(x, y) - \Lambda(y, x)$. Quant à l'identité de Jacobi (*cf.* n° 21, ex. *d*), elle résulte de l'identité de P. Hall

$$(5) \qquad ((x, y), z^y)((y, z), x^z)((z, x), y^x) = 0.$$

En effet, un calcul simple montre que le premier membre de (5) est congru (mod. deg. 4) à $|[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y]|$, qui est donc nul.

23. Le groupe adjoint d'un analyseur. — Soit $\mathfrak{A}$ un analyseur. Nous munissons $\mathfrak{A}^1$ de sa structure de monoïde définie par la composition : si $\varphi(x)$, $\psi(x) \in \mathfrak{A}^1$, nous poserons $(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x))$: la fonction identique x est élément neutre pour cette opération.

Definition (5.2). — *L'ensemble des fonctions $\varphi(x) \in \mathfrak{A}^1$ inversibles, c'est-à-dire telles qu'existe $\varphi^{-1}(x)$ vérifiant*

$$(\varphi \circ \varphi^{-1})(x) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)(x) = x,$$

constitue un groupe dit groupe adjoint de $\mathfrak{A}$ et noté $\mathrm{G}(\mathfrak{A})$. L'ensemble des fonctions $f(x) \in \mathfrak{A}^1$ linéaires et inversibles constitue un sous-groupe de $\mathrm{G}(\mathfrak{A})$, dit groupe linéaire de $\mathfrak{A}$ et noté $\mathrm{GL}(\mathfrak{A})$. L'ensemble des fonctions $\varphi(x) \in \mathfrak{A}^1$ vérifiant $\varphi(x) \equiv x \,[\text{mod. deg. } (i-1)]$ sera noté $\mathrm{G}_i(\mathfrak{A})$ pour tout $i \in \mathbf{N}^*$.

Proposition (5.3). — *Chaque $\mathrm{G}_i(\mathfrak{A})$, $i \in \mathbf{N}^*$, est un sous-groupe invariant de $\mathrm{G}(\mathfrak{A})$. Pour que $\varphi(x) \in \mathrm{G}(\mathfrak{A})$, il faut et il suffit que $\varphi(x) \in \mathfrak{A}^1$ et que $\varphi(x) \equiv t(x) \,(\text{mod. deg. } 2)$, où $t(x) \in \mathrm{GL}(\mathfrak{A})$; avec ces notations, l'application $\varphi(x) \to t(x)$ est un épimorphisme de $\mathrm{G}(\mathfrak{A})$ sur $\mathrm{GL}(\mathfrak{A})$ dont le noyau est $\mathrm{G}_1(\mathfrak{A})$.*

Démonstration. — D'après la proposition (3.2), $\mathrm{G}_i(\mathfrak{A})$ est un sous-monoïde de $\mathfrak{A}^1$ pour tout $i \in \mathbf{N}^*$. Si $\varphi(x) \in \mathrm{G}_i(\mathfrak{A})$, il existe, d'après le théorème (3.1), $\varphi'(x) \in \mathfrak{A}^1$ tel que

$$(\varphi \circ \varphi')(x) = x \qquad \text{et} \qquad x = (\varphi \circ \varphi')(x) \equiv \varphi'(x) \qquad [\text{mod. deg. } (i+1)],$$

d'après la proposition (3.2), d'où $\varphi'(x) \in \mathrm{G}_i(\mathfrak{A})$. Il existe de même $\varphi''(x) \in \mathrm{G}_i(\mathfrak{A})$ tel que $(\varphi' \circ \varphi'')(x) = x$. Il en résulte, d'après un raisonnement classique [*cf.* prop. (5.1)], que $\varphi = \varphi''$: donc $\mathrm{G}_i(\mathfrak{A})$ est un sous-groupe de $\mathrm{G}(\mathfrak{A})$. Si

$$\varphi(x) \in \mathrm{G}_i(\mathfrak{A}), \qquad \psi(x) \in \mathrm{G}(\mathfrak{A}),$$

on a

$$(\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1})(x) \equiv (\psi \circ \psi^{-1})(x) = x \qquad [\text{mod. deg. } (i+1)],$$

donc $\mathrm{G}_i(\mathfrak{A})$ est invariant dans $\mathrm{G}(\mathfrak{A})$.

Soient $\varphi(x)$, $\varphi'(x) \in \mathrm{G}(\mathfrak{A})$, $\varphi(x) \equiv t(x)$, $\varphi'(x) \equiv t'(x) \,(\text{mod. deg. } 2)$, $t(x)$, $t'(x) \in \mathfrak{A}^1$. Alors

$$(\varphi \circ \varphi')(x) \equiv (t \circ t')(x) \qquad (\text{mod. deg. } 2) ;$$

donc, l'application $\varphi \to t$ est un homomorphisme de $\mathrm{G}(\mathfrak{A})$ dans $\mathrm{GL}(\mathfrak{A})$ dont le noyau est $\mathrm{G}_1(\mathfrak{A})$. Si $\varphi(x) \in \mathfrak{A}^1$, $\varphi(x) \equiv t(x) \,(\text{mod. deg. } 2)$ et $t(x) \in \mathrm{GL}(\mathfrak{A})$, alors

$$(t^{-1} \circ \varphi)(x) \in \mathrm{G}_1(\mathfrak{A}) \subset \mathrm{G}(\mathfrak{A}), \qquad \text{donc} \qquad \varphi \in \mathrm{G}(\mathfrak{A}).$$

Proposition (5.4). — *Pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, le groupe quotient $\mathrm{G}_i(\mathfrak{A})\,\mathrm{G}_{i+1}(\mathfrak{A})$ s'identifie au groupe additif $\mathfrak{A}^1_{i+1}$, en associant à la classe de $\varphi(x) \in \mathrm{G}_i(\mathfrak{A})$ la*

fonction $a_{i-1}(x)$ définie par

$$\varphi(x) \equiv x + a_{i-1}(x) \qquad [\text{mod. deg. } (i+2).$$

Si

$$\varphi(x) \equiv x + a_{i-1}(x) \quad [\text{mod. deg. } (i+2)]$$

et

$$\psi(x) \equiv x + b_{j-1}(x) \quad [\text{mod. deg. } (j+2)].$$

avec $i, j \in \mathbf{N}^*$, $a_{i-1} \in \mathfrak{A}_{i-1}^1$, $b_{j-i} \in \mathfrak{A}_{j-1}^1$, le commutateur

$$(\varphi, \psi) = \varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$$

vérifie

$$(\varphi, \psi)(x) \equiv x + c_{i+j-1}(x) \qquad [\text{mod. deg. } (i+j+2)],$$

où

$$(1) \qquad c_{i+j-1}(x) = \mathfrak{D}_{x \to 1/(x+1)(x+1) b_{j-1}(x)} a_{i-1}(x) - \mathfrak{D}_{x \to 1/(x+1)(x+1) a_{i-1}(x)} b_{j-1}(x).$$

Démonstration. — Posons

$$\varphi(x) = x + \sum_{n \geq i+1} a_n(x) \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = x + \sum_{n \geq j+1} b_n(x),$$

avec $a_n, b_n \in \mathfrak{A}_n^1$. Alors

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \psi(x) + \sum_{n \geq i-1} a_n(\psi(x)).$$

La proposition (3.1) donne, pour $n \geq i+2$,

$$a_n(\psi(x)) \equiv a_n(x) \qquad [\text{mod. deg. } (i+j+2)].$$

D'autre part, la formule de Taylor (n° 11) conduit à

$$a_{i-1}(\psi(x)) = a_{i-1}(x) - \mathfrak{D}_{x \to 1/(x+1)(x+1) b_{j-1}(x)} a_{i-1}(x) \qquad [\text{mod. deg. } (i+j-2)].$$

Nous obtenons donc

$$(2) \qquad (\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(x) - \psi(x) = x - \mathfrak{D}_{x \to 1/(x+1)(x+1) b_{j-1}(x)} a_{i-1}(x) \qquad [\text{mod. deg. } (i+j+2)];$$

et, de même,

$$(3) \qquad (\psi \circ \varphi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) - x + \mathfrak{D}_{x \to 1/(x+1)(x+1) a_{i-1}(x)} b_{j-1}(x) \qquad [\text{mod. deg. } (i+j-2)].$$

Si nous posons $\chi(x) = x + c_{i+j-1}(x)$, avec les notations de (1), nous obtenons d'après (2) et (3)

$$(4) \qquad (\chi \circ \psi \circ \varphi)(x) = (\varphi \circ \psi)(x) \qquad [\text{mod. deg. } (i+j-2)],$$

d'où

$$(\varphi, \psi)(x) \equiv \chi(x) \qquad [\text{mod. deg. } (i+j-2)].$$

Remarques. — La proposition (5.1) signifie que $G_1(\mathfrak{A}))$ est une *N-suite* dans $G_1(\mathfrak{A})$ (*cf.* [6], chap. I.). L'anneau de Lie gradué associé à $G_1(\mathfrak{A}))$ s'identifie

à $\sum_{i\in\mathbf{N}^*} \mathfrak{A}^i_{i+1}$, avec le crochet de Lie donné par (1) pour les éléments homogènes. D'autre part, la topologie définie dans $G(\mathfrak{A})$ par la suite $(G_i(\mathfrak{A}))$ coïncide avec la topologie induite par la topologie canonique de $\mathfrak{A}^1$ (n° 13); $G(\mathfrak{A})$ est ainsi un groupe séparé et complet. La proposition (5.3) montre que $G(\mathfrak{A})$ est le produit semi-direct du N-groupe $G_1(\mathfrak{A})$ et du sous-groupe $GL(\mathfrak{A})$, ce dernier n'étant pas invariant, en général.

24. Équivalence des lois de groupes.

Définition (5.3). — *Soient $\mathfrak{A}$ un analyseur, $\varphi(x)\in G(\mathfrak{A})$, $f(x_1, \ldots, x_n)\in\mathfrak{A}^n$. Nous appellerons transmutée de f par φ, la fonction $\varphi(f(\varphi^{-1}(x_1), \ldots, \varphi^{-1}(x_n)))$, que nous noterons $f^\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.*

Cette définition est compatible avec la notation φ^ψ des automophismes intérieurs dans $G(\mathfrak{A})$.

Proposition (5.5). — *a. La transmutation des fonctions de $\mathfrak{A}$ par une fonction donnée $\varphi(x)\in G(\mathfrak{A})$ est un automorphisme de $\mathfrak{A}$ considéré comme compositeur (cf. n° 20): si $f\in\mathfrak{A}^m$, $g_1, \ldots, g_m\in\mathfrak{A}^n$, et $h=f(g_1, \ldots, g_m)$, alors $h^\varphi=f^\varphi(g_1^\varphi, \ldots, g_m^\varphi)$.*

b. Le groupe $G(\mathfrak{A})$ opère à gauche sur $\mathfrak{A}$: $((f)^\varphi)^\psi=f^{\psi\circ\varphi}$ pour $\varphi, \psi\in G(\mathfrak{A})$, $f\in\mathfrak{A}^n$, $n\in\mathbf{N}^*$.

c. Si $f(x, y)\in\mathfrak{A}^2$ est une loi de groupe, et $\varphi\in G(\mathfrak{A})$, $f^\varphi(x, y)$ est une loi de groupe.

La démonstration est immédiate.

Définition (5.4). — *Nous dirons que deux lois de groupes $f, g\in\mathfrak{A}^2$ sont équivalentes (resp. équivalentes au sens restreint) s'il existe $\varphi(x)\in G(\mathfrak{A})$ [resp. $\varphi(x)\in G_1(\mathfrak{A})$] tel que $f^\varphi=g$. Le groupe des $\varphi(x)\in G(\mathfrak{A})$ [resp. $\varphi(x)\in G_1(\mathfrak{A})$] tels que $f^\varphi=f$ sera dit le stabilisateur (resp. le stabilisateur restreint) de la loi de groupe f.*

Les classes de lois équivalentes sont donc les *classes de transitivité* de $G(\mathfrak{A})$ opérant sur l'ensemble des lois de groupes. Deux lois de groupes équivalentes dans l'analyseur $\mathfrak{A}$ définissent des structures de groupes *isomorphes* sur tout $\mathfrak{A}$-module. Une transmutation peut s'interpréter comme un « *changement de coordonnées* », et les éléments du stabilisateur comme des « *automorphismes analytiques* ».

6. — La formule du binome; lois canoniques dans les analyseurs rationnels.

25. Formule du binome. — Si l'on considère dans l'analyseur classique (n° 21, ex. *c*) la loi de groupe $f(x, y)=x+y+xy$, son $n^{\text{ième}}$ itéré $g_n(x)$

(n° 22) s'écrit

$$g_n(x) = \sum_{1 \leq i < \infty} \binom{n}{i} x^i \qquad (n \in \mathbf{Z});$$

c'est la « formule du binome » bien connue, que nous allons généraliser.

PROPOSITION (6.1). — *Soient $\mathfrak{A}$ un analyseur, et $f(x, y) \in \mathfrak{A}^2$ vérifiant $f(x, 0) = f(0, x) = x$. Définissons par récurrence les fonctions $g_n(x)$ $(n \in \mathbf{N})$ en posant*

$$g_0(x) = 0, \qquad g_{n+1}(x) = f(x, g_n(x)).$$

Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$g_n(x) = \sum_{1 \leq j \leq i < \infty} \binom{n}{i} c_{i,j}(x),$$

où $c_{i,j}(x) \in \mathfrak{A}_i^1$ quels que soient i et j $(1 \leq j \leq i < \infty)$.

Démonstration. — Désignons par $b_{i,n}(x)$ la composante homogène de degré i de $g_n(x)$. Ainsi

$$g_n(x) = \sum_{1 \leq i < \infty} b_{i,n}(x). \tag{1}$$

Les relations $f(x, 0) = f(0, x) = x$ impliquent

$$f(x, y) \equiv x + y \pmod{\text{deg. } 2}$$

et, par une récurrence évidente, $b_{1,n}(x) = nx$. Nous poserons donc $c_{1,1}(x) = x$. Supposons déjà construites les fonctions $c_{i,j}(x)$, avec $1 \leq j \leq i < q$, telles que $c_{i,j}(x) \in \mathfrak{A}_i^1$ et que

$$g_n(x) = \sum_{1 \leq j \leq i < q} \binom{n}{j} c_{i,j}(x) + \sum_{q \leq i < \infty} b_{i,n}(x). \tag{2}$$

Nous pouvons supposer $q \geq 2$. Calculons $b_{q,n+1}(x)$. C'est [prop. (3.2)] la composante homogène de degré q de

$$f\left(x, b_{q,n}(x) + \sum_{1 \leq j \leq i < q} \binom{n}{j} c_{i,j}(x)\right).$$

D'après la formule de Taylor (n° 11),

$$b_{q,n+1}(x) = \sum_{\alpha, \beta, \beta_{i,j}} \mathfrak{D}^{\alpha+\sum\beta_{i,j}} f(x, y) \cdot b_{q,n}(x)^{\alpha} \prod_{1 \leq j \leq i < q} \binom{n}{j}^{\beta_{i,j}} c_{i,j}(x)^{\beta_{i,j}}, \tag{3}$$

où la sommation s'étend à toutes les familles d'entiers ≥ 0 $(\alpha, \beta, (\beta_{i,j}))$ vérifiant

$$\alpha + q\beta + \sum_{1 \leq j \leq i < q} i\beta_{i,j} = q.$$

Considérons les termes où $\alpha = 0$. D'après la relation $f(0, x) = x$, il suffit de considérer les termes pour lesquels

$$\beta + \sum_{1 \leq j \leq i < q} \beta_{i,j} = 1.$$

La seule famille d'entiers possible est

$$\beta = 1, \qquad \beta_{i,j} = 0 \qquad (1 \leq j \leq i < q)$$

qui conduit au terme $b_{q,n}(x)$. Dans tous les autres termes, $\alpha > 0$ implique $\beta = 0$. Nous obtenons donc, compte tenu des relations d'homogénéité,

$$(4) \qquad b_{q,n+1}(x) - b_{q,n}(x) = \sum_{\alpha, \beta_{i,j}} \prod_{1 \leq j \leq i < q} \binom{n}{j}^{\beta_{i,j}} \mathfrak{D}^{\substack{x \to |\alpha| \\ y \to \sum_{1 \leq j \leq i < q} |\beta_{i,j}| c_{i,j} x}} f(x, y),$$

où la sommation s'étend aux systèmes d'entiers ≥ 0 $(\alpha, (\beta_{i,j}))$ vérifiant

$$\alpha + \sum_{1 \leq j \leq i < q} i \beta_{i,j} = q \qquad \text{et} \qquad \alpha > 0.$$

Pour un tel système,

$$\sum_{1 \leq j \leq i < q} j \beta_{i,j} \leq \sum_{1 \leq j \leq i < q} i \beta_{i,j} = q - \alpha < q;$$

on peut négliger la famille $\alpha = q$, $\beta_{i,j} = 0$ puisque $q \geq 2$ et $f(x, 0) = x$. Chaque produit $\prod_{1 \leq j \leq i < q} \binom{n}{j}^{\beta_{i,j}}$ est ainsi un polynome en n, à valeurs entières pour n entier, nul pour $n = 0$, et de degré strictement inférieur à q. Il peut donc s'écrire comme une combinaison linéaire à coefficients entiers des polynomes $\binom{n}{j}$ $(1 \leq j < q)$, et même comme une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs, d'après la relation

$$(5) \qquad \binom{n}{i}\binom{n}{j} = \sum_{\sup i,j \leq k \leq i-j} \frac{k!}{(k-i)!\,(k-j)!\,(i-j-k)!} \binom{n}{k} \qquad (i, j \in \mathbf{N}).$$

Écrivons chaque terme du second membre de (4) comme une combinaison linéaire des $\binom{n}{j}$ multipliés par des fonctions de x de degré q; nous obtenons, après regroupement,

$$(6) \qquad b_{q,n+1}(x) - b_{q,n}(x) = \sum_{1 \leq j < q} \binom{n}{j} c_{q,j-1}(x),$$

où les fonctions $c_{q,j-1}(x) \in \mathfrak{A}_q^1$ pourraient être explicitées à partir de (4) et (5).

La relation

$$\binom{n+1}{j+1} - \binom{n}{j+1} = \binom{n}{j},$$

jointe à (6), montre que la fonction

$$b_{q,n}(x) = \sum_{2 \leq j \leq q} \binom{n}{j} c_{q,j}(x)$$

est indépendante de n. Comme elle est nulle pour $n = 0$, elle est nulle pour toute valeur de n, et la construction de $c_{i,j}(x)$ à été effectuée pour le degré $i = q$ ($c_{i,1}(x) = 0$ pour $i > 1$, car $g_1(x) = x$), ce qui achève la démonstration par récurrence.

Remarques. — *a.* Le calcul des $c_{i,j}(x)$ a été exposé sans faire intervenir aucune propriété particulière de l'analyseur $\mathfrak{A}$. On pourrait donc (théoriquement !) donner pour le calcul de chaque $c_{i,j}(x)$ à partir de $f(x, y)$ une *formule générique* qui ne ferait intervenir que l'addition des fonctions (et non leur soustraction) la composition des fonctions homogènes et les opérateurs de Sanov.

b. La relation de récurrence utilisée pour définir les $g_n(x)$ ($n \in \mathbf{N}$) permet aussi bien de les définir pour $n \in \mathbf{Z}$; il suffit d'utiliser le théorème (3.1). La proposition et sa démonstration restent valables sans modification pour $n \in \mathbf{Z}$.

Corollaire. — *Avec les hypothèses de la proposition précédente, si $\mathfrak{A}$ est un analyseur sur un anneau Ω de caractéristique p (premier), on a*

$$g_p(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. deg. } p).$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que $\binom{p}{j} \equiv 0 \pmod{p}$ pour $1 \leq j < p$.

Proposition (6.2). — *Soient $f(x, y)$ une loi de groupe dans un analyseur $\mathfrak{A}$ sur un anneau Ω de caractéristique p (premier), et $g_n(x)$ son $n^{\text{ième}}$ itéré ($n \in \mathbf{Z}$). Alors, $g_{p^h}(x) \equiv 0$ (mod. deg. p^h) pour tout $h \in \mathbf{N}$, et l'homomorphisme $n \to g_n(x)$ du monoïde multiplicatif $\mathbf{Z}$ muni de sa topologie p-adique dans le monoïde $\mathfrak{A}^1$ muni de sa topologie canonique est une application continue. Cela permet de définir, par continuité, les itérés p-adiques $g_\nu(x)$ ($\nu =$ entier p-adique) de la loi $f(x, y)$.*

Démonstration. — On applique le corollaire de la proposition (6.1) et les identités (2) et (3) du n° 22; *cf.* [7].

26. Analyseurs rationnels.

Définition (6.1). — *Pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, nous noterons $\mathbf{Q}_r$ l'anneau des nombres rationnels qui, écrits comme fractions irréductibles, n'admettent au dénominateur que des facteurs premiers $\leq r$.*

Ainsi, $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}_2$ est l'anneau des rationnels de la forme $m/2^n (m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N})$, ... Si $(n+1)$ n'est pas un nombre premier, $\mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}_{n+1}$.

Un $\mathbf{Q}_r$-module A possède, en tant que groupe abélien, la propriété suivante :

pour tout $x \in A$, il existe un élément $y \in A$ et un seul tel que $r!\, y = x$. Réciproquement, tout groupe abélien possédant cette propriété peut être muni d'une structure de Q_r-module et d'une seule.

Définition (6.2). — *Un analyseur $\mathfrak{A}$ sur un anneau Ω est dit rationnel si, pour tous n, $r \in \mathbb{N}^*$ le groupe additif $\mathfrak{A}_r^n$ (module des fonctions de n arguments de degré total r) est un Q_r-module.*

Exemples. — *a.* Si Ω est un corps de *caractéristique* o, tout analyseur sur Ω est rationnel.

b. Si Ω est un corps de *caractéristique* $p \neq o$, un analyseur $\mathfrak{A}$ sur Ω est rationnel si et seulement s'il est *nilpotent de classe* $< p$ [déf. (3.4)], c'est-à-dire si $\mathfrak{A}_r^n = o$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \geq p$.

c. A chacun des types d'analyseurs définis au n° 21 (ex. *a* à *e*) correspond un analyseur rationnel, avec Z comme anneau de base. Prenons, par exemple, l'analyseur annulaire $\mathfrak{A}$ sur l'anneau Z. L'*analyseur annulaire rationnel* $\mathfrak{B}$ sera défini en prenant $\mathfrak{B}_r^n = Q_r \otimes_Z \mathfrak{A}_r^n$ pour tous n, $r \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit, on multiplie par les scalaires de Q_r les fonctions de degré total r. Comme, d'autre part, les groupes $\mathfrak{A}^n$ sont sans torsion (ce sont même des groupes abéliens libres), on peut identifier $\mathfrak{B}$ à un sous-analyseur (sur Z) de l'analyseur $Q \otimes_Z \mathfrak{A}$ sur le corps des rationnels, ce qui simplifie la vérification des axiomes. On définira ainsi l'analyseur de Lie rationnel, etc. Le théorème de Poincaré-Witt montre encore que l'*analyseur de Lie rationnel s'identifie à un sous-analyseur de l'analyseur annulaire rationnel.*

Sauf mention expresse du contraire, un analyseur rationnel sera toujours considéré sur l'anneau de base Z.

27. Lois canoniques.

Lemmes (6.1). — *Supposons donnée, dans un analyseur rationnel $\mathfrak{A}$ une famille de fonctions $d_{i,j}(x) \in \mathfrak{A}_i^1$, pour $i\, j \in \mathbb{N}^*$, $j \leq i$.*

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g_n(x) = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} n^j d_{i,j}(x),$$

$$\varphi(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} d_{i,1}(x), \qquad \psi(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} d_{i,i}(x).$$

Alors, si

(1) $\qquad g_n(g_m(x)) = g_{mn}(x)$ *pour tous* $m, n \in \mathbb{N}$ et $g_1(x) = x$,

on a

$$\varphi(\psi(x)) = \psi(\varphi(x)) = x; \qquad \varphi(g_n(x)) = n\varphi(x);$$
$$g_n(\psi(x)) = \psi(n.x) \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. — Posons, pour $\rho, \sigma, \tau \in \mathbf{N}$,

$$e_{\rho,\sigma,\tau}(x) = \sum_{i,(\alpha^i_{k,l})} \mathfrak{D}^{x \succ \sum_{k,l} |\alpha^i_{k,l}| d_{k,l}(x)} d_{i,\rho}(x), \tag{2}$$

où la sommation s'étend à toutes les valeurs entières de i et, pour i donné, à toutes les familles $(\alpha^i_{k,l})$ d'entiers ≥ 0 vérifiant

$$\begin{cases} 1 \leq \rho \leq i, \qquad 1 \leq l < k < \infty, \qquad \sum_{k,l} \alpha^i_{k,l} = i, \\ \sum_{k,l} l \alpha^i_{k,l} = \sigma, \qquad \sum_{k,l} k \alpha^i_{k,l} = \tau. \end{cases} \tag{3}$$

On a $e_{\rho,\sigma,\tau}(x) \in \mathfrak{A}^1_\tau$. Si $e_{\rho,\sigma,\tau} \not\equiv 0$, $1 \leq \rho \leq \sigma \leq \tau$.

Si nous calculons

$$g_n(g_m(x)) = \sum_{1 \leq j \leq i < \infty} n^j d^i_{i,j} \left(\sum_{1 \leq l < k < \infty} m^l d_{k,l}(x) \right)$$

d'après la formule de Taylor (n° 11), et en utilisant les relations d'homogénéité, nous obtenons

$$g_n(g_m(x)) \sum_{1 \leq \rho \leq \sigma \leq \tau < \infty} n^\rho m^\sigma e_{\rho,\sigma,\tau}(x). \tag{4}$$

Le calcul de $e_{\rho,\sigma,\tau}$ se simplifie si $\rho = \sigma$. Dans (3), la relation $\rho \leq i \leq \sigma$ montre qu'il faut alors prendre $i = \rho$; de plus, $i = \sigma$ implique $\alpha^i_{k,l} = 0$ pour $l \geq 2$. Nous obtenons donc

$$e_{\rho,\rho,\tau}(x) = \sum_{(\alpha_k)} \mathfrak{D}^{x \succ \sum_k |\alpha_k| d_{k,1}(x)} d_{\rho,\rho}(x), \tag{5}$$

où la sommation s'étend à toutes les suites (α_k) d'entiers ≥ 0 vérifiant

$$\sum_{1 \leq k < \infty} \alpha_k = \rho, \qquad \sum_{1 \leq k < \infty} k \alpha_k = \tau. \tag{6}$$

La formule de Taylor appliquée à

$$\psi(nm\varphi(x)) = \sum_{1 \leq i < \infty} d_{i,1} \left(nm \sum_{1 \leq j < \infty} d_{j,1}(x) \right)$$

conduit donc à

$$\psi(nm\varphi(x)) = \sum_{1 \leq \rho \leq \tau < \infty} n^\rho m^\sigma e_{\rho,\rho,\tau}(x) \quad \text{pour } m, n \in \mathbf{N}. \tag{7}$$

Utilisons, *pour la première fois*, l'hypothèse (1). Nous obtenons, d'après (4),

$$\sum_{1 \leq \rho \leq \sigma \leq \tau < \infty} n^\rho m^\sigma e_{\rho,\sigma,\tau}(x) = \sum_{1 \leq j \leq i < \infty}{}' n^j m^j d_{i,j}(x),$$

pour tous $m, n \in \mathbf{N}$, ou, en égalant les composantes de même degré τ en x,

$$(8) \qquad \sum_{1 \leq \rho \leq \sigma \leq \tau} n^{\rho} m^{\sigma} e_{\rho,\sigma,\tau}(x) = \sum_{1 \leq j \leq \tau} n^{j} m^{j} d_{\tau,j}(x)$$

pour tous $\tau \in \mathbf{N}^*$, $m, n \in \mathbf{N}$. Puisque $\mathfrak{A}$ est un *analyseur rationnel*, (8) équivaut [*cf.* la démonstration de la proposition (1.2)] à

$$(9) \qquad e_{\rho,\sigma,\tau}(x) = 0, \quad \text{pour } \rho < \sigma \qquad e_{\rho,\rho,\tau}(x) = d_{\tau,\rho}(x) \quad \text{pour } 1 \leq \rho \leq \tau < \infty.$$

D'après (9), la relation (7) s'écrit, en y faisant $m = 1$,

$$(10) \qquad \psi(n\varphi(x)) = g_n(x).$$

Pour $n = 1$, nous avons

$$\psi(\varphi(x)) = g_1(x) = x.$$

Comme $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv d_{1,1}(x) = x \pmod{\text{deg. } 2}$,

$$\varphi, \psi \in \mathrm{G}_1(\mathfrak{A}) \qquad \text{et} \qquad \varphi \circ \psi(x) = \psi \circ \varphi(x) = x.$$

Substituant les deux membres de (10) dans $\varphi(x)$, il vient $n\varphi(x) = \varphi(g_n(x))$; substituant $\psi(x)$ à x dans les deux membres de (10), il vient $\psi(nx) = g_n(\psi(x))$.

Remarques. — *a.* Le lemme (6.1) généralise la construction des fonctions exponentielle et logarithme classiques à partir des relations

$$\exp x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \qquad \log(1+x) = \lim_{n \to 0} \frac{1}{n}\left((1+x)^n - 1\right).$$

Les formules définissant $\psi(x)$ et $\varphi(x)$ doivent être considérées comme des « spécialisations » remplaçant les passages à la limite.

b. Il résulte de notre démonstration que toutes les formules rencontrées où apparaissent des entiers $m, n \in \mathbf{N}$ restent valables si l'on remplace m, n par des entiers de signes quelconques, ou encore par des éléments de l'anneau de base Ω de l'analyseur rationnel $\mathfrak{A}$.

c. Nous aurions pu démontrer tout comme (7) et (7)' [*c'est-à-dire sans utiliser l'hypothèse* (1) *ni le fait que* $\mathfrak{A}$ *est rationnel*] les relations suivantes :

$$g_m(\psi(x)) = \sum_{1 \leq \rho \leq \sigma \leq \infty} m^{\sigma} e_{\rho,\sigma,\sigma}(x),$$

$$\varphi(g_m(x)) = \sum_{1 \leq \sigma \leq \tau \leq \infty} m^{\sigma} e_{1,\sigma,\tau}(x),$$

$$\varphi(\psi(x)) = \sum_{1 \leq \sigma \leq \infty} e_{\sigma,\sigma}(x).$$

Si nous utilisons maintenant (9), les relations précédentes démontrent l'énoncé complet du lemme, sans faire intervenir aucune propriété de $\mathrm{G}(\mathfrak{A})$ [de $\varphi, \psi \in \mathrm{G}_1(\mathfrak{A})$, $\psi \circ \varphi(x) = x$, nous avions conclu $\varphi \circ \psi(x) = x$].

d. Posons, pour tout $j \in \mathbf{N}^*$,

$$f_j(x) = \sum_{j \leq i < \omega} d_{i,j}(x);$$

en particulier, $f_1 = \varphi$. On peut démontrer, comme précédemment, que

$$f_j(g_m(x)) = \sum_{j \leq \sigma \leq \tau < \omega} m^\sigma e_{j,\sigma,\tau}(x),$$

$$f_j(\psi(x)) = \sum_{1 \leq \sigma < \omega} e_{j,\sigma,\sigma}(x).$$

D'après (9), ces relations conduisent à

$$f_j(g_m(x)) = m^j f_j(x),$$
$$f_j(x) = d_{j,j}(\varphi(x)).$$

Définition (6.3). — *Une loi de groupe $f(x, y)$ dans un analyseur rationnel $\mathfrak{A}$ est dite canonique si ses itérés $g_n(x)$ sont donnés par $g_n(x) = nx (n \in \mathbf{N})$.*

Remarque. — Il est indifférent de remplacer l'hypothèse « $n \in \mathbf{N}$ » par « $n \in \mathbf{Z}$ » dans cette définition.

Théorème (6.1). — *Dans un analyseur rationnel $\mathfrak{A}$ toute loi de groupe $f(x, y)$ est équivalente, au sens restreint, à une loi canonique et une seule.*

Démonstration. — Soit $g_n(x)$ le $n^{\text{ième}}$ itéré de $f(x, y)$. Nous pouvons appliquer la proposition (6.1), et écrire

$$g_n(x) = \sum_{1 \leq j \leq i < \omega} \binom{n}{j} c_{i,j}(x) \qquad [n \in \mathbf{N};\ c_{i,j}(x) \in \mathfrak{A}_i^1].$$

Le coefficient $\binom{n}{j}$ est un polynome en n dont les coefficients appartiennent à Q_j, donc à Q_i si $j \leq i$. Ordonnons le polynome $\binom{n}{j}$ suivant les puissances de n, puis regroupons les termes dans le développement de $g_n(x)$, nous obtenons

$$g_n(x) = \sum_{1 \leq j \leq i < \omega} n^j d_{i,j}(x) \qquad [n \in \mathbf{N};\ d_{i,j}(x) \in \mathfrak{A}_i^1].$$

Toutes les hypothèses du lemme (6.1), dont nous conservons les notations, sont vérifiées. Posons $f'(x, y) = f^\varphi(x, y)$. Il résulte de la proposition (5.5) que le $n^{\text{ième}}$ itéré $g'_n(x)$ de $f'(x, y)$ est $g_n^\varphi(x)$, et le lemme (6.1) montre que $g_n^\varphi(x) = nx$. La loi f', équivalente au sens restreint à f [puisque $\varphi(x) \in G_1(\mathfrak{A})$] est donc canonique.

Soit $\varphi'(x) \in G_1(\mathfrak{A})$ tel que $f'' = f^{\varphi'}$ soit également une loi canonique. Posons

$$\chi(x) = \varphi' \circ \varphi^{-1}(x).$$

Alors $f''=f'\chi$; appliquons cette relation aux itérés, il vient $\chi(n\chi^{-1}(x))=nx$ pour $n\in\mathbf{N}$, ou $\chi(nx)=n\chi(x)$. Cela implique, du fait que $\mathfrak{A}$ est rationnel [*cf.* démonstration de la proposition (1.2)], que $\chi(x)\in\mathfrak{A}_1^1$. Comme $\chi(x)\in G_1(\mathfrak{A})$, $\chi(x)=x$ et $f''=f'$.

Remarques. — *a.* Nous avons formalisé le « passage aux coordonnées canoniques de première espèce » dans un groupe de Lie. La proposition (6.1) remplace l'étude des sous-groupes à un paramètre; le lemme (6.1) remplace les passages à la limite.

b. Le théorème (6.1) montre bien la différence entre l'équivalence et l'équivalence restreinte des lois de groupes [déf. (5.4)]. Dans un analyseur rationnel $\mathfrak{A}$, le groupe $\mathrm{GL}(\mathfrak{A})$ opère sur l'ensemble des lois canoniques. L'exemple des groupes de Lie montre qu'il n'y a lieu d'étudier que l'équivalence restreinte dans les analyseurs rationnels généraux.

7. — La loi de Hausdorff.

28. Automorphismes intérieurs définis par une loi canonique. — Soit, dans un analyseur rationnel $\mathfrak{A}$, une loi de groupe canonique $f(x, y)$. Nous écrirons $f(x, y)=xy$, et nous utiliserons les notations multiplicatives indiquées au n° 22 : les itérés de xy seront notés x^n et l'hypothèse que la loi est canonique se traduit par $x^n=nx$, Le « transformé de y par l'automorphisme intérieur associé à x » est la fonction $xyx^{-1}=h(x, y)$. L'identité $xy^nx^{-1}=(xyx^{-1})^n$ se traduit par $h(x, ny)=nh(x, y)$, pour $n\in\mathbf{Z}$, ce qui implique, puisque $\mathfrak{A}$ est rationnel, que $h(x, y)$, soit *linéaire par rapport à* y.

Proposition (7.1). — *Soit, dans l'analyseur rationnel* $\mathfrak{A}$, *une loi de groupe canonique* xy. *Posons*

$$xy\equiv x+y+\frac{1}{2}[x, y] \qquad (\text{mod. deg. } 3),$$

avec $[x, y]\in\mathfrak{A}_2^2$. *Alors* $[x, y]$ *est un crochet de Lie, et*

$$h(x, y)=xyx^{-1}=\sum_{n\in\mathbf{N}}\frac{1}{n!}(a\,dx)^n y,$$

où

$$(ad x)^0 y=y, \qquad (ad x)^{n+1}y=[x, (ad x)^n y] \quad \textit{pour } n\in\mathbf{N}.$$

Démonstration. — Si l'on calcule la composante homogène de degré total 2 du commutateur $(x, y)=xyx^{-1}y^{-1}$ défini par la loi canonique xy, on obtient $[x, y]$, ce qui prouve [prop. (5.2)] que cette fonction est un crochet de Lie. La dernière partie de la proposition va résulter des identités

$$x(x^n y x^{-n})x^{-1}=x^{n+1}yx^{-(n+1)}$$

qui se traduisent par

$$h(x, h(nx, y)) = h((n+1)x, y) \qquad (n \in \mathbf{Z}). \tag{1}$$

Désignons par L le module des fonctions $f(x, y) \in \mathfrak{A}^2$ qui sont linéaires par rapport à y, par $L' \subset L$ le sous-module des $f(x, y)$ vérifiant $f(0, y) = 0$, et par $L'' \subset L$ l'ensemble des $f(x, y)$ vérifiant $f(0, y) = y$. Nous définissons sur L une structure d'anneau associatif en posant, pour k, $k' \in L$,

$$(k \bigstar k')(x, y) = k(x, k'(x, y)).$$

La puissance $n^{\text{ième}}$ de $k(x, y) \in L$ par rapport à la « multiplication $\bigstar$ » sera notée $k(x, y)^{\bigstar n}$; en particulier, $k(x, y)^{\bigstar 0} = y$ est l'unité de l'anneau L.

Nous poserons

$$\begin{cases} \text{pour } k(x, y) \in L', \quad \exp k(x, y) = \displaystyle\sum_{0 \leq n < \infty} \frac{1}{n!} k(x, y)^{\bigstar n}; \\ \text{pour } k(x, y) \in L'', \quad \log k(x, y) = \displaystyle\sum_{1 \leq n < \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (k(x, y) - y)^{\bigstar n}. \end{cases} \tag{2}$$

Ces formules ont un sens, car $\mathfrak{A}$ est un analyseur rationnel. Les deux applications $\exp : L' \to L''$ et $\log : L'' \to L'$ sont inverses l'une de l'autre. De plus,

$$\text{pour } k(x, y) \in L'' \quad \text{et} \quad n \in \mathbf{N}, \quad \log(k(x, y)^{\bigstar n}) = n \log k(x, y). \tag{3}$$

Si $h(x, y)$ désigne comme précédemment xyx^{-1}, $h(x, y) \in L''$ et la relation (1) se traduit par

$$h(x, y)^{\bigstar n} = h(nx, y) \qquad \text{pour} \quad n \in \mathbf{N}. \tag{4}$$

Nous en déduisons que, en posant $k(x, y) = \log h(x, y)$, $h(x, y) = \exp k(x, y)$ et

$$n\, k(x, y) = k(nx, y). \tag{5}$$

Comme $\mathfrak{A}$ est rationnel, (5) signifie que $k(x, y) \in L'$ est bilinéaire; $k(x, y)$ est donc la composante de degré total 2 de $h(x, y)$, qu'un calcul facile montre égale à $[x, y]$. Il suffit de revenir aux notations usuelles des algèbres de Lie pour obtenir la proposition (7.1).

29. La loi canonique universelle.

Proposition (7.2). — *Soient $\mathfrak{A}$ un analyseur rationnel,*

$$xy \equiv x + y + \frac{1}{2}[x, y] \qquad (\text{mod. deg. } 3)$$

une loi de groupe canonique dans $\mathfrak{A}$ avec $[x, y] \in \mathfrak{A}_2^2$. Désignons par $\mathfrak{B}$ le sous-analyseur rationnel de $\mathfrak{A}$ engendré par le crochet de Lie $[x, y]$. Alors :

a. $xy \in \mathfrak{B}$;

b. si $f(x, y)$ est une loi de groupe canonique dans $\mathfrak{X}$ vérifiant

$$f(x, y) \equiv xy \pmod{\text{deg. } 3}, \qquad f(x, y) = xy.$$

Démonstration. — La proposition (7.1) montre que $xyx^{-1} \in \mathfrak{G}$. Pour $f \in \mathfrak{X}^n$ et $q \in \mathbf{N}^*$, nous écrirons $f \in \mathfrak{G}$ (mod. deg. q) pour indiquer qu'il existe $f' \in \mathfrak{G}$ avec $f \equiv f'$ (mod. deg. q).

Soit $x + y + \sum_{2 \leq i < s} a_i(x, y)$ la décomposition de xy en composantes homogènes (pour le degré total). Supposons déjà démontré que $xy \in \mathfrak{G}$ (mod. deg. q), $q \geq 2$. Nous allons en déduire que $xy \in \mathfrak{G}$ [mod. deg. $(q+1)$], autrement dit que $a_q(x, y) \in \mathfrak{G}$.

Il résulte de la proposition (7.1) que, si $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{G}$ [mod. deg. $(q+1)$]; on a $yfy^{-1} \in \mathfrak{G}$ [mod. deg. $(q+1)$]. D'autre part, si $f, g \in \mathfrak{G}$ [mod. deg. $(q+1)$], l'hypothèse de récurrence conduit à $fg - a_q(f, g) \in \mathfrak{G}$ [mod. deg. $(q+1)$], et les relations

$$a_q(x, 0) = a_q(0, x) = a_q(x, -x) = 0,$$

jointes à la proposition (3.1), montrent que $fg \in \mathfrak{G}$ [mod. deg. $(q+1)$] si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :

$$f \equiv 0, \qquad g \equiv 0, \qquad f + g \equiv 0, \qquad \text{(mod. deg. 2)}$$

(le produit fg est calculé au sens de la loi de groupe xy).

Si nous appliquons ces remarques, nous obtenons successivement :

(1) $$y^k x y^{-k} \in \mathfrak{G} \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

(2) $$y^k x y^{-k} x^{-1} \in \mathfrak{G} \quad [\text{mod. deg. } (q+1)], \qquad \text{car } y^k x y^{-k} + x^{-1} \equiv 0 \quad \text{(mod. deg. 2)},$$

(3) $$u_k(x, y) = x^k (y^k x y^{-k} x^{-1}) x^{-k} \in \mathfrak{G} \qquad [\text{mod. deg. } (q+1)].$$

Comme $u_k(x, y) \equiv 0$ (mod. deg. 2), nous obtenons, par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$,

(4) $$v_n(x, y) = u_1(x, y)\, u_2(x, y) \ldots u_{n-1}(x, y) \in \mathfrak{G} \qquad [\text{mod. deg. } (q+1)].$$

D'autre part,

$$x^n y^n = (nx)\,(xy) = n(x + y) + \sum_{2 \leq i < s} n^i a_i(x, y),$$

donc

(5) $$x^n y^n - n^q a_q(x, y) \in \mathfrak{G} \qquad [\text{mod. deg. } (q+1)].$$

Comme $v_n(x, y) \equiv 0$ (mod. deg. 2),

(6) $$v_n(x, y)\,(x^n y^n - n^q a_q(x, y)) \in \mathfrak{G} \qquad [\text{mod. deg. } (q+1)].$$

D'après la proposition (3.1), appliquée à $xy - (x + y)$,

(7) $$v_n(x, y)\,(x^n y^n - n^q a_q(x, y)) \equiv v_n(x, y)\, x^n y^n - n^q a_q(x, y) \qquad [\text{mod. deg. } (q+1)].$$

Or, d'après une identité générique de la théorie des groupes, facile à vérifier,

$c_n(x, y)\, x^n y^n = (xy)^n$. D'autre part.

$$(8) \qquad (xy)^n - n a_q(x, y) \in \mathfrak{B} \qquad [\text{mod. deg. } (q+1)].$$

Les relations (6), (7) et (8) nous donnent

$$(9) \qquad (n^q - n)\, a_q(x, y) \in \mathfrak{B} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

ce qui implique $a_q(x, y) \in \mathfrak{B}$ puisque $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont des analyseurs rationnels. Remarquons que la démonstration nous a donné un *procédé de calcul explicite*, par récurrence, des fonctions $a_q(x, y)$ à partir du crochet de Lie $[x, y]$. Ce procédé est sans intérêt pratique, mais il établit la dernière partie de la proposition (7.2).

Désignons maintenant par $\mathfrak{A}$ l'*analyseur annulaire rationnel* (n° 26, ex. *c*), et par $f(x, y)$ la loi de groupe $x + y + xy$ dans $\mathfrak{A}$. Désormais, xy désigne le « produit » qui engendre $\mathfrak{A}$ (et qui n'est pas une loi de groupe); nous sommes obligés de renoncer à la notation multiplicative des lois de groupe précédemment utilisée. La loi $f(x, y)$ est équivalente au sens restreint à une loi canonique $f'(x, y)$ et une seule, d'après le théorème (6.1). Si nous retournons aux démonstrations du paragraphe 6, nous voyons que $f'(x, y)$ est donné par

$$(10) \qquad \exp f'(x, y) = (\exp x)\,(\exp y),$$

où la fonction $\exp x$ est définie par la série classique :

$$(11) \qquad \exp x = \sum_{0 \leq n < \infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Le crochet de Lie attaché à $f'(x, y)$ par la proposition (7.1) n'est autre que $[x, y] = xy - yx$. Or nous savons (n° 26) que le sous-analyseur rationnel de $\mathfrak{A}$ engendré par $xy - yx$ coïncide avec l'*analyseur de Lie rationnel*. Cela nous permet de poser la définition suivante (*cf.* [4], [6]) :

Définition (7.1). — *Dans l'analyseur de Lie rationnel* $\mathfrak{L}$, *on appelle loi de Hausdorff la loi de groupe* $\Phi(x, y)$ *vérifiant*

$$\Phi(x, y) \equiv x + y + \frac{1}{2}[x, y] \qquad (\text{mod. deg. } 3).$$

Nous venons d'établir l'*existence* d'une telle loi. Son *unicité* résulte de la proposition (7.2), *b*, si nous montrons qu'une loi de groupe dans $\mathfrak{L}$ est nécessairement canonique. Or toute loi de groupe est équivalente au sens restreint à une loi canonique, et $G_1(\mathfrak{L})$ se réduit à l'élément neutre x (conséquence de $[x, x] = 0$).

Les relations (10) et (11) conduisent au calcul explicite de $\Phi(x, y)$. On trouve

$$(12) \qquad \Phi(x, y) \equiv x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}[[x, y], y] + \frac{1}{12}[[y, x], x] + \frac{1}{24}[[[y, x], x], y] \qquad (\text{mod. deg. } 5).$$

Si l'on a, dans un analyseur rationnel quelconque $\mathfrak{A}$, un crochet de Lie $a(x, y)$, il existe un homomorphisme et un seul φ de l'analyseur de Lie rationnel $\mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{A}$ qui fait correspondre $a(x, y) \in \mathfrak{A}$ à $[x, y] \in \mathfrak{L}$. Nous pouvons donc donner un nouvel énoncé de la proposition (7.2) :

Théorème (7.1). — *Dans un analyseur rationnel $\mathfrak{A}$, une loi de groupe canonique $f(x, y)$ est entièrement déterminée par la donnée de sa composante homogène de degré total 2, $a(x, y)$. La fonction $a(x, y)$ est associée à une loi canonique si et seulement si c'est un crochet de Lie. La loi canonique $f(x, y)$ est obtenue comme l'image $\varphi\Phi(x, y)$ de la loi de Hausdorff $\Phi(x, y)$ par l'homomorphisme φ de l'analyseur de Lie rationnel $\mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{A}$ défini par $\varphi[x, y] = a(x, y)$.*

Les théorèmes (6.1) et (7.1) montrent que, dans les analyseurs rationnels, l'étude des lois de groupes se ramène à celle des crochets de Lie. La classification des lois de groupes équivaut à celle des crochets de Lie par rapport aux opérations du groupe $\mathrm{GL}(\mathfrak{A})$.

30. Application aux groupes de Lie.

Définition (7.2). — *Soient $\mathfrak{A}$ l'analyseur classique sur l'anneau de base $\mathbf{Z}$, et Ω un anneau. Une loi de groupe de Lie formel à q paramètres ($q \in \mathbf{N}^*$) et à coefficients dans Ω est une loi de groupe dans l'analyseur $\Pi^q(\Omega \otimes_{\mathbf{Z}} \mathfrak{A})$, puissance cartésienne $q^{\text{ième}}$ de l'analyseur classique sur l'anneau Ω.*

Tout système de coordonnées analytiques au voisinage de l'élément neutre d'un groupe de Lie (réel ou complexe) définit une loi de groupe de Lie formel (à coefficients dans le corps R des nombres réels ou le corps C des nombres complexes), si l'élément neutre est pris comme origine.

Une loi de groupe de Lie formel à coefficients réels ou complexes est dite *convergente* si les séries de puissances correspondantes convergent au voisinage de l'origine.

La *majoration de la loi de Hausdorff*, due à Dynkin [3], montre que toute loi canonique dans $\Pi^q(\mathbf{R} \otimes \mathfrak{A})$ ou $\Pi^q(\mathbf{C} \otimes \mathfrak{A})$ est convergente, donc définit un germe de groupe de Lie.

Pour retrouver entièrement les « théorèmes fondamentaux de Lie », il faut encore montrer que, si l'on part d'une loi convergente, la transmutation (« changement de variables ») ramenant aux coordonnées canoniques [th. (6.1)] est donnée par des séries convergentes. Or, si l'on note xy la loi de groupe, la fonction $\psi(x)$ du lemme (6.1) s'obtient sous la forme : $\lim_{n \to \infty} (x^n)^n$, et la démonstration de la convergence est élémentaire.

CHAPITRE III.

La cohomologie des analyseurs.

8. — Les modules de cohomologie d'un analyseur.

31. Les analyseurs considérés comme complexes. — Nous avons considéré jusqu'à présent des analyseurs complets ou incomplets. Autrement dit, nous avons étudié la notion d'analyseur de deux points de vue différents. Dans ce chapitre, nous adopterons un troisième point de vue, et nous considérerons les analyseurs comme des complexes.

Définition (8.1). — *Soit* $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^n)_{n\in\mathbf{N}}$ *un analyseur incomplet* [*déf.* (2.1)]. *Le complexe* (29) $\mathfrak{A}^\star$ *associé à cet analyseur est défini, en tant que module gradué, comme la somme directe* $\mathfrak{A}^\star = \sum_{n\in\mathbf{N}^\star} \mathfrak{A}^n$. *La différentielle* $\hat{\partial}$ *de* $\mathfrak{A}^\star$ *est définie en posant, pour* $f(x_1, \ldots, x_n)\in\mathfrak{A}^n\subset\mathfrak{A}^\star$,

$$(1)\quad (\hat{\partial}f)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = f(x_2, \ldots, x_{n+1}) + \sum_{1\leq i\leq n} (-1)^i f(x_1, \ldots, x_i + x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(x_1, \ldots, x_n)\in\mathfrak{A}^{n+1}\subset\mathfrak{A}^\star.$$

L'introduction de la somme directe des modules $\mathfrak{A}^n$ montre qu'il est essentiel de ne pas identifier des fonctions qui diffèrent seulement par des arguments neutres (par exemple $\mathbf{e}_{n,i}$ et $\mathbf{e}_{n+1,i}$, tous deux remplacés par le symbole x_i dans nos notations « fonctionnelles »).

Pour montrer que la définition (8.1) est correcte, il faut vérifier la relation $\hat{\partial}^2 = 0$, ce qui peut se faire par un calcul direct (*cf.* aussi le n° 32).

Dans tout ce chapitre, nous entendrons par « analyseur » le complexe associé à un analyseur incomplet, suivant la définition (8.1). Nous supprimerons donc le signe * qui distingue $\mathfrak{A}$ de son complexe associé $\mathfrak{A}^\star$. Les éléments de $\mathfrak{A}^n$ seront appelés éventuellement n-cochaînes; l'entier n sera dit le « degré-arguments » (ou « nombre d'arguments ») de $f\in\mathfrak{A}^n$.

Par ailleurs, chaque $\mathfrak{A}^n$ est un module n-gradué. Si nous introduisons dans $\mathfrak{A}^n$ la graduation simple par rapport au degré total, $\mathfrak{A}$ apparaît comme un module bigradué

$$(2)\quad \mathfrak{A} = \sum_{n,r\in\mathbf{N}^\star} \mathfrak{A}^n_r.$$

L'inspection de la formule (1) définissant $\hat{\partial}$ montre aussitôt que $\hat{\partial}$ est homogène de degré 0 par rapport au degré total, c'est-à-dire que, pour tous $n, r\in\mathbf{N}^\star$,

$$(3)\quad \hat{\partial}\mathfrak{A}^n_r\subset\mathfrak{A}^{n+1}_r.$$

Remarque. — Grâce à la complétion (resp. restriction), nous pouvions passer d'un analyseur incomplet (resp. complet) à l'analyseur complet (resp. incomplet) associé. Il n'en est plus de même si nous considérons les analyseurs comme des complexes : nous ne pouvons pas reconstruire les opérations $(T_{m,n})$ de l'analyseur à partir du complexe associé. En fait, nous n'utiliserons dans ce chapitre qu'une partie des propriétés des analyseurs : il nous suffira de savoir calculer les fonctions composées de la forme $(T_{m,n}f)(g_1, \ldots, g_m)$, où $f \in \mathfrak{A}^m$ et où les g_i sont des sommes d'éléments distingués $\mathbf{e}_{n,j}$. Il est facile de modifier le système des axiomes (**A**) de la définition (2.1) pour ne plus conserver que les opérations $(T_{m,n})$ ainsi restreintes; tous les résultats établis dans ce chapitre restent valables avec cette axiomatique plus faible. Mais comme les applications de la cohomologie (chap. IV) font à nouveau intervenir toutes les propriétés des analyseurs, nous n'avons pas jugé utile de développer indépendamment l'axiomatique des « *complexes multigradués* ».

32. Propriétés élémentaires des modules de cohomologie; le principe de comparaison. — Puisque nous avons sur l'analyseur $\mathfrak{A}$ un endomorphisme $\hat{o}$ de carré nul, nous pouvons appliquer les définitions usuelles de l'algèbre homologique.

Nous appellerons *cocycles* (resp. *cobords*) les éléments (cochaînes) du *noyau* (resp. de l'*image*) de $\hat{o}$. Le module de cohomologie $H(\mathfrak{A})$ de l'analyseur $\mathfrak{A}$ est le module quotient du module des cocycles par celui des cobords. Comme $\mathfrak{A}$ est bigradué, et $\hat{o}$ homogène, $H(\mathfrak{A})$ est bigradué. Plus précisément :

Définition (8.2). — *Soit $\mathfrak{A}$ un analyseur. Nous noterons $H_r^n(\mathfrak{A})$ le module de cohomologie* $(\mathrm{Noy}\,\hat{o} : \mathfrak{A}_r^n \to \mathfrak{A}_r^{n-1})/(\mathrm{Im}\,\hat{o} : \mathfrak{A}_r^{n-1} \to \mathfrak{A}_r^n)$.

Du seul fait que nous écrivons les éléments de l'analyseur $\mathfrak{A}$ comme des « fonctions », une analogie s'impose entre la cohomologie des analyseurs et la cohomologie des groupes ou monoïdes, calculée à partir de leurs complexes non homogènes. En effet, *la formule* (1) *de la définition* (8.1) *coïncide « formellement » avec la formule du cobord, pour un groupe abélien noté additivement qui opère trivialement sur un module* ([30]). Cette analogie constitue ce que nous appellerons le « *principe de comparaison* ». Quantité de démonstrations, parfois compliquées, concernant la cohomologie des analyseurs, seront facilitées par le recours à ce principe, auquel il faudra donner une expression précise dans chaque cas particulier.

Par exemple, si l'on trouve plus simple de vérifier la relation $\hat{o}^2 = 0$ pour le complexe homogène, on pourra transposer exactement aux analyseurs la démonstration d'Eilenberg-Mac Lane ([31]) qui ramène le cas du complexe non homogène à celui du complexe homogène.

([29]) *Cf.* [2], chap. IV.

([30]) *Cf.* Eilenberg-Mac Lane, *Ann. Math.*, t. 48, 1947, p. 51-78.

([31]) *Loc. cit.*

Soit M un $\mathfrak{A}$-module [(*cf.* déf. (2.3), dont nous reprenons les notations]. Nous pouvons calculer les groupes de cohomologie $H^n(M, M)$ du groupe additif de M opérant trivialement sur lui-même. Nous avons des homomorphismes canoniques : $H^n(\mathfrak{A}) \to H^n(M, M)$, ainsi définis : si ξ est un élément de $H^n(\mathfrak{A})$ défini par le n-cocycle f, nous lui associons l'élément $H^n(M, M)$ défini par le n-cocycle $(\tau_n f)$.

La proposition suivante provient de ce que le « principe de comparaison » fait toujours intervenir des groupes abéliens qui opèrent trivialement sur des modules.

Proposition (8.1). — *Soit $\mathfrak{A}$ un analyseur. Définissons un automorphisme involutif de $\mathfrak{A}$ en posant, pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $f \in \mathfrak{A}^n$,*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} f(x_n, \ldots, x_1).$$

Alors $\hat{\partial} f = \overline{\partial f}$, et l'application considérée définit, par restriction et passage au quotient, un automorphisme involutif de $H(\mathfrak{A})$.

Pour certains calculs, il sera commode d'utiliser une autre expression de la différentielle $\hat{\partial}$, facile à vérifier :

Proposition (8.2). — *Soit $\mathfrak{A}$ un analyseur. Pour $f \in \mathfrak{A}^n$, on a*

$$(\hat{\partial} f)(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^i (\partial_i f)(x_1, \ldots, x_{n+1}), \tag{1}$$

où

$$\begin{aligned}(\partial_i f)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = {} & f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + x_{i-1}, x_{i+2}, \ldots, x_{n+1}) \\ & - f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_{n+1}) \\ & - f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i-1}, \ldots, x_{n-1}).\end{aligned} \tag{2}$$

Définition (8.3). — *Nous dirons qu'une fonction $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{A}^n$ est pseudo-linéaire par rapport à x_i si $(\partial_i f)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$. Nous dirons que f est pseudo-n-linéaire si elle est pseudo-linéaire par rapport à chacun de ses arguments.*

En particulier, les fonctions linéaires sont pseudo-linéaires [prop. (2.7)]. D'après la proposition (8.2), toute fonction pseudo-n-linéaire est un n-cocycle. Comme il n'y a pas 1-cobords non nuls, nous avons la :

Proposition (8.3). — *Soit $\mathfrak{A}$ un analyseur. Le module $H^1_r(\mathfrak{A})$ coïncide avec le module des fonctions pseudo-linéaires d'un argument, de degré r.*

Si l'on a un homomorphisme φ d'un analyseur $\mathfrak{A}$ dans un analyseur $\mathfrak{A}'$, on en déduit, par le procédé bien connu, un homomorphisme de $H(\mathfrak{A})$ dans $H(\mathfrak{A}')$.

Si $\mathfrak{A}$ est un analyseur sur l'anneau Ω, et φ un homomorphisme de Ω dans l'anneau Ω', la définition du produit tensoriel d'un analyseur incomplet par un anneau (n° 19) montre que la différentielle $\hat{\partial}$ sur le complexe $\Omega' \otimes_\Omega \mathfrak{A}$ est

donnée par la définition usuelle. On pourra donc appliquer les relations de Künneth [2].

9. — Le complexe normalisé. Les modules H_r^n pour $r \leq n$.

33. Le complexe normalisé. — On sait que, pour calculer le cohomologie d'un groupe opérant sur un module, on peut remplacer le complexe non homogène des cochaînes par le *sous-complexe normalisé*, constitué par les cochaînes qui s'annulent si l'un quelconque de leurs arguments devient égal à l'élément neutre ([32]).

La définition des cochaînes normalisées s'étend immédiatement au cas d'un analyseur $\mathfrak{A}$: $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{A}^n$ sera dite normalisée si

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i-1}, \ldots, x_n) = 0 \qquad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Les cochaînes normalisées constituent évidemment un sous-module de $\mathfrak{A}$; une vérification simple montre qu'elles constituent un *sous-complexe*, que nous noterons $\tilde{\mathfrak{A}}$ (avec $\tilde{\mathfrak{A}}_r^n = \mathfrak{A}_r^n \cap \tilde{\mathfrak{A}}$, $\tilde{\mathfrak{A}}^n = \mathfrak{A}^n \cap \tilde{\mathfrak{A}}$).

Nous pouvons donc définir les modules de cohomologie $H_r^n(\tilde{\mathfrak{A}})$, et nous avons les homomorphismes canoniques : $H_r^n(\tilde{\mathfrak{A}}) \to H_r^n(\mathfrak{A})$, pour tous n, $r \in \mathbf{N}^*$.

Proposition (9.1). — *Tous les homomorphismes canoniques* $H_r^n(\tilde{\mathfrak{A}}) \to H_r^n(\mathfrak{A})$ *sont des isomorphismes.*

Démonstration. — On peut appliquer le « principe de comparaison » et transposer la démonstration d'Eilenberg-Mac Lane ([33]). De cette manière on définit un endomorphisme Ω-linéaire k de $\mathfrak{A}$, homogène de degré (-1) par rapport au degré-arguments, de degré 0 par rapport au degré total, tel que $(1 + k\partial + \partial k)\mathfrak{A} \subset \tilde{\mathfrak{A}}$, $k\tilde{\mathfrak{A}} = 0$. La proposition (9.1) résulte ainsi de la construction explicite d'une homotopie.

Voici une autre démonstration, qui abrège certaines récurrences ([34]). Définissons l'endomorphisme Ω-linéaire k de $\mathfrak{A}$, homogène de degré (-1) par rapport au degré-arguments, en posant

$$(1) \qquad \begin{cases} k\mathfrak{A}^1 = 0. \\ (kf)(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (-1)^{n-1} f\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\sum_{1 \leq i \leq n-1} x_i\right) \quad \text{pour } f \in \mathfrak{A}^n,\ n \geq 2. \end{cases}$$

([32]) Eilenberg-Mac Lane, *loc. cit.*

([33]) *Loc. cit.*

([34]) Elle s'étend au cas général du complexe non homogène d'un groupe.

Posons, pour $f \in \mathfrak{A}$, $hf = f + k\partial f + \partial k f$. Un calcul simple montre que

$$(2)\quad \begin{cases} (hf)(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^n \left(f\left(x_2, \ldots, x_n, -\sum_{1 \leq i \leq n} x_i\right) \right. \\ \qquad\qquad \left. - f\left(x_2, \ldots, x_n, -\sum_{2 \leq i \leq n} x_i\right)\right) \quad \text{pour} \quad n \geq 2, \\ (hf)(x_1) = f(0) - f(x_1) \quad \text{pour} \quad n = 1. \end{cases}$$

Nous déduisons de ces formules que pour tout $f \in \mathfrak{A}^n$, $(hf)(0, x_2, \ldots, x_n) = 0$, et que, si f s'annule quand on y remplace l'un quelconque de ses j premiers arguments par 0, hf vérifie la même condition, où j est remplacé par $(j+1)$ (pour $1 \leq j < n$). Ainsi, pour tout $f \in \mathfrak{A}^n$, $h^n f \in \tilde{\mathfrak{A}}^n$. D'autre part, h^n est de la forme $1 + k_n\partial + \partial k_n$, où k_n se calcule par récurrence

$$k_1 = k, \qquad k_n = k + k_{n-1} - k_{n-1}\partial k + \partial k_{n-1} k.$$

Comme $\partial\tilde{\mathfrak{A}} \subset \tilde{\mathfrak{A}}$ et $k\tilde{\mathfrak{A}} \subset \tilde{\mathfrak{A}}$, nous avons $k_n\tilde{\mathfrak{A}} \subset \tilde{\mathfrak{A}}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Il en résulte que $\mathrm{H}(\mathfrak{A}, \tilde{\mathfrak{A}}) = 0$, d'où la proposition (9.1) ([33]).

Théorème (9.1). — *Pour tout analyseur* $\mathfrak{A}$, $\mathrm{H}_r^n(\mathfrak{A}) = 0$ *si* $r < n$.

C'est une conséquence immédiate de la proposition (9.1). En effet, $f \in \tilde{\mathfrak{A}}_r^n$ si et seulement si chaque composante homogène non nulle de f est de degré au moins égal à 1 par rapport à chacun de ses n arguments. Donc, si $r < n$, $f = 0$. Dans ce cas,

$$\tilde{\mathfrak{A}}_r^n = 0, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H}_r^n(\mathfrak{A}) = \mathrm{H}_r^n(\tilde{\mathfrak{A}}) = 0.$$

34. Les modules H_n^n. — Étudions maintenant les modules $\mathrm{H}_n^n(\mathfrak{A}) = \mathrm{H}_n^n(\tilde{\mathfrak{A}})$. Le module $\tilde{\mathfrak{A}}_n^n$ est constitué par les fonctions n-linéaires [déf. (2.7)]: comme $\partial\tilde{\mathfrak{A}}_n^n \subset \tilde{\mathfrak{A}}_n^{n-1} = 0$, tout élément de $\tilde{\mathfrak{A}}_n^n$ est un cocycle. Il nous reste à étudier les cobords.

Soit $g(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \tilde{\mathfrak{A}}_n^{n-1}$. Chaque composante homogène non nulle de g est de degré ≥ 1 par rapport à chacun des $(n-1)$ arguments, et de degré total n. Nous pouvons donc écrire

$$(1)\quad g(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{1 \leq i \leq n-1} g_i(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

où chaque g_i est linéaire en x_j pour $j \neq i$, et de degré 2 en x_i.

D'après la proposition (8.2),

$$(2)\quad (\partial g)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq n-1} (-1)^i (\partial_i g_i)(x_1, \ldots, x_n).$$

([33]) L'inconvénient de cette méthode (itération d'une même homotopie) par rapport à celle d'Eilenberg-Mac Lane (composition d'homotopies différentes) est que les cochaînes de $\tilde{\mathfrak{A}}$ ne restent pas invariantes.

Conformément aux définitions du n° 9, nous ferons opérer sur $\mathfrak{A}_r^n$ et sur $\tilde{\mathfrak{A}}_r^n$ le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Nous désignerons par $Z(\mathfrak{S}_n)$ l'algèbre de groupe à coefficients entiers de $\mathfrak{S}_n$; les modules $\mathfrak{A}_r^n$ et $\tilde{\mathfrak{A}}_r^n$ deviennent ainsi des $Z(\mathfrak{S}_n)$-modules. Nous noterons $\tau_i \in \mathfrak{S}_n$ la transposition $(i, (i+1))$, pour $1 \leq i \leq n-1$, et $\mathbf{a} \in Z(\mathfrak{S}_n)$ l'opérateur d'antisymétrisation

$$\mathbf{a} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma \sigma. \tag{3}$$

L'idéal à gauche de $Z(\mathfrak{S}_n)$ engendré par $(1 - \tau_i)$ contient $\mathbf{a}$: il existe donc des éléments $\mathbf{b}_i \in Z(\mathfrak{S}_n)$ tels que $\mathbf{a} = \mathbf{b}_i(1 - \tau_i)$, pour $1 \leq i \leq n-1$. Il est clair que, pour tout $g \in \mathfrak{A}^{n-1}$, $(1 - \tau_i)(\partial_i g) = 0$. Par conséquent, (2) implique $\mathbf{a}\,\delta g = 0$: dans $\tilde{\mathfrak{A}}_n^n$, l'antisymétrisé de tout cobord est nul.

Si $f(x_1, \ldots, x_n) \in \tilde{\mathfrak{A}}_n^n$, $(1 + \tau_i) f$ est un cobord, pour $1 \leq i \leq n-1$. Plus précisément, $(1 + \tau_i) f = \delta g$, où

$$g(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (-1)^i f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_i, x_{i-1}, \ldots, x_{n-1}).$$

L'élément $(n! - \mathbf{a}) \in Z(\mathfrak{S}_n)$ appartient à l'idéal à droite de $Z(\mathfrak{S}_n)$ engendré par les $(1 + \tau_i)$; autrement dit, il existe des éléments $\mathbf{c}_i \in Z(\mathfrak{S}_n)$ tels que

$$(n! - \mathbf{a}) = \sum_{1 \leq i \leq n-1} (1 + \tau_i)\, \mathbf{c}_i. \tag{4}$$

Par conséquent, pour tout $f \in \tilde{\mathfrak{A}}_n^n$, $(n! - \mathbf{a}) f$ est un cobord.

THÉORÈME (9.2). — *Soit $\mathfrak{A}$ un analyseur. Dans $\tilde{\mathfrak{A}}_n^n$, l'antisymétrisé de tout cobord est nul* : $\mathbf{a}\,\delta\tilde{\mathfrak{A}}_n^{n-1} = 0$. *Pour tout n-cocycle $f \in \tilde{\mathfrak{A}}_n^n$, $(n! - \mathbf{a}) f$ est un cobord. Si φ_n désigne l'homomorphisme canonique dans $H_n^n(\mathfrak{A})$ du module des fonctions n-linéaires antisymétriques, le noyau et le conoyau de φ_n sont des groupes de torsion où l'ordre de chaque élément divise $n!$.*

Démonstration. — L'homomorphisme φ_n est celui qui fait correspondre à la fonction n-linéaire antisymétrique f sa classe de cohomologie f^*. Si $f^* = 0$, $\mathbf{a} f^* = 0$ d'après la première partie du théorème, déjà établie; or $\mathbf{a} f = n!\, f$, ce qui démontre la propriété énoncée du noyau de φ_n. Soit $g \in \tilde{\mathfrak{A}}_n^n$: comme $(n! - \mathbf{a}) g$ est un cobord, la classe de cohomologie définie par $n!\, g$ est représentée par le cocycle antisymétrique $\mathbf{a} g$, ce qui démontre la propriété énoncée du conoyau de φ_n.

COROLLAIRE. — *Si $\tilde{\mathfrak{A}}_n^n$ est un Q_n-module* [déf. (6.1)], $H_n^n(\mathfrak{A})$ *s'identifie au sous-module de $\tilde{\mathfrak{A}}_n^n$ constitué par les fonctions n-linéaires antisymétriques.*

10. — Les modules H_r^n pour $r > n$.

35. Les modules H_r^n pour $n = 1, 2$.

PROPOSITION (10.1). — *Pour tout analyseur* $\mathfrak{A}$, *le module* $H_r^1(\mathfrak{A})$ *est nul si* r *n'est pas une puissance entière d'un nombre premier. Si* p *est un nombre premier et* $h \in \mathbf{N}^*$, $H_{p^h}^1(\mathfrak{A})$ *est un groupe où tout élément non nul est d'ordre* p.

Démonstration. — Nous appliquerons la proposition (8.3). La fonction $f \in \mathfrak{A}_r^1$ est pseudo-linéaire si et seulement si

$$(1) \qquad \mathfrak{D}_{x \to |s|x+|r-s|y} f(x) = 0 \qquad \text{pour} \quad 0 < s < r.$$

Si nous faisons $y = x$ dans les relations (1), il vient, d'après (**A6**),

$$(2) \qquad \binom{r}{s} f(x) = 0, \qquad \text{pour} \quad 0 < s < r.$$

Or on sait que le plus grand commun diviseur des coefficients binomiaux $\binom{r}{s}$ pour $0 < s < r$ est égal à 1 si r n'est pas puissance d'un nombre premier et à p si $r = p^h$, p premier. Les relations (2) équivalent donc respectivement à $f = 0$ et à $pf = 0$.

C. Q. F. D.

Remarque. — Le même procédé s'étend à l'étude des fonctions pseudo-n-linéaires homogènes. Si $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{A}_\alpha^n$ est pseudo-n-linéaire, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, f est n-linéaire, ou bien tous les α_i sont des puissances entières d'un même nombre premier p. Dans ce dernier cas, $pf = 0$.

Une étude directe analogue à celle faite pour $H_r^1(\mathfrak{A})$ montrerait que $H_r^2(\mathfrak{A})$ est toujours un *groupe de torsion si* $r > 2$. Dans le cas où $\mathfrak{A}$ est *sans torsion*, on peut démontrer le résultat plus précis suivant : $H_r^2(\mathfrak{A}) = 0$ si $r > 2$ n'est pas puissance d'un nombre premier; si $r = p^h > 2$, p premier, $h \in \mathbf{N}^*$, $H_r^2(\mathfrak{A})$ est un groupe de torsion dont tous les éléments non nuls sont d'ordre p.

L'étude « directe » des modules H_r^n (pour $r > n$ et n « grands ») se heurte à des difficultés de calcul considérables. Nous démontrerons par une méthode plus puissante un théorème général.

36. Le théorème de torsion; filtration du complexe $\tilde{\mathfrak{A}}_r$.

THÉORÈME (10.1). — *Soit* $\mathfrak{A}$ *un analyseur. Le groupe additif* $H_r^n(\mathfrak{A})$ *est un groupe de torsion si* $r > n$, *et ses* p*-composantes sont nulles pour tout nombre* p *premier strictement supérieur à* r.

Démonstration. — Remarquons d'abord que l'énoncé du théorème ne fait pas intervenir l'anneau de base Ω. Par restriction de cet anneau de base (n° 19), nous pouvons donc admettre que $\mathfrak{A}$ est un analyseur sur l'anneau Z des entiers rationnels.

Pour tout groupe abélien A, les propositions : « A *est un groupe de torsion*

dont les p-composantes sont nulles pour $p > r$ » et « $A \otimes_{\mathbf{Z}} Q_r = 0$ » sont équivalentes ([36]).

Pour tout groupe abélien à différentielle A, $H(A) \otimes_{\mathbf{Z}} Q_r$ *s'identifie à* $H(A \otimes_{\mathbf{Z}} Q_r)$.

Ces deux propositions se démontrent très simplement si l'on admet que la formation du produit tensoriel et le passage à l'homologie commutent avec le passage à la limite inductive ([37]). Il suffit, en effet, de considérer Q_r comme la limite inductive de la suite des groupes abéliens, $Z_{(i)}$ $(i \in \mathbf{N}^*)$, tous identifiés à Z, l'homomorphisme $f_{j,i} : Z_i \to Z_{ij}$ (pour $i \leq j$), s'identifiant à la multiplication par $(r!)^{j-i}$.

Ces remarques nous conduisent à donner du théorème (10.1) la nouvelle formulation suivante :

THÉORÈME (10.1 *bis*). *Si* $\mathfrak{A}$ *est un analyseur sur l'anneau de base* Q_r, $H_r^n(\mathfrak{A}) = 0$ *pour tout* $n \neq r$.

Le théorème (10.1), joint au théorème (9.1), implique (10.1 *bis*). Réciproquement, (10.1 *bis*) implique (10.1), car si $\mathfrak{A}$ est un analyseur quelconque,

$$Q_r \otimes_{\mathbf{Z}} H_r^n(\mathfrak{A}) = H_r^n(Q_r \otimes_{\mathbf{Z}} \mathfrak{A}) = 0 \qquad \text{si} \quad n < r.$$

Nous allons démontrer (10.1 *bis*) *par récurrence sur* r. Pour $r = 1$, il n'y a rien à démontrer; pour $r = 2$, le résultat cherché est contenu dans la proposition (10.1).

Soient $\mathfrak{A}$ un analyseur sur Q_r, et $\tilde{\mathfrak{A}}$ le complexe normalisé associé (§ 9). Pour simplifier les notations, nous noterons ici $A = \sum_{1 \leq n < \infty} \mathfrak{A}^n$ le sous-complexe $\tilde{\mathfrak{A}}_r = \sum_{1 \leq n < \infty} \tilde{\mathfrak{A}}_r^n$. Nous cherchons à démontrer que $H^n(A) = 0$ pour $n \neq r$, n désignant le degré-arguments dans A.

Définissons sur A une *filtration* au moyen des sous-modules A_i, en posant

$$(1) \quad \begin{cases} f \in A_i' \text{ si et seulement si : } f(x_1, \ldots, x_n) \in A^n \text{ et le degré par rapport à } x_n \text{ de chaque} \\ \qquad\qquad \text{composante homogène non nulle de } f \text{ est} < i; \\ A_i = \sum_{1 < n < \infty} A_i^n. \end{cases}$$

C'est ce que nous appellerons la *filtration par rapport au degré maximum du dernier argument*. Cette filtration est, par définition, compatible avec le degré-arguments. La définition (8.1) de ∂ montre que $\partial A_i \subset A_i$, c'est-à-dire que la filtration est compatible avec la différentielle. De plus,

$$(2) \qquad A = A_r \subset A_{r-1} \subset \ldots \subset A_1 \subset A_0 = 0.$$

([36]) *Cf.* déf. (6.1) de l'anneau Q_r.

([37]) *Cf.* [2], chap. V, § 9.

La relation $A_0 = 0$ provient de ce que nous avons pris $A = \tilde{\mathfrak{A}}_r$ (complexe *normalisé*). Nous avons donc une filtration *régulière*, et nous pouvons appliquer les propriétés de la suite spectrale ([38]).

37. Une suite spectrale. — *Le complexe* E_0. — C'est le module gradué associé au module filtré A, c'est-à-dire, $\sum_{i,\ i\leq r} A_i A_{i-1}$. Nous désignerons par $E_0^{i,n}$ le terme de degré filtrant i et de degré-arguments n, c'est-à-dire $A_i^n A_{i-1}^n$. Comme la filtration est définie à partir d'une graduation, nous pouvons identifier $E_0^{i,n}$ au module des *n-cochaînes normalisées qui sont homogènes de degré i par rapport au dernier argument.*

La différentielle d_0. — Elle est homogène de degré 0 par rapport au degré filtrant, de degré 1 par rapport au degré-arguments. On l'obtient à partir de δ par passage aux quotients. Soit donc $f \in A^n$, homogène de degré $i \geq 1$ par rapport au dernier argument x_n; $d_0 f$ s'identifie à la somme des composantes homogènes de f qui sont de degré i par rapport au dernier argument x_{n+1}. Or tous les termes du développement de $(\delta f)(x_1, \ldots, x_{n+1})$ sont de degré i en x_{n+1}, à l'exception des deux derniers. Le dernier terme $(-1)^{n+1} f(x_1, \ldots, x_n)$ est de degré 0 en x_{n+1}, et doit donc être négligé puisque $i \geq 1$. Quant à l'avant-dernier terme :

$$(-1)^n f(x_1, \ldots, x_n + x_{n+1}),$$

sa composante de degré i en x_{n+1} est

$$(-1)^n f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}).$$

Ainsi, pour calculer $d_0 f$ ($f \in A^n$, $n \geq 2$), *on remplace le dernier argument* x_n *par* x_{n+1}, *puis on calcule le cobord de* f, *considérée seulement comme fonction de ses* $(n-1)$ *premiers arguments.* Si $f \in A^1$, $d_0 f = 0$.

Nous formulerons plus commodément ces résultats en introduisant l'analyseur $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(a)$, obtenu par adjonction d'une « constante » a à l'analyseur $\mathfrak{A}$ (n° 17). Le complexe $\mathfrak{B}$ est muni d'une troisième graduation, celle relative au degré par rapport à la « constante ». Nous parlerons ainsi du « *degré-constante* » dans $\mathfrak{B}$, et nous noterons ${}_i\tilde{\mathfrak{B}}_j^n$ le module des n-cochaînes normalisées dans $\mathfrak{B}$, homogènes de degré total j par rapport à leurs n arguments, et de degré i par rapport à la « constante ». La différentielle δ dans $\mathfrak{B}$ est homogène de degré 0 par rapport au degré-constante, si bien que $H(\mathfrak{B})$ est *trigradué*

$$H(\mathfrak{B}) = \sum_{i,j,n} {}_i H_j^n(\mathfrak{B}).$$

([38]) [2], chap. XV. Nous avons apporté quelques modifications aux notations concernant les indices (remplacement du « degré complémentaire » par le « degré total »).

Pour $n > 1$, nous pouvons *identifier* $E_0^{i,n}$ *au module* ${}_i\tilde{\mathfrak{B}}_{r-i}^{n-1}$ en associant à $f(x_1, \ldots, x_n)$ la cochaîne $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, a)$ du complexe $\mathfrak{B}$; *la différentielle* d_0 *s'identifie alors à la différentielle* δ de $\mathfrak{B}$.

Le complexe E_1. — Il s'obtient en calculant la cohomologie de E_0 par rapport à d_0. L'identification précédente montre que, pour $n > 1$, $E_1^{i,n}$ est isomorphe à ${}_iH_{r-i}^{n-1}(\mathfrak{B})$. Mais $\mathfrak{B}$ peut être considéré, par restriction sur l'anneau de base, comme un analyseur sur Q_s, pour $s \leq r$, et $r - i < r$ puisque $i \geq 1$. Nous pouvons donc utiliser l'hypothèse de récurrence et appliquer (10.1 *bis*); nous obtenons ainsi $E_1^{i,n} = 0$ pour $n > 1$ et $n - 1 \neq r - i$. D'autre part, $E_1^{i,1}$ s'identifie à $E_0^{i,1}$, c'est-à-dire à 0, pour $i \neq r$, et à $\mathfrak{A}_r^1$ pour $i = r$. Nous avons donc toujours

$$E_1^{i,n} = 0 \quad \text{pour} \quad n + i \neq r + 1, \tag{1}$$

et, par conséquent,

$$E_s^{i,n} = 0 \quad \text{pour} \quad n + i \neq r + 1 \quad \text{et} \quad s \geq 1. \tag{2}$$

Il en résulte que *les différentielles* d_s *sont nulles pour* $s \geq 2$. En effet, d_s applique $E_s^{i,n}$ dans $E_s^{i-s,n+1}$, et ces deux modules ne peuvent être simultanément non nuls, d'après (2). Par conséquent,

$$E_2^{i,n} = E_\infty^{i,n}, \tag{3}$$

et, compte tenu de (2),

$$H_r^n(\mathfrak{A}) \simeq E_2^{r+1-n,n}. \tag{4}$$

Tout revient donc à démontrer que $E_2^{r+1-n,n} = 0$ *pour* $n < r$.

Le théorème (9.2) et son corollaire nous permettent de donner une nouvelle interprétation des modules $E_1^{r+1-n,n}$. En effet, pour $n > 1$, $E_1^{r+1-n,n}$ est isomorphe à ${}_{(r+1\ n)}H_{n-1}^{n-1}(\mathfrak{B})$, qui s'identifie au module des fonctions $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, a) \in \mathfrak{B}$, *antisymétriques par rapport à leurs* $(n-1)$ *arguments, et homogènes de degré* $(r+1-n)$ *par rapport à la « constante »* a. Revenant au complexe A, nous voyons que tout élément $\xi \in E_1^{r+1-n,n}$ a un *représentant canonique* $\varphi(\xi)$ dans A_{r+1-n} : $\varphi(\xi) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, où $f \in A_{r+1-n}$ est *antisymétrique par rapport à ses* $(n-1)$ *premiers arguments*, et *homogène de degré* $(r+1-n)$ *en* x_n. Pour $n = 1$, nous prendrons $\varphi(\xi) = f(x_1)$, unique représentant de $\xi \in E_1^{r,1}$ dans A_r.

Lemme (10.1). — *Désignons par* $K^{m,n}$ *le module des fonctions* $(m+n)$*-linéaires de* $\mathfrak{A}^{m+n}$ *qui sont antisymétriques par rapport à leurs* m *premiers arguments, et symétriques par rapport à leurs* n *derniers arguments* ($m, n \in \mathbf{N}$, $m + n > 0$). *Définissons* K *comme la somme directe* $\sum_{m,n} K^{m,n}$. *Les éléments de* $K^{m,n}$ *seront notés* $f(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$. *Soient* Δ *et* h *les deux endomorphismes de* K

définis en posant, pour $f(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \in \mathrm{K}^{m,n}$,

$$(\Delta f)(x_1, \ldots, x_{m+1}, y_1, \ldots, y_{n-1}) = \sum_{1 \leq i \leq m+1} (-1)^i f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{m+1}, x_i, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathrm{K}^{m+1,n-1},$$

$$(hf)(x_1, \ldots, x_{m-1}, y_1, \ldots, y_{n+1}) = (-1)^m \sum_{1 \leq j \leq n+1} f(x_1, \ldots, x_{m-1}, y_j, y_1, \ldots, \hat{y}_j, \ldots, y_{n+1}) \in \mathrm{K}^{m-1,n+1}.$$

Alors, pour $f \in \mathrm{K}^{m,n}$, $(\Delta h + h\Delta) f = (m+n) f$ [39].

Ce lemme s'établit par un calcul direct. Si $f \in \mathrm{K}^{m,n}$, on trouve successivement :

$$(h\Delta f)(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n} (-1)^{m-i-1} f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_m, y_j, x_i, y_1, \ldots, \hat{y}_j, \ldots, y_n) - \sum_{1 \leq j \leq n} f(x_1, \ldots, x_m, y_j, y_1, \ldots, \hat{y}_j, \ldots, y_n),$$

$$(\Delta h f)(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n} (-1)^{m-i} f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_m, y_j, x_i, y_1, \ldots, \hat{y}_j, \ldots, y_n) + \sum_{1 \leq i \leq m} (-1)^{m-i} f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_m, x_i, y_1, \ldots, y_n),$$

d'où la relation annoncée, compte tenu des symétries et antisymétries de f.

Définissons maintenant un *monomorphisme* ψ du complexe $\mathrm{E}_1 = \sum_n \mathrm{E}_1^{r+1-n,n}$ dans K, tel que ψ induise un isomorphisme de $\mathrm{E}_1^{r-1-n,n}$ sur $\mathrm{K}^{n-1,r-1-n}$ pour tout n ($1 \leq n \leq r$). Soit $\xi \in \mathrm{E}_1^{r-1-n,n}$; nous prenons $\varphi(x) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, et nous calculons la *multilinéarisée symétrique de f par rapport à son dernier argument* x_n (*cf.* n° 12), que nous écrivons

$$\psi(\xi) = g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{r-n+1}) \in \mathrm{K}^{n-1,r-n+1}.$$

En d'autres termes, $g = \psi(\xi)$ est déterminé par les deux conditions

$$(5) \qquad \begin{cases} g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{r-n+1}) & \text{est symétrique par rapport aux } y, \\ g(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \varphi(\xi). \end{cases}$$

L'existence et l'unicité de $g = \psi(\xi)$ proviennent de ce que A est un Q_r-module et, *a fortiori*, un Q_{r-n+1}-module.

Nous avons alors

$$(6) \qquad \psi(d_1 \xi) = \frac{r+1-n}{n} \Delta \psi(\xi) \qquad \text{pour} \quad \xi \in \mathrm{E}_1^{r+1-n,n} \quad \text{et} \quad 1 \leq n \leq r-1,$$

tandis que $d_1 \mathrm{E}_1^{1,r} = 0$.

---

[39] Le signe $\hat{}$ signifie que le symbole qui figure en dessous doit être omis.

Soit, en effet, $\xi \in E_1^{r-1-n,n}$, $1 \leq n \leq r-1$. Alors $\varphi(\xi) = f(x_1, \ldots, x_n)$ est un représentant de ξ dans A_{r+1-n}; donc $\partial\varphi(\xi)$ est un représentant de $d_1\xi$ dans A_{r-n}; mais [*cf.* (1), n° 12] nous pouvons remplacer, mod A_{r-n-1}, $\partial\varphi(\xi)$ par $(-1)^n(r+1-n)\,g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+1})$, où

$$g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{r-1-n}) = \psi(\xi).$$

Pour obtenir $\varphi(d_1\xi)$, il suffit donc d'*antisymétriser*

$$(-1)^n(r+1-n)\,g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+1})$$

par rapport à ses n premiers arguments (10). La définition de l'opérateur Δ [lemme (10.1)] conduit immédiatement à (6).

Soit $\xi \in E_1^{r+1-n,n}$, avec $d_1\xi = 0$ et $1 \leq n \leq r-1$. Si $n = 1$, $\xi = 0$ [*cf.* prop. (10.1)]. Si $n > 1$, il résulte de (6) et du lemme (10.1) que $\xi = d_1\tau_1$, où τ_1 est défini par

$$\psi(\tau_1) = \frac{(n-1)}{r(r+2-n)}\,h\psi(\xi). \tag{7}$$

Ainsi $E_2^{r+1-n,n} = 0$ si $n < r$.

C. Q. F. D.

11. — Cohomologie des puissances cartésiennes d'analyseurs; produits en cohomologie.

38. Complexes réduits des puissances cartésiennes d'analyseurs. — Soient $\mathfrak{A}$ un analyseur, I un ensemble d'indices. Nous nous proposons d'étudier des propriétés de la cohomologie de l'analyseur $\Pi^{\mathrm{I}}\mathfrak{A}$ (*cf.* n° 18, dont nous reprenons les notations).

Si $F(X_1, \ldots, X_n) = (f_i(X_1, \ldots, X_n))_{i\in\mathrm{I}}$ est une n-cochaîne de $\Pi^{\mathrm{I}}\mathfrak{A}$ donnée par ses composantes $f_i \in \mathfrak{A}^{1,n}$, la définition (8.1) du cobord montre que

$$(\partial F)(X_1, \ldots, X_{n+1}) = ((\partial f_i)(X_1, \ldots, X_{n+1}))_{i\in\mathrm{I}}, \tag{1}$$

où, pour tout $i \in \mathrm{I}$,

$$(\partial f_i)(X_1, \ldots, X_{n+1}) = f_i(X_2, \ldots, X_{n+1}) + \sum_{j=1}^{j\leq n} (-1)^j f_i(X_1, \ldots, X_j X_{j+1}, \ldots, X_{n+1}) + (-1)^{n+1} f_i(X_1, \ldots, X_n). \tag{2}$$

Autrement dit, le cobord de F se calcule « composante par composante ». La formule (2) définit une différentielle sur le module $\mathfrak{A}^{\mathrm{I}} = \sum_{n\in\mathbf{N}^*} \mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}$.

Définition (11.1). — *Soient $\mathfrak{A}$ un analyseur, I un ensemble d'indices. Nous*

(10) Il faut ici appliquer le *projecteur* d'antisymétrisation (qui laisse invariantes les fonctions antisymétriques) et non, comme au n° 34, l'*opérateur* d'antisymétrisation (qui les multiplie par $n!$).

appellerons complexe réduit de la puissance cartésienne $\Pi^{\mathrm{I}}\mathfrak{A}$ *le complexe* $\mathfrak{A}^{\mathrm{I}}=\sum_{n\in\mathbf{N}^*}\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}$, *où la différentielle* δ *est donnée par la formule* (2) *ci-dessus.*

La relation (1) montre que la détermination de $\mathrm{H}(\Pi^{\mathrm{I}}\mathfrak{A})$ se ramène à celle de $\mathrm{H}(\mathfrak{A}^{\mathrm{I}})$; en effet, $\mathrm{H}(\Pi^{\mathrm{I}}\mathfrak{A})$ *s'identifie au produit direct d'une famille de modules* $(\mathrm{H}_\iota)_{\iota\in\mathrm{I}}$, *dont chacun est isomorphe à* $\mathrm{H}(\mathfrak{A}^{\mathrm{I}})$.

Si I est un ensemble d'indices, nous noterons $\mathbf{N}^{(\mathrm{I})}$ l'ensemble des familles $\rho=(\rho_\iota)_{\iota\in\mathrm{I}}$ d'entiers ≥ 0, tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux, et nous poserons $|\rho|=\sum_{\iota\in\mathrm{I}}\rho_\iota$.

La notion de module I-gradué s'obtient par une généralisation naturelle de la définition (1.2) : le module A est I-gradué s'il est donné comme une somme directe $\sum_{\rho\in\mathbf{N}^{\mathrm{I}}}\mathrm{A}_\rho$.

Le module $\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}$ a une structure de module n-gradué (*cf.* n° 18) et une structure de module I-gradué définie comme suit.

Définition (11.2). — *Soient* $\mathfrak{A}$ *un analyseur*, I *un ensemble d'indices. Nous définissons une structure de module* I*-gradué sur* $\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}$ *en posant, pour tous* $n\in\mathbf{N}^*$ *et* $\rho=(\rho_\iota)_{\iota\in\mathrm{I}}\in\mathbf{N}^{(\mathrm{I})}$,

$$f((x_{\iota,1})_{\iota\in\mathrm{I}},\ \ldots,\ (x_{\iota,n})_{\iota\in\mathrm{I}})\in\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}_\rho$$

si et seulement si f *est homogène de degré total* ρ_ι *par rapport à ses arguments* $x_{\iota,1},\ \ldots,\ x_{\iota,n}$ (*pour tout* $\iota\in\mathrm{I}$). *Nous appellerons* ρ *le « multidegré-composantes » dans* $\mathfrak{A}^{\mathrm{I}}$ (31).

La formule (2) montre que, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ et $\rho\in\mathbf{N}^{(\mathrm{I})}$,

$$\delta\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}_\rho\subset\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n+1}_\rho; \tag{3}$$

autrement dit la différentielle δ est homogène de degré 0 par rapport au multidegré-composantes. Le module de cohomologie $\mathrm{H}(\mathfrak{A}^{\mathrm{I}})$ se décompose donc en une somme directe

$$\mathrm{H}(\mathfrak{A}^{\mathrm{I}})=\sum_{n\in\mathbf{N}^*,\rho\in\mathbf{N}^{(\mathrm{I})}}\mathrm{H}^n_\rho(\mathfrak{A}^{\mathrm{I}}). \tag{4}$$

D'après la proposition (9.1), le calcul de $\mathrm{H}(\mathfrak{A}^{\mathrm{I}})$ peut être remplacé par le

(31) Les structures de modules n-gradué et I-gradué de $\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}$ sont *compatibles*, c'est-à-dire qu'en posant $\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}_{\alpha,\rho}=\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}_\alpha\cap\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}_\rho$ pour $\alpha\in\mathbf{N}^n$, $\rho\in\mathbf{N}_{(\mathrm{I})}$, on a

$$\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}_\alpha=\sum_{\rho\in\mathbf{N}^{(\mathrm{I})}}\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}_{\alpha,\rho}\qquad\text{et}\qquad\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}_\rho=\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n}\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}_{\alpha,\rho}.$$

De plus, si $\mathfrak{A}^{\mathrm{I},n}_{\alpha,\rho}\neq 0$, $|\alpha|=|\rho|$.

calcul du module de cohomologie $H(\tilde{\mathfrak{A}}^1)$ du *sous-complexe normalisé* $\tilde{\mathfrak{A}}^1$. Rappelons que $f(X_1, \ldots, X_n) \in \tilde{\mathfrak{A}}^{1,n}$ si

$$f(X_1, \ldots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \ldots, X_n) = 0 \qquad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Nous montrerons qu'il est possible de remplacer le complexe réduit normalisé $\tilde{\mathfrak{A}}^1$ par un sous-complexe plus simple. Pour éviter des notations trop compliquées, nous traiterons d'abord le cas où I se réduit à un ensemble de deux éléments.

39. Sous-complexe normal d'un carré cartésien d'analyseur. — Dans les nos 39 et 40, $\mathfrak{A}$ désignera un analyseur et $\mathfrak{B}$ le complexe réduit normalisé de l'analyseur $H^2\mathfrak{A}$. Un élément $f(X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathfrak{B}^n$ sera identifié à une fonction $f(x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n) \in \mathfrak{A}^{2n}$, qui s'annule lorsqu'on y remplace l'un quelconque des couples d'arguments (x_i, y_i) par $(0, 0)$.

Il se peut que certains des arguments x_i ou y_i soient neutres dans $f \in \mathfrak{B}$. Nous profiterons de cette circonstance pour « normaliser » à nouveau le complexe $\mathfrak{B}$.

Proposition (11.1). — *Pour tous $p, q \in \mathbf{N}$, $p+q>0$, définissons le sous-module $\mathfrak{C}^{p,q}$ de $\mathfrak{B}^{p+q}$ en convenant que $f(x_1, y_1; \ldots; x_{p+q}, y_{p+q}) \in \mathfrak{C}^{p,q}$ si et seulement si les arguments x_i et y_j sont neutres dans la fonction f pour $p+1 \leq i \leq p+q$ et $1 \leq j \leq p$. Alors le sous-module $\mathfrak{C} = \sum_{p,q \in \mathbf{N}} \mathfrak{C}^{p,q}$ de $\mathfrak{B}$ est un sous-complexe. De plus, $\mathfrak{C}$ est un complexe double (42), c'est-à-dire que δ est la somme de deux différentielles δ_1 et δ_2 vérifiant*

$$\delta_1 \mathfrak{C}^{p,q} \subset \mathfrak{C}^{p+1,q}, \qquad \delta_2 \mathfrak{C}^{p,q} \subset \mathfrak{C}^{p,q+1} \quad \text{pour tous } p, q \in \mathbf{N};$$
$$\delta = \delta_1 + \delta_2; \qquad \delta_1 \delta_1 = \delta_2 \delta_2 = \delta_1 \delta_2 + \delta_2 \delta_1 = 0.$$

Le sous-complexe $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{B}$ sera dit un sous-complexe normal du carré cartésien $H^2\mathfrak{A}$.

Démonstration. — Une fonction $f(X_1, \ldots, X_{p+q}) \in \mathfrak{C}^{p,q}$ pourra s'écrire, après suppression des arguments neutres, $f(x_1, \ldots, x_p, y_{p+1}, \ldots, y_{p+q})$. Ainsi f apparaît comme un élément de $\mathfrak{A}^n$ ou, plus précisément, du complexe normalisé $\tilde{\mathfrak{A}}^n$ (puisque $\mathfrak{B}$ a été pris normalisé).

La définition (2) (n° 38) de la différentielle δ dans $\mathfrak{B}$ nous permet d'appliquer la proposition (8.2), et nous poserons, pour $f(X_1, \ldots, X_{p+q}) \in \mathfrak{C}^{p,q}$,

$$(1) \qquad \begin{cases} (\delta_1 f)(X_1, \ldots, X_{p+q+1}) = \sum_{1 \leq i \leq p} (-1)^i (\partial_i f)(X_1, \ldots, X_{p+q+1}), \\ (\delta_2 f)(X_1, \ldots, X_{p+q+1}) = \sum_{p+1 \leq i \leq p+q+1} (-1)^i (\partial_i f)(X_1, \ldots, X_{p+q+1}). \end{cases}$$

(42) Au sens de [2], chap. V, § 4.

La relation $\partial = \partial_1 + \partial_2$ est dès lors évidente. Une vérification immédiate montre que $\partial_1 f$ se calcule comme le cobord de $f(x_1, \ldots, x_p; y_{p-1}, \ldots, y_{p+q})$ *considéré seulement comme fonction des p premiers arguments* $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$, à ceci près que les indices des q arguments (y_j) doivent être « décalés » (en substituant y_{j-1} à y_j pour $p+1 < j \leq p+q$) (43). Ce résultat établit que $\partial_1 \mathfrak{C}^{p,q} \subset \mathfrak{C}^{p+1,q}$ et que $\partial_1^2 = 0$. Les propriétés de ∂_2 se vérifient de la même manière.

D'après le n° 38, $\mathfrak{B}$ est gradué par le bidegré-composantes

$$\mathfrak{B} = \sum_{r,s \in \mathbf{N}} \mathfrak{B}_{r,s},$$

où r désigne le « degré par rapport aux arguments x » et s le « degré par rapport aux arguments y ». Il est clair que $\mathfrak{C}$ est un sous-complexe homogène par rapport au bidegré composantes; $\mathfrak{C}$ est donc un module quadrigradué

$$\mathfrak{C} = \sum_{p,q,r,s \in \mathbf{N}} \mathfrak{C}^{p,q}_{r,s}.$$

Remarque. — Du seul fait que nous écrivons les éléments de $\mathfrak{B}^n$ sous la forme $f(x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n)$, nous *ordonnons* les « composantes » du carré cartésien de $\mathfrak{A}$. Le complexe réduit normalisé $\mathfrak{B}$ contient *deux* sous-complexes normaux : le sous-complexe $\mathfrak{C}$ défini plus haut et le sous-complexe $\mathfrak{C}'$ défini en posant $f \in \mathfrak{C}'^{p,q}$ si et seulement si $f(\in \mathfrak{B}^{p+q})$ peut s'écrire, après suppression des arguments neutres, $f(y_1, \ldots, y_p; x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})$.

Proposition (11.2). — *L'homomorphisme canonique* $\mathrm{H}(\mathfrak{C}) \to \mathrm{H}(\mathfrak{B})$ *est un isomorphisme. Plus précisément, il existe un endomorphisme linéaire* k *de* $\mathfrak{B}$, *nul sur* $\mathfrak{C}$, *homogène de degré* $(0, 0)$ *par rapport au bidegré-composantes, et tel qu'en posant* $h = (1 + \partial k + k\partial)$, *on ait* $h\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$.

Démonstration. — Le « principe de comparaison » (n° 32) nous permettra de nous ramener à l'étude de la cohomologie du produit direct de deux groupes ou monoïdes. Il nous faut d'abord rappeler, et compléter sur un point, certains résultats de [2] (44).

Soit G un monoïde unitaire, noté multiplicativement, $\mathcal{G} = \mathrm{Z}(\mathrm{G})$ son algèbre à coefficients entiers. Le « *complexe standard* » $\mathrm{S}(\mathrm{G})$ de G est un $\mathcal{G}$-complexe (négatif), dont la composante homogène de degré $n > 0$ possède une base sur $\mathcal{G}$

(43) *Cf.* n° 17.

(44) Nous pourrions donner une démonstration « directe » de la proposition (11.2), en appliquant toujours le principe de comparaison. Il suffirait de « formaliser » les lemmes de normalisation de Lyndon (*Duke Mat. J.*, t. 15, 1948, p. 271-292) et de Hochschild-Serre (*Trans. Amer. Mat. Soc.*, t. 74, 1953, p. 110-134). Les calculs de ces auteurs peuvent être simplifiés (y compris dans le cas général d'une extension de groupes) par l'emploi d'homotopies convenables. Néanmoins la méthode directe nécessiterait des calculs étendus et ne conduirait pas à des formules explicites pour h et k.

constituée par les symboles $[\xi_1, \ldots, \xi_n]$, où $\xi_1, \ldots, \xi_n \in G$; pour le degré 0, la base est constituée par le seul symbole $[\ ]$. La différentielle d (de degré -1) est définie par $d[\ ] = 0$ et

$$(2)\qquad d[\xi_1, \ldots, \xi_n] = \xi_1[\xi_2, \ldots, \xi_n] + \sum_{1 \leq i < n} (-1)^i [\xi_1, \ldots, \xi_i\xi_{i+1}, \ldots, \xi_n] + (-1)^n [\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}].$$

Le « *complexe normalisé* » $N(G)$ est défini à partir de $S(G)$ en passant au quotient, de façon à annuler tous les éléments $[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ où l'un des ξ_i est égal à l'élément neutre 1 du monoïde G.

Soient maintenant G et G′ deux monoïdes unitaires, G″ leur produit direct. Un élément (ξ, ξ') de G″ sera noté $\xi \otimes \xi'$ (avec $\xi \in G$, $\xi' \in G'$). L'algèbre $\mathcal{G}'' = Z(G'')$ s'identifie au produit tensoriel $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}'$ des algèbres de G et de G′.

Les complexes $N(G'')$ et $N(G) \otimes N(G')$ constituent deux résolutions $\mathcal{G}''$-projectives de Z sur lequel G″ opère trivialement : il existe donc des *applications de $\mathcal{G}''$-complexes :*

$$\mu : \ N(G) \otimes N(G') \to N(G''),$$
$$\nu : \ N(G'') \to N(G) \otimes N(G'),$$

telles que $\mu\nu$ et $\nu\mu$ soient homotopes à l'identité. Nous allons expliciter de telles applications (15).

Pour $n \in \mathbf{N}$, $\xi_i \in G$, $\xi'_i \in G'$ $(1 \leq i \leq n)$, nous poserons

$$(3)\qquad \nu[\xi_1 \otimes \xi'_1, \ldots, \xi_n \otimes \xi'_n] = \sum_{0 \leq p \leq n} [\xi_1, \ldots, \xi_p] \otimes \xi'_1 \ldots \xi'_p [\xi'_{p+1}, \ldots, \xi'_n].$$

La définition de μ est plus compliquée, et nous ferons les conventions suivantes concernant les notations. Pour tout couple d'entiers m, n, avec $m \leq n$, nous noterons $[m, n]$ l'ensemble des entiers i tels que $m \leq i \leq n$. Si J est une partie de $[m, n]$, il existe une permutation σ_J et une seule de $[m, n]$ qui « remet en ordre » J et son complémentaire : autrement dit, $i < i'$ et $i, i' \in J$ (ou $i, i' \notin J$) impliquent $\sigma_J(i) < \sigma_J(i')$, tandis que $j \in J$, $j' \notin J$ $(j' \in [m, n])$ impliquent $\sigma_J(j) < \sigma_J(j')$. Nous noterons $\varepsilon(J)$ la signature de la permutation σ_J, et $|J|$ le nombre d'éléments de $J \subset [m, n]$: pour abréger, nous écrirons $J(i)$ au lieu de $\sigma_J(i)$ pour $i \in [m, n]$. Enfin nous conviendrons que, dans les formules (4), (5), (7) ci-dessous, un symbole tel que $\Xi_{J,i}$ doit être remplacé par $\xi_{J(i)} \otimes 1$ (resp. par $1 \otimes \xi_{J(i)}$) si $i \in J$ (resp. si $i \notin J$).

Dans ces conditions, nous avons, pour $\xi_1, \ldots, \xi_p \in G$ et $\xi'_{p+1}, \ldots, \xi'_{p+q} \in G'$,

$$(4)\qquad \mu[\xi_1 \otimes 1, \ldots, \xi_p \otimes 1, 1 \otimes \xi'_{p+1}, \ldots, 1 \otimes \xi'_{p+q}] = \sum_{J \subset [1, p+q],\ |J| = p} \varepsilon(J)\, [\Xi_{J,1}, \ldots, \Xi_{J,p+q}],$$

où la sommation est étendue à toutes les parties $J \subset [1, p+q]$ ayant p éléments.

---

(15) Cf. [2], chap. XI, § 6, form. (1) et (3). Les applications μ et ν y sont appelées respectivement f et g.

Comme nous avons pris des complexes *normalisés*, $\mu\nu$ est l'identité sur $N(G)\otimes N(G')$ et, par conséquent, $\mu\nu$ est idempotent. Nous avons, pour $\xi_1, \ldots, \xi_n \in G$ et $\xi'_1, \ldots, \xi'_n \in G'$,

$$(5)\qquad \mu\nu[\xi_1\otimes\xi'_1, \ldots, \xi_n\otimes\xi'_n] = \sum_{J\subset[1,n]} \varepsilon(J)\,(1\otimes\xi'_1\ldots\xi'_{[J]})\,[\Xi_{J,0}, \ldots, \Xi_{J,n_J}],$$

où J parcourt toutes les parties de $[1, n]$.

D'après les résultats généraux rappelés plus haut, il existe un endomorphisme $\mathcal{G}''$-linéaire π de $N(G')$ tel que

$$(6)\qquad \mu\nu - \mathbf{1} = \pi d + d\pi$$

[**1** désignant ici l'application identique de $N(G'')$].

Pour calculer explicitement π, on peut utiliser un procédé de récurrence analogue à celui de [2] (chap. XI, § 5). On trouve ainsi, pour $\xi_1, \ldots, \xi_n \in G$ et $\xi'_1, \ldots, \xi'_n \in G'$,

$$(7)\qquad \pi[\xi_1\otimes\xi'_1, \ldots, \xi_n\otimes\xi'_n] = \sum_{0\leq j\leq n-1} \sum_{J\subset[j+1,n]} (-1)^j\,\varepsilon(J)\,[\xi_1\otimes\xi'_1, \ldots, \xi_j\otimes\xi'_j, 1\otimes\xi'_{j+1}\ldots\xi'_{[J]}\cdot\Xi_{J,0}, \ldots, \Xi_{J,n_J}],$$

où la sommation est étendue, pour j donné, à toutes les parties $J\subset[j+1, n]$: comme le complexe est normalisé, on peut supposer $|J| > 0$.

Reprenons maintenant l'analyseur $\mathfrak{A}$: soit $\mathfrak{M}$ le module de sa représentation régulière, $(e_i)_{i\in N}$ la famille des $\mathfrak{A}$-générateurs $\mathfrak{A}$-libres de $\mathfrak{M}$ définie au n° 7. Pour tout $n\in N^*$, nous identifions $f\in\mathfrak{B}''$ à $f(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)\in\mathfrak{A}^{2n}$, que nous identifions à son tour à une fonction de $2n$ arguments dans $\mathfrak{M}$.

Nous supposons désormais que G et G' coïncident avec le monoïde abélien libre engendré par la famille de générateurs $(g_i)_{i\in N}$. Nous définissons un homomorphisme unitaire γ du monoïde $G = G'$ dans $\mathfrak{M}$ considéré comme monoïde abélien unitaire, en posant $\gamma(g_i) = e_i$ pour tout $i\in N^*$, et nous faisons opérer trivialement $G'' = G\times G'$ sur $\mathfrak{M}$. Considérons le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}''}(N(G''), \mathfrak{M})$ que nous noterons C; rappelons qu'une n-cochaîne f^* de C est déterminée par les valeurs $f^*([\xi_1\otimes\xi'_1, \ldots, \xi_n\otimes\xi'_n])$ qu'elle prend sur les éléments de la $\mathcal{G}''$-base de $N(G'')$. Nous désignerons respectivement par d', h', k' les transposés dans C de la différentielle d de $N(G'')$ et de ses endomorphismes $\mu\nu$ et π. Nous avons, par transposition de (6),

$$(8)\qquad h' - \mathbf{1} = d'k' + k'd',$$

et d' n'est autre que la différentielle du complexe C.

Définissons l'application $\varphi : \mathfrak{B}\to C$ en posant, pour tous $n\in N^*$,

$$(9)\qquad \begin{aligned} &f(x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n)\in\mathfrak{B}'' \quad\text{et}\quad \xi_1, \ldots, \xi_n; \xi'_1, \ldots, \xi'_n\in G,\\ &(\varphi f)([\xi_1\otimes\xi'_1, \ldots, \xi_n\otimes\xi'_n]) = f(\gamma(\xi_1), \gamma(\xi'_1); \ldots; \gamma(\xi_n), \gamma(\xi'_n)). \end{aligned}$$

L'application φ est évidemment linéaire; elle est *injective* (il suffit, pour le voir, de remplacer dans (9) ξ_i par g_i et ξ'_i par g_{n+i} pour $1 \leq i \leq n$); enfin c'est une *application de complexes*, c'est-à-dire que

$$\varphi\delta = d'\varphi. \tag{10}$$

Cette dernière relation, conséquence immédiate des définitions de δ, d' et φ, donne un sens précis à notre « principe de comparaison ».

L'image par φ du complexe $\mathfrak{B}$ est un *sous-complexe* $\varphi\mathfrak{B}$ de C qui est *stable* pour l'endomorphisme k' et, par conséquent, aussi pour h' ([46]); cette propriété résulte de la formule explicite (7). Nous définissons les endomorphismes k et h de $\mathfrak{B}$ par les relations : $\varphi kf = k'\varphi f$ et $\varphi hf = h'\varphi f$ pour tout $f \in \mathfrak{B}$ (ce qui est licite puisque φ est injectif). Plus précisément, nous obtenons pour $f(X_1, \ldots, X_n) = f(x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n) \in \mathfrak{B}^n$

$$(hf)(x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n) = \sum_{J \subset [1, n]} \varepsilon(J) f(Z_{J,1}; \ldots; Z_{J,n}), \tag{11}$$

$$(kf)(x_1, y_1; \ldots; x_{n-1}, y_{n-1}) = \sum_{0 \leq j \leq n-2} \sum_{J \subset [j+1, n-1]} (-1)^j \varepsilon(J) f \times \left(x_1, y_1; \ldots; x_j, y_j; 0, \sum_{j \,|\, 1 \leq i \leq j+|J|} y_i; Z_{J,j+1}; \ldots; Z_{J,n-1}\right), \tag{12}$$

où nous convenons de remplacer chaque symbole $Z_{J,i}$ par le couple d' « arguments » $(x_{J(i)}, 0)$ [resp. $(0, y_{J(i)})$] si $i \in J$ (resp. $i \notin J$). Dans (11) la sommation est étendue à toutes les parties J de $[1, n]$; dans (12) la sommation est étendue pour j donné, à toutes les parties de J de $[j+1, n-1]$ vérifiant $|J| > 0$.

Il résulte de (11) et (12) que $hf \in \mathfrak{C}$ pour tout $f \in \mathfrak{B}$, que $kg = 0$ pour tout $g \in \mathfrak{C}$, et que k et h sont homogènes de degré $(0, 0)$ par rapport au bidegré-composantes. Quant à la relation $h = (1 + \delta k + k\delta)$, elle résulte de (8) par restriction au sous-complexe $\varphi\mathfrak{B}$ de C ([47]).

40. Suite spectrale du sous-complexe normal d'un carré cartésien. — La proposition (11.2) ramène le calcul du module de cohomologie $H(\mathfrak{B})$ à celui du module $H(\mathfrak{C})$, où $\mathfrak{C}$ est un complexe double. Nous pouvons appliquer à ce dernier le procédé de Cartan-Eilenberg ([2], chap. XV, § 6), c'est-à-dire la *suite spectrale déduite de l'une ou l'autre* ([48]) *des deux filtrations canoniques du complexe double* $\mathfrak{C}$.

([46]) C'est là le point essentiel de la démonstration : les propriétés utilisées des complexes de monoïdes se transposent aux analyseurs parce que toutes les applications et les homotopies rencontrées sont génériques, c'est-à-dire ne font aucunement intervenir les structures particulières des monoïdes en question.

([47]) La vérification directe de cette dernière relation à partir de (11) et (12) est extrêmement pénible. Sans quoi il nous aurait suffi d'écrire ces deux formules pour démontrer la proposition !

([48]) Le choix est indifférent, ainsi qu'il résulte de l'isomorphisme des deux sous-complexes normaux exposé plus bas (n° 41).

De plus, les deux différentielles δ_1 et δ_2 de $\mathbf{C}$ sont homogènes de degré (o, o) par rapport au bidegré-composantes : le complexe double $\mathbf{C}$ est décomposé en somme directe des complexes doubles $\mathbf{C}_{r,s}$ et $f(x_1, y_1; \ldots, x_n, y_n) \in \mathbf{C}$ appartient à $\mathbf{C}_{r,s}$ si et seulement si f est homogène de degré total r (resp. s) par rapport aux arguments x (resp. y). Puisque $\mathbf{C}$ est normalisé, $\mathbf{C}_{0,s}^{p,q}$ (resp. $\mathbf{C}_{r,0}^{p,q}$) est nul si $p \neq 0$ (resp. $q \neq 0$) : de même, $\mathbf{C}_{r,s}^{0,q}$ (resp. $\mathbf{C}_{r,s}^{p,0}$) est nul si $r \neq 0$ (resp. $s \neq 0$). Nous en déduisons que les complexes $\mathbf{C}_{0,r}$ et $\mathbf{C}_{r,0}$ s'identifient tous deux à $\tilde{\mathfrak{A}}_r$, ce qui fait apparaître dans $\mathrm{H}(\mathfrak{B})$ *deux facteurs directs isomorphes à* $\mathrm{H}(\mathfrak{A})$: ils proviennent des cochaînes qui « ne dépendent que d'une seule composante ». Les « homomorphismes de lisière » (edge homomorphisms de [2]) de la suite spectrale expriment seulement une partie de ce résultat.

Considérons maintenant le complexe double $\mathbf{C}_{r,s}$ où $r, s > 0$ et choisissons, par exemple, la « première filtration ». Nous noterons $\mathrm{E}_i^{p,q}$ les termes de la suite spectrale correspondante ($p =$ degré filtrant, $q =$ degré complémentaire, $i =$ rang dans la suite spectrale). Nous avons $\mathbf{C}_{r,s}^{p,q} = 0$ pour $p \leq 0$ ou $q \leq 0$. Les résultats concernant les « *termes de bas degré* » prennent donc ici la forme suivante :

$$\mathrm{H}^0(\mathbf{C}_{r,s}) = \mathrm{H}^1(\mathbf{C}_{r,s}) = 0, \tag{1}$$

$$\mathrm{H}^2(\mathbf{C}_{r,s}) \simeq \mathrm{E}_2^{1,1}, \tag{2}$$

et l'on a la suite exacte

$$0 \to \mathrm{E}_2^{2,1} \to \mathrm{H}^3(\mathbf{C}_{r,s}) \to \mathrm{E}_2^{1,2} \to \mathrm{E}_2^{3,1} \to \mathrm{H}^4(\mathbf{C}_{r,s}). \tag{3}$$

Le calcul des termes E_0, E_1, E_2 s'effectue de la manière suivante. Pour tous p, q, $\mathrm{E}_0^{p,q}$ s'identifie à $\mathbf{C}_{r,s}^{p,q}$, et la différentielle d_0 de E_0 à la différentielle δ_2 de $\mathbf{C}$. Nous avons donc

$$\mathrm{E}_1^{p,q} = {}_r\mathrm{H}_s^q(\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_p)), \tag{4}$$

où $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_p)$ désigne l'analyseur obtenu en adjoignant à $\mathfrak{A}$ les « constantes » $x_1, \ldots, x_p$, et où l'indice r dans ${}_r\mathrm{H}_s^q$ signifie qu'on n'a considéré que les cochaînes de degré total r par rapport aux « constantes ».

La différentielle d_1 s'obtient en appliquant la différentielle δ au second membre de (4), considéré comme « fonction » de $x_1, \ldots, x_p$. Le lecteur formulera sans peine un énoncé plus précis en transcrivant les calculs de [2]. Contentons-nous de remarquer que le terme $\mathrm{E}_2^{1,1}$ s'identifie au module des fonctions pseudo-bilinéaires $f(x_1, y_2)$.

41. Sous-complexes normaux des puissances cartésiennes d'analyseurs; cas général, applications.

Définition (11.3). — *Soient* $\mathfrak{A}$ *un analyseur,* I *un ensemble d'indices,* $\mathfrak{B} = \tilde{\mathfrak{A}}^{\mathrm{I}}$ *le complexe réduit normalisé de la puissance cartésienne* $\Pi^{\mathrm{I}}\mathfrak{A}$. *Supposons, de plus, donnée sur l'ensemble* I *une relation d'ordre total* $\mathcal{R}$. *Nous définissons un sous-*

module $\mathfrak{C}$ *de* $\mathfrak{B}$ *en posant* $f(X_1, \ldots, X_n) \in \mathfrak{C}$ *si et seulement si* $f(\in \mathfrak{B}^n)$ *est une somme finie de fonctions dont chacune peut s'écrire, après suppression des arguments neutres, sous la forme*

$$f(x_{i_1,1}, \ldots, x_{i_n,n}), \qquad \text{avec} \quad i_1 \leq i_2 \ldots \leq i_n \in \mathrm{I}.$$

Par exemple, si I est un ensemble ordonné de trois éléments, nous noterons les arguments $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ comme des triples (x, y, z) et les éléments de $\mathfrak{C}$ s'écriront comme des sommes finies de fonctions de la forme

$$f(x_1, \ldots, x_p, y_{p+1}, \ldots, y_{p+q}, z_{p+q+1}, \ldots, z_{p+q+r}).$$

On voit ainsi que, dans le cas général, $\mathfrak{C}$ est muni de deux structures de module I-gradué : la première est induite par la structure de module I-gradué de $\mathfrak{B}$ [déf. (11.2)], c'est-à-dire par le multidegré-composantes; la seconde est définie par le « multidegré-arguments » [dans l'exemple ci-dessus, f est une fonction de tri-degré-arguments $\pi = (p, q, r)$]. Le module $\mathfrak{C}$ se décompose donc en une somme directe :

$$\mathfrak{C} = \sum_{\pi, \rho \in \mathbf{N}^{\mathrm{I}}} \mathfrak{C}_\rho^\pi. \tag{1}$$

Proposition (11.3). — *Avec les notations de la définition* (11.3), $\mathfrak{C}$ *est un sous-complexe de* $\mathfrak{B}$, *que nous appellerons sous-complexe normal associé à la relation d'ordre* $\mathcal{R}$. *L'homomorphisme canonique* $\mathrm{H}(\mathfrak{C}) \to \mathrm{H}(\mathfrak{B})$ *est un isomorphisme. Si* I *est un ensemble ordonné de p éléments,* $\mathfrak{C}$ *est un complexe p-uple au sens de* [2].

Démonstration. — On vérifie, comme pour la proposition (11.1), que $\mathfrak{C}$ est un sous-complexe de $\mathfrak{B}$. Pour démontrer que l'homomorphisme $\mathrm{H}(\mathfrak{C}) \to \mathrm{H}(\mathfrak{B})$ est un isomorphisme, on se ramène d'abord au cas où l'ensemble d'indices I est fini (en considérant les divers multidegrés-composantes). On peut ensuite construire explicitement une homotopie, comme dans la démonstration de la proposition (11.2), ce qui conduit à des notations et formules compliquées. Aussi est-il préférable de raisonner par récurrence sur le nombre p d'éléments de I. Pour cela, on remplace chaque « argument vectoriel » $X_i = (x_{j,i})_{1 \leq j \leq p}$ dans les fonctions $f(X_1, \ldots, X_n) \in \mathfrak{B}^n$ par un couple (x_i, Y_i), où x_i désigne l'argument $x_{1,i}$ et Y_i l' « argument vectoriel » $(x_{j,i})_{2 \leq j \leq p}$. On définit le sous-complexe double $\mathfrak{B}'$ de $\mathfrak{B}$ constitué par les sommes finies de fonctions qui s'écrivent (après suppression d'arguments neutres) sous la forme $f(x_1, \ldots, x_q, Y_{q+1}, \ldots, Y_n)$. Il suffit de modifier légèrement la démonstration de la proposition (11.2) pour démontrer que l'homomorphisme canonique $\mathrm{H}(\mathfrak{B}') \to \mathrm{H}(\mathfrak{B})$ est un *isomorphisme* en construisant explicitement une homotopie ([49]). On a $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}'$; pour démontrer que l'homomorphisme $\mathrm{H}(\mathfrak{C}) \to \mathrm{H}(\mathfrak{B}')$ est un isomorphisme, on

([49]) Les modifications consistent en ceci : au lieu de prendre pour G et G' deux mêmes monoïdes abéliens libres engendrés par des générateurs $(g_i)_{i\in \mathbf{N}^*}$, on prendra deux monoïdes abéliens libres G et G' engendrés respectivement par les générateurs $(g_i)_{i\in \mathbf{N}^*}$ et $(g_{j,i})_{i\in \mathbf{N}^*, 2\leq j\leq p}$, et l'on modifiera en conséquence le monomorphisme τ de $\mathfrak{B}'$.

applique au complexe double $\mathfrak{B}'$ et à son sous-complexe $\mathfrak{C}$ les suites spectrales déduites de la première filtration de $\mathfrak{B}'$. La formule analogue à (4) (n° 40) montre alors que l'homomorphisme des termes E_1 de $\mathfrak{C}$ et de $\mathfrak{B}'$ est un isomorphisme, *compte tenu de l'hypothèse de recurrence sur le nombre d'éléments de* I. La proposition (11.3) en résulte.

Pour formuler commodément les résultats obtenus, nous poserons la

Définition (11.4). — *Soient* $\mathfrak{A}$ *un analyseur,* n, $p \in \mathbf{N}^*$, I *l'intervalle d'entiers* $[1, p]$. *Nous noterons* $H^n(\mathfrak{A}; p)$ *le sous-module du module p-gradué* ([50])

$$H^n(\mathfrak{A}^1) = \sum_{\alpha \in N^p} H^n_\alpha(\mathfrak{A}^1)$$

égal à la somme directe des $H^n_\alpha(\mathfrak{A}^1)$ *pour lesquels* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ *vérifie* $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_p > 0$.

Autrement dit, $H^n(\mathfrak{A}; p)$ est le module des classes de cohomologie des n-cochaînes de $\mathfrak{A}^1$ qui « dépendent effectivement » de leurs p « composantes ».

Théorème (11.1). — *Soient* $\mathfrak{A}$ *un analyseur,* I *un ensemble d'indices muni d'une structure d'ordre total. Alors :*

a. pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $H^n(\mathfrak{A}^1)$ *s'identifie canoniquement à la somme directe d'une famille de sous-modules ainsi définie : à tout entier* p *vérifiant* $1 \leq p \leq n$, *et à tout système* $\iota_1 < \ldots < \iota_p$ *de* p *éléments de* I *strictement croissants correspond un facteur direct isomorphe à* $H^n(\mathfrak{A}; p)$ *;*

b. $H^n(\mathfrak{A}; p) = 0$ *pour* $p > n$ *;*

c. $H^n(\mathfrak{A}; n)$ *s'identifie, pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$, *au module des fonctions pseudo-n-linéaires de* $\mathfrak{A}$ *;*

d. $H^3(\mathfrak{A}; 2)$ *est égal à la somme directe, pour* $r, s > 0$, *des modules* $H^3(\mathfrak{C}_{r,s})$ *vérifiant la suite exacte* (3) *du* n° 40.

Ce théorème est une conséquence immédiate de la proposition (11.3) et des résultats du n° 40. Nous n'avons pas jugé nécessaire de préciser la décomposition plus fine de $H(\mathfrak{A}^1)$ qui correspond à sa structure de module I-gradué (par rapport au I-degré-composantes).

Le théorème (11.1) détermine complètement les modules de cohomologie H^1 et H^2 d'une puissance cartésienne d'un analyseur; pour le module H^3, nous n'obtenons dans le cas général que des résultats partiels.

Rappelons que l'identification *canonique* du théorème (11.1, *a*) n'est possible que si I est *donné* comme ensemble totalement ordonné. A toute structure d'ordre total sur I correspond un sous-complexe normal de $\mathfrak{A}^1$, et il existe des isomorphismes canoniques entre ces différents sous-complexes normaux. Il

([50]) *Cf.* n° 38, form. (4).

nous suffira d'examiner le cas où I a deux éléments [*cf.* la démonstration de la proposition (11.3)].

PROPOSITION (11.4). — *Soient $\mathfrak{A}$ un analyseur, $\mathfrak{B}$ le complexe réduit normalisé du carré cartésien de $\mathfrak{A}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}'$ les deux sous-complexes normaux de $\mathfrak{B}$, de telle sorte que, pour $f(x_1, y_1; \ldots; x_{p+q}, y_{p+q}) \in \mathfrak{B}^{p+q}$, on ait $f \in \mathbb{C}^{p,q}$ (resp. $f \in \mathbb{C}'^{p,q}$) si et seulement si les arguments x_i et y_j sont neutres dans f pour $p+1 \leq i \leq p+q$ et $1 \leq j \leq p$ (resp. pour $1 \leq i \leq q$ et $q+1 \leq j \leq p+q$). Alors l'isomorphisme (canonique $\varepsilon : \mathbb{C}' \to \mathbb{C}$ applique $\mathbb{C}'^{p,q}$ sur $\mathbb{C}^{q,p}$ et, si $f(y_1, \ldots, y_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}) \in \mathbb{C}'^{p,q}$,*

$$\varepsilon f = (-1)^{pq} f(y_{q+1}, \ldots, y_{q+p}, x_1, \ldots, x_q). \tag{2}$$

En effet, ε est donné par la restriction à $\mathbb{C}'$ du projecteur h de la proposition (11.2), et la formule explicite (11) (n° 39) se simplifie et conduit à (2).

42. PRODUITS EN COHOMOLOGIE. — Dans tout ce numéro, nous désignerons par $\mathfrak{A}$ un analyseur, et par $\mathfrak{B}$ le complexe réduit normalisé de son carré cartésien.

LEMME (11.1). — *L'application $\pi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ qui à tout $f(x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n) \in \mathfrak{B}$ associe $\pi f = f(x_1, x_1; \ldots; x_n, x_n) \in \mathfrak{A}$ est un homomorphisme de complexes et définit ainsi, par restriction et passage au quotient, un homomorphisme $\pi^* : \mathrm{H}(\mathfrak{B}) \to \mathrm{H}(\mathfrak{A})$.*

DÉFINITION (11.5). — *Soit $\mathrm{T}(x_1, x_2) \in \mathfrak{A}^2$ une fonction pseudo-bilinéaire. Pour $f(x_1, \ldots, x_p) \in \mathfrak{A}^p$ et $g(x_1, \ldots, x_q) \in \mathfrak{A}^q$, nous poserons*

$$\tilde{\mathrm{T}}(f, g) = \mathrm{T}(f(x_1, \ldots, x_p), g(y_{p+1}, \ldots, y_{p+q})) \in \mathfrak{B}^{p+q}.$$

LEMME (11.2). — *Pour $f \in \mathfrak{A}^p$ et $g \in \mathfrak{A}^q$, on a*

$$\partial \tilde{\mathrm{T}}(f, g) = \tilde{\mathrm{T}}(\partial f, g) + (-1)^p \tilde{\mathrm{T}}(f, \partial g). \tag{1}$$

L'application $\tilde{\mathrm{T}}$ définit donc, par restriction et passage aux quotients, une application pseudo-bilinéaire $\tilde{\mathrm{T}}^* : \mathrm{H}(\mathfrak{A}) \times \mathrm{H}(\mathfrak{A}) \to \mathrm{H}(\mathfrak{B})$, telle que $\mathrm{H}^p(\mathfrak{A}) \times \mathrm{H}^q(\mathfrak{A})$ soit appliqué dans $\mathrm{H}^{p+q}(\mathfrak{B})$.

DÉFINITION (11.6). — *Soit $\mathrm{T}(x_1, x_2) \in \mathfrak{A}^2$ une fonction pseudo-bilinéaire. Nous définissons les applications pseudo-bilinéaires $\mathrm{T} : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ et $\mathrm{T}^* : \mathrm{H}(\mathfrak{A}) \times \mathrm{H}(\mathfrak{A}) \to \mathrm{H}(\mathfrak{A})$ en posant, pour $f \in \mathfrak{A}^p$, $g \in \mathfrak{A}^q$ et $f^* \in \mathrm{H}^p(\mathfrak{A})$, $g^* \in \mathrm{H}^q(\mathfrak{A})$*

$$\mathrm{T}(f, g) = \pi \tilde{\mathrm{T}}(f, g),$$
$$\mathrm{T}^*(f^*, g^*) = \pi^* \tilde{\mathrm{T}}^*(f^*, g^*),$$

où π, π^* désignent les homomorphismes du lemme (11.1).

Les démonstrations des lemmes (11.1) et (11.2) sont immédiates. Nous avons transcrit les définitions usuelles des produits en cohomologie ([2]), chap. XI).

Si $T(x_1, x_2)$ est *associatif*, c'est-à-dire vérifie la relation

$$T(T(x_1, x_2), x_3) = T(x_1, T(x_2, x_3)), \tag{2}$$

il est clair que T^* est également associatif.

La proposition suivante exprime la relation d'anticommutativité suggérée par le « principe de comparaison ».

Proposition (11.5). — *Soit* $T(x_1, x_2)$ *une fonction pseudo-bilinéaire dans l'analyseur* $\mathfrak{A}$. *Posons* $T'(x_1, x_2) = T(x_2, x_1)$. *Alors, pour* $f^* \in H^p(\mathfrak{A})$, $g^* \in H^q(\mathfrak{A})$, *on a*

$$T^*(g^*, f^*) = (-1)^{pq} T'^*(f^*, g^*). \tag{3}$$

Démonstration. — Soient f et g deux cocycles représentant respectivement f^* et g^*. Alors $\tilde{T}(g, f)$ et $\tilde{T}'(f, g)$ sont des représentants de $\tilde{T}^*(g^*, f^*)$ et de $\tilde{T}'^*(f^*, g^*)$. Or, d'après la proposition (11.4), $\tilde{T}'(f, g) = T(g(y_{p-1}, \ldots, y_{p+q}), f(x_1, \ldots, x_p))$ est cohomologue à $(-1)^{pq} T(g(y_1, \ldots, y_q), f(x_{q-1}, \ldots, x_{q+p}))$, et l'on a évidemment

$$\pi T(g(y_1, \ldots, y_q), f(x_{q+1}, \ldots, x_{q+p})) = \pi T(g(x_1, \ldots, x_q), f(y_{q-1}, \ldots, y_{q+p})),$$

d'où la proposition.

Corollaire. — *Si* $T(x_1, x_2) = T(x_2, x_1)$, $T^*(f^*, g^*) = (-1)^{pq} T^*(g^*, f^*)$ *pour tous* $f^* \in H^p\mathfrak{A}$ *et* $g^* \in H^q(\mathfrak{A})$.

Remarque. — Définissons l'application $\mu : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, en posant, pour $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{A}^n$,

$$\mu f = f(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in \mathfrak{B}^n.$$

Alors μ est un homomorphisme de complexes et définit, par le procédé usuel, l'homomorphisme $\mu^* : H(\mathfrak{A}) \to H(\mathfrak{B})$. Nous dirons qu'une classe de cohomologie $f^* \in H(\mathfrak{A})$ représentée par le cocycle $f(x_1, \ldots, x_n)$ est *primitive* si $\mu^* f^*$ est égal à la somme des classes de cohomologie de $f(x_1, \ldots, x_n)$ et de $f(y_1, \ldots, y_n)$, considérés tous deux comme des cocycles de $\mathfrak{B}$. Dans le cas de l'analyseur classique sur un corps Ω (*cf.* § 12), $H(\mathfrak{B})$ s'identifie à $H(\mathfrak{A}) \otimes_\Omega H(\mathfrak{A})$, et l'homomorphisme μ^* définit la structure d'*algèbre de Hopf* de $H(\mathfrak{A})$.

43. Cohomologie de l'analyseur annulaire et de l'analyseur de Kurosch. — Conformément aux considérations du numéro précédent, nous définissons l'*algèbre de cohomologie* de l'analyseur de Kurosch ou de l'analyseur annulaire sur un anneau Ω (*cf.* n° 21, ex. *a* et *b*), à partir de la fonction bilinéaire $x_1 x_2$ qui engendre ces analyseurs.

Théorème (11.2). — *L'algèbre de cohomologie de l'analyseur annulaire (resp. de l'analyseur de Kurosch) sur un anneau* Ω *est une* Ω*-algèbre associative (resp. de Kurosch) libre, non unitaire, engendrée par la classe de cohomologie du* 1*-cocycle* x_1.

Démonstration. — Le cas de l'analyseur de Kurosch se ramène à celui de l'analyseur annulaire, en considérant les différentes « dispositions des parenthèses » pour les monomes d'un même degré.

Pour démontrer le théorème concernant l'analyseur annulaire $\mathfrak{A}$, les théorèmes (9.1), (9.2) et (10.1) montrent qu'il suffit d'établir que $H^n_p(\mathfrak{A}) = 0$ pour $n \geq r$. On peut raisonner par récurrence sur r; si l'on a démontré que $H^n_p \mathfrak{A} = 0$ pour $n = s$ et $s < r$, le même résultat vaut pour les analyseurs construits à partir de $\mathfrak{A}$ par adjonctions de constantes. On utilise alors la suite spectrale des n^os 36 et 37. Il n'est pas nécessaire de faire d'hypothèse restrictive sur l'anneau de base Ω, pour la raison suivante : si $\tilde{\mathfrak{A}}^n_n$ est le module des fonctions n-linéaires de l'analyseur annulaire $\mathfrak{A}$, la représentation de l'algèbre $\Omega[\mathfrak{S}_n]$ du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ dans $\tilde{\mathfrak{A}}^n$ est isomorphe à la *représentation régulière* de cette algèbre. Il n'en est évidemment plus de même pour les analyseurs classiques, ce qui entraîne des résultats considérablement plus compliqués.

12. — Cohomologie des analyseurs classiques.

Dans ce paragraphe, il nous sera plus commode d'abandonner l'axiome (**A7**), c'est-à-dire d'admettre que les polynomes aient des *termes constants non nuls*. Nous désignerons par $\mathfrak{A}$ l'*analyseur classique à coefficients entiers rationnels*

$$\mathfrak{A} = \sum_{r \in \mathbf{N}} \mathfrak{A}^r, \qquad \text{où} \quad \mathfrak{A}^r = \mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_n],$$

et en particulier $\mathfrak{A}^0 = \mathbf{Z}$. Pour tout anneau commutatif unitaire Ω, $\Omega \otimes \mathfrak{A}$ désignera l'analyseur classique sur Ω (*cf.* n° 21). La différentielle ∂ annule les 0-cochaînes : $H^0(\Omega \otimes \mathfrak{A}) = \Omega$.

11. Cohomologie de l'analyseur classique à coefficients entiers modulo p. — D'après les théorèmes (9.1), (9.2) et (10.1), $H^n(\Omega \otimes \mathfrak{A})$ est toujours un *groupe de torsion pour $n \geq 2$*, quel que soit l'anneau Ω. Nous définissons la multiplication des cochaînes de $\Omega \otimes \mathfrak{A}$ et des classes de cohomologie de $H(\Omega \otimes \mathfrak{A})$ à partir de la fonction bilinéaire $x_1 x_2$ (associative et commutative) qui engendre $\Omega \otimes \mathfrak{A}$ (n° 12). Nous obtenons ainsi sur $H(\Omega \otimes \mathfrak{A})$ une structure d'*algèbre unitaire* (*) *graduée, associative et anticommutative*.

Soit p un nombre premier. Nous noterons F_{p^n} le corps fini à p^n éléments. Nous noterons (f_i) les 1-cochaînes de $\mathfrak{A}$ définies par

$$f_i = x_i^p \qquad \text{pour } i \in \mathbf{N}.$$

(*) Parce que nous avons introduit les constantes dans $\Omega \otimes \mathfrak{A}$ (0-cochaînes).

et (g_j) les 2-cochaînes de $\mathfrak{A}$ définies par

$$g_j = \frac{1}{p}\left((x_1 + x_2)^{p^j} - x_1^{p^j} - x_2^{p^j}\right) \qquad (\text{pour } j \in \mathbf{N}^*). \tag{12}$$

Nous avons donc

$$\partial f_i = -pg_j \quad \text{pour } j \in \mathbf{N}^* \quad \text{et} \quad \partial f_0 = 0; \tag{13}$$

$$\partial g_j = 0 \quad \text{pour } j \in \mathbf{N}^*. \tag{14}$$

Théorème (12.1). — *L'algèbre de cohomologie* $\mathrm{H}(\mathrm{F}_p \otimes \mathfrak{A})$ *est engendrée par les générateurs définis ci-dessous, qui ne sont liés par aucune autre relation que celles résultant de l'associativité et de l'anticommutativité :*

a. Si p est impair, les générateurs libres sont les classes $(\xi_i)_{i \in \mathbf{N}}$ *et* $(\tau_{ij})_{j \in \mathbf{N}}$, *des images canoniques dans* $\mathrm{F}_p \otimes \mathfrak{A}$ *des cochaînes* (f_i) *et* (g_j);

b. Si $p = 2$, *les générateurs libres sont les classes* $(\xi_i)_{i \in \mathbf{N}}$ *des images canoniques dans* $\mathrm{F}_2 \otimes \mathfrak{A}$ *des cochaînes* (f_i).

Autrement dit, pour n impair $\mathrm{H}(\mathrm{F} \otimes \mathfrak{A})$ est le produit tensoriel de l'algèbre extérieure construite sur les (ξ_i) par l'algèbre symétrique construite sur les (τ_{ij}): pour $p = 2$, $\mathrm{H}(\mathrm{F}_2 \otimes \mathfrak{A})$ est l'algèbre symétrique construite sur les (ξ_i). Toutes ces algèbres sont supposées unitaires.

Démonstration. — Pour tout $h \in \mathbf{N}^*$, nous noterons $\mathrm{H}(\mathrm{F}_{p^h}, \mathrm{F}_{p^h})$ l'*algèbre de cohomologie* de F_{p^h}, considéré comme *groupe additif*, opérant trivialement sur F_{p^h} (considéré comme *anneau*). Nous admettrons les résultats suivants :

a. Si p est impair, $\mathrm{H}(\mathrm{F}_{p^h}, \mathrm{F}_{p^h})$ s'identifie au produit tensoriel d'une algèbre extérieure construite sur des générateurs $(a_i)_{1, \ldots, h}$ par une algèbre symétrique construite sur des générateurs $(b_j)_{1, \ldots, h}$; les (a_i) sont de degré 1 et les (b_j) de degré 2;

b. Si $p = 2$, $\mathrm{H}(\mathrm{F}_{2^h}, \mathrm{F}_{2^h})$ s'identifie à une algèbre symétrique construite sur des générateurs $(a_i)_{1 \leq i \leq h}$, de degré 1.

Ces résultats s'obtiennent facilement en utilisant des complexes particuliers aux groupes cycliques et à leurs produits directs (*cf.* [2], chap. XII, § 7). On pourrait les retrouver à l'aide des « complexes non homogènes », ce qui va nous permettre d'appliquer notre principe de comparaison.

Définissons comme suit une application

$$\varphi : \mathrm{H}(\mathrm{F}_p \otimes \mathfrak{A}) \to \mathrm{H}(\mathrm{F}_{p^h}, \mathrm{F}_{p^h});$$

si $\zeta \in \mathrm{H}^n(\mathrm{F}_p \otimes \mathfrak{A})$ est représenté par la n-cochaîne

$$f(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathrm{F}_p \otimes \mathfrak{A})^n = \mathrm{F}_p[x_1, \ldots, x_n],$$

nous considérons f comme une fonction polynome dans F_{p^h} [1], c'est-à-dire comme une n-cochaîne dans le complexe non homogène $\mathrm{C}(\mathrm{F}_{p^h}, \mathrm{F}_{p^h})$, et nous

prenons sa classe de cohomologie $\varphi(\zeta) \in H(F_{p^h}, F_{p^h})$. D'après les définitions des produits, φ est un *homomorphisme d'algèbres*, à condition de restreindre à F_p le corps de base de $H(F_{p^h}, F_{p^h})$.

On sait qu'un polynome non nul à coefficients dans F_{p^h} peut correspondre à une fonction polynome nulle dans ce corps. On peut obvier à cet inconvénient en considérant des polynomes *h-réduits*, c'est-à-dire de degré strictement inférieur à p^h par rapport à chacune de leurs indéterminées. Un polynome $f(x_1, \ldots, x_n) \in F_{p^h}[x_1, \ldots, x_n]$ est congru à un polynome h-réduit et un seul modulo l'idéal $(x_1^{p^h} - x_1, \ldots, x_n^{p^h} - x_n)$. Si f est h-réduit, ∂f l'est aussi.

Supposons p impair, et soit, pour un certain $h \in \mathbf{N}^*$,

$$\varphi : H(F_p \otimes \mathfrak{A}) \to H(F_{p^h}, F_{p^h})$$

l'homomorphisme défini plus haut. Les remarques précédentes permettent d'établir facilement que les $\frac{1}{2} h(h+3)$ éléments

$$\varphi(\xi_i)_{0 \leq i \leq h-1}, \quad \varphi(\tau_{ij})_{1 \leq i < j \leq h}, \quad \varphi(\xi_i \xi_{i'})_{0 \leq i < i' < h}$$

sont *linéairement indépendants sur* F_{p^h} [les éléments (ξ_i) et (τ_{ij}) sont ceux de l'énoncé du théorème]. Nous en déduisons qu'en posant

$$\varphi(\xi_i) = a_i \quad (0 \leq i \leq h-1) \qquad \text{et} \qquad \varphi(\tau_j) = b_j \quad (1 \leq j \leq h),$$

les (a_i) et les (b_j) constituent un système de *générateurs libres* de la F_{p^h}-algèbre $H(F_{p^h}, F_{p^h})$. Par conséquent, puisque h est quelconque, la famille d'éléments $(\xi_i)_{i \in \mathbf{N}}$ et $(\tau_{ij})_{j \in \mathbf{N}}$ est *libre* dans $(F_p \otimes \mathfrak{A})$. Il reste à montrer que les (ξ_i) et les (τ_{ij}) *engendrent* cette algèbre. Or, soit $\zeta \in H(F_p \otimes \mathfrak{A})$ représenté par une n-cochaîne $f(x_1, \ldots, x_n) \in F_p[x_1, \ldots, x_n]$. Choisissons h assez grand pour que f soit h-réduit. Comme toute cochaîne du complexe $C(F_{p^h}, F_{p^h})$ peut être représentée par une fonction polynome, l'algèbre $H(F_{p^h}, F_{p^h})$ s'identifie au produit tensoriel $F_{p^h} \otimes_{F_p} \varphi H(F_p \otimes \mathfrak{A})$. Par conséquent, $\varphi(\zeta)$ est contenu dans la *sous-F_p-algèbre* de $H(F_{p^h}, F_{p^h})$ engendrée par les $\varphi(\xi_i)_{0 \leq i < h}$ et les $\varphi(\tau_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$. Autrement dit, $\varphi(\zeta) = \varphi(\zeta')$, où ζ' est une somme de monomes en les (ξ_i) et les (τ_{ij}). Nous pouvons choisir comme représentant de ζ' la cochaîne $f'(x_1, \ldots, x_n)$, image canonique dans $F_p \otimes \mathfrak{A}$ de la somme des monomes correspondants en les (f_i), (g_j); f' est ainsi *h-réduit*. La relation $\varphi(\zeta') = \varphi(\zeta)$ signifie qu'il existe une $(n-1)$-cochaîne $g(x_1, \ldots, x_{n-1})$, telle que l'on ait

$$f - f' \equiv \partial g \pmod{(x_1^{p^h} - x_1, \ldots, x_n^{p^h} - x_n)}.$$

Or, puisque f et f' sont h-réduits, il suffit de prendre g h-réduit pour avoir $f - f' = \partial g$, ce qui prouve que ζ est dans la sous-algèbre de $H(F_p \otimes \mathfrak{A})$ engendrée par les $(\xi_i)_{0 \leq i \leq h-1}$ et les $(\tau_{ij})_{1 \leq j \leq h}$.

Pour $p = 2$, le théorème se démontre de la même manière.

Remarques. — *a.* Si l'on avait conservé la définition des (η_{ij}) pour $p=2$, il aurait fallu introduire les relations $\eta_{ij}=\xi^2_{j-1}$, pour $j\in\mathbf{N}^*$.

b. Les (ξ_i) et les (η_{ij}) sont des classes de cohomologie *primitives* de $\mathrm{H}(\mathrm{F}_p\otimes\mathfrak{A})$ pour p impair. Cette propriété, dont la vérification est immédiate, ne résulte pas de la démonstration que nous avons donnée, car il nous était indifférent de savoir si les générateurs (b_j) de degré 2 des algèbres $\mathrm{H}(\mathrm{F}_{p^h},\ \mathrm{F}_{p^k})$ étaient choisis primitifs.

15. Cohomologie des analyseurs classiques. — Désignons par π l'endomorphisme de $\mathfrak{A}$ défini par la multiplication par p. L'analyseur $\mathrm{F}_p\otimes\mathfrak{A}$ s'obtient à partir de $\mathfrak{A}$ en « réduisant les coefficients mod p », c'est-à-dire en passant au quotient, et nous avons la *suite exacte*

$$0\to\mathfrak{A}\xrightarrow{\pi}\mathfrak{A}\xrightarrow{\mu}\mathrm{F}_p\otimes\mathfrak{A}\to 0. \tag{1}$$

Si nous passons à la cohomologie, nous obtenons la *suite exacte* (52) :

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{H}(\mathfrak{A}) & \xrightarrow{\pi^*} & \mathrm{H}(\mathfrak{A}) \\ & {\scriptstyle\Delta}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle\mu} & \\ & \mathrm{H}(\mathrm{F}_p\otimes\mathfrak{A}) & \end{array} \tag{2}$$

ou, en tenant compte des degrés,

$$\ldots\to\mathrm{H}^n(\mathfrak{A})\xrightarrow{\pi^*_n}\mathrm{H}^n(\mathfrak{A})\xrightarrow{\mu^*_n}\mathrm{H}^n(\mathrm{F}_p\otimes\mathfrak{A})\xrightarrow{\Delta_n}\mathrm{H}^{n+1}(\mathfrak{A})\to\ldots \tag{3}$$

L'application μ^* est un homomorphisme d'algèbres.

Proposition (12.1). — *Pour tout nombre premier p, les éléments non nuls de la p-composante de* $\mathrm{H}(\mathfrak{A})$ *sont d'ordre p.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que $\mathrm{H}(\mathfrak{A})$ n'a pas d'éléments d'ordre p^2. Or si $\zeta\in\mathrm{H}(\mathfrak{A})$ est d'ordre p^2, $\zeta'=p\zeta\in\operatorname{Im}\pi^*\cap\operatorname{Noy}\pi^*$ et $\zeta'\neq 0$. Réciproquement, si $\zeta'\neq 0$ appartient à $\operatorname{Im}\pi^*\cap\operatorname{Noy}\pi^*$, il existe ζ tel que $\zeta'=p\zeta$ et ζ est d'ordre p^2.

D'après la suite exacte (2), la relation $\operatorname{Im}\pi^*\cap\operatorname{Noy}\pi^*=0$ équivaut à

$$\operatorname{Im}\Delta\cap\operatorname{Noy}\mu^*=0.$$

Posons $\mathrm{D}=\mu^*\Delta$; D *est un endomorphisme de carré nul du module* $\mathrm{H}(\mathrm{F}_p\otimes\mathfrak{A})$, et la relation $\operatorname{Im}\Delta\cap\operatorname{Noy}\mu^*=0$ équivaut à $\operatorname{Noy}\mathrm{D}=\operatorname{Noy}\Delta$. Or nous avons

$$\operatorname{Im}\mathrm{D}\subset\operatorname{Noy}\Delta\subset\operatorname{Noy}\mathrm{D}, \tag{4}$$

ce qui nous conduit à calculer la *cohomologie du complexe* $\mathrm{H}(\mathrm{F}_p\otimes\mathfrak{A})$ *muni de la différentielle* D.

(52) Il s'agit d'un couple exact au sens de Massey (*Ann. Mat.*, t. 56, 1952, p. 363-396).

Nous conserverons les notations du théorème (12.1). *Supposons d'abord p impair.* Soit

$$\zeta = \xi_{i_1} \dots \xi_{i_q} \eta_{j_1}^{n_1} \dots \eta_{j_r}^{n_r} \in \mathrm{H}(\mathrm{F}_p \otimes \mathfrak{A}),$$

avec $i_1 < \dots < i_q \in \mathrm{N}$, $j_1 < \dots < j_r \in \mathrm{N}^*$, $n_1, \dots, n_r \in \mathrm{N}^*$. Pour calculer $\Delta\zeta$, il faut prendre $h \in \mathfrak{A}$ tel que ζ soit la classe de cohomologie de μh, puis calculer la classe de cohomologie de $\frac{1}{p}\delta h$. Nous pouvons prendre $h = f_{i_1} \dots f_{i_q} g_{j_1}^{n_1} \dots g_{j_r}^{n_r}$ (où les puissances sont calculées au sens de la multiplication des cochaînes), et nous obtenons [*cf.* (3), (4), n° 43]

$$\mathrm{D}\zeta = \sum_{1 \leq k \leq q} (-1)^k \xi_{i_1} \dots \xi_{i_{k-1}} \eta_{i_k} \xi_{i_{k+1}} \dots \xi_{i_q} \eta_{j_1}^{n_1} \dots \eta_{j_r}^{n_r}, \tag{5}$$

où nous posons $\eta_{i0} = 0$. La différentielle D est une antidérivation de $\mathrm{H}(\mathrm{F}_p \otimes \mathfrak{A})$.

Désignons par E la sous-algèbre unitaire de $\mathrm{H}(\mathrm{F}_p \otimes \mathfrak{A})$ engendrée par les (ξ_j) et les (η_j) pour $j \in \mathrm{N}^*$; E est un *sous-complexe*, et nous avons une décomposition en somme directe

$$\mathrm{H}(\mathrm{F}_p \otimes \mathfrak{A}) = \mathrm{E} + \xi_0 \mathrm{E}, \tag{6}$$

avec

$$\mathrm{D}(\xi_0 \zeta) = \xi_0 \mathrm{D}(\zeta) \quad \text{pour} \quad \zeta \in \mathrm{E}. \tag{7}$$

Le complexe E avec sa différentielle D donnée par (5) se rattache au « *complexe standard* » *d'une algèbre de Lie abélienne de dimension dénombrable sur le corps* F_p (*cf.* [2], chap. VIII, § 4 et chap. XIII, § 7, ainsi que le lemme (10.1) ci-dessus).

La différence entre le complexe E et le complexe standard en question est la suivante : les éléments $(\eta_{ij})_{j \in \mathrm{N}^*}$ ont ici le degré 2 au lieu du degré 0, ce qui fait que la différentielle D est de degré $+1$ au lieu de -1.

Cela ne change évidemment rien aux propriétés d'acyclicité du complexe E, que nous allons rappeler.

L'*augmentation* ε du complexe E est définie en posant $\varepsilon(1) = 1$ et $\varepsilon(\zeta) = 0$ pour tout monome $\zeta (\neq 1)$ en les (ξ_j), (η_{ij}). Définissons l'*homotopie* s de E en posant $s(1) = 0$, et, pour

$$\zeta = \eta_{j_1}^{n_1} \xi_{j_1}^{\alpha_1} \dots \eta_{j_q}^{n_q} \xi_{j_q}^{\alpha_q},$$

avec

$$j_1 < \dots < j_q \in \mathrm{N}^*, \quad n_k \in \mathrm{N} \quad \alpha_k = 0 \text{ ou } 1, \quad n_k + \alpha_k > 0 \quad (\text{pour } 1 \leq k \leq q),$$
$$\begin{cases} s\zeta = 0 & \text{si} \quad \alpha_1 = 1, \\ s\zeta = -\eta_{j_1}^{n_1 - 1} \xi_{j_1} \eta_{j_2}^{n_2} \xi_{j_2}^{\alpha_2} \dots \eta_{j_q}^{n_q} \xi_{j_q}^{\alpha_q} & \text{si} \quad \alpha_1 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

On vérifie sans peine que $\mathrm{D}s + s\mathrm{D} = \mathbf{1} - \varepsilon$. Si $\zeta = \zeta_1 + \xi_0 \zeta_2 \in \mathrm{Noy}\,\mathrm{D}$, avec

$$\zeta_1, \zeta_2 \in \mathrm{E}, \quad \zeta = \mathrm{D}s\zeta_1 + \xi_0 \mathrm{D}s\zeta_2 + \varepsilon\zeta_1 + \xi_0 \varepsilon\zeta_2, \quad \text{d'où} \quad \zeta \in \mathrm{Noy}\,\Delta$$

Soit maintenant $p = 2$. Calculons la différentielle $\mathrm{D} = \mu^* \Delta$ du complexe $\mathrm{H}(\mathrm{F}_2 \otimes \mathfrak{A})$.

Pour

$$\zeta = \xi_{i_1}^{n_1} \dots \xi_{i_q}^{n_q} \in \mathrm{H}(\mathrm{F}_2 \otimes \mathfrak{A}), \qquad \text{avec} \quad i_1 < \dots < i_q \in \mathbf{N}, \qquad n_1, \dots, n_q \in \mathbf{N}^*,$$

nous obtenons (*cf.* n° 44, remarque *a*)

$$\mathrm{D}\zeta = \sum_{1 \leq k \leq q} n_k \xi_{i_1}^{n_1} \dots \xi_{i_k}^{n_k - 1} \eta_{i_k} \xi_{i_{k+1}}^{n_{k+1}} \dots \xi_{i_q}^{n_q}, \tag{9}$$

où nous posons $\xi_{-1} = 0$.

La différentielle D est une dérivation que nous pouvons écrire

$$\mathrm{D} = \sum_{i \in \mathbf{N}^*} \eta_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}.$$

Définissons l'*augmentation* ε de $\mathrm{H}(\mathrm{F}_2 \otimes \mathfrak{A})$ en posant

$$\varepsilon(1) = 1, \qquad \varepsilon(\xi_0) = \xi_0, \qquad \varepsilon(\zeta) = 0$$

pour tout monome $\zeta (\neq 1, \xi_0)$ en les (ξ_i). Définissons l'*homotopie* s en posant $s(1) = 0$ et

$$\begin{cases} s\xi_0^{n_0} \dots \xi_{i-1}^{n_{i-1}} \xi_i = 0 & \text{pour} \quad n_0, \dots, n_{i-1} \subset \mathbf{N}^*, \\ s\xi_0^{n_0} \dots \xi_{i-1}^{n_{i-1}} \xi_i^{n_i} = \xi_0^{n_0} \dots \xi_{i-1}^{n_{i-1}} \xi_i^{n_i - 1} \xi_{i+1} & \text{pour} \quad n_0, \dots, n_i \in \mathbf{N}^*, \ n_i \geq 2. \end{cases} \tag{10}$$

On vérifie facilement que $\mathrm{D}s + s\mathrm{D} = \mathbf{1} - \varepsilon$. Si $\zeta \in \mathrm{Noy}\mathrm{D}$, $\zeta = \mathrm{D}s\zeta + \varepsilon\zeta$ et, par conséquent, $\zeta \in \mathrm{Noy}\Delta$, ce qui achève de démontrer la proposition (12.1).

Nous noterons ${}_p\mathrm{H}(\mathfrak{A})$ la p-composante de $\mathrm{H}(\mathfrak{A})$. La proposition (12.1) signifie que la restriction de μ^* à ${}_p\mathrm{H}(\mathfrak{A})$ est un *monomorphisme*. Comme $\Delta\mathrm{H}(\mathrm{F}_p \otimes \mathfrak{A}) \subset {}_p\mathrm{H}(\mathfrak{A})$, le noyau de Δ, c'est-à-dire d'après (2) l'image de μ^*, coïncide avec le noyau de D.

Nous noterons $\mathrm{Z}_r^n(\mathrm{H}(\mathrm{F}_p \otimes \mathfrak{A}))$ le module des n-cocycles du complexe $\mathrm{H}(\mathrm{F}_p \otimes \mathfrak{A})$ qui sont homogènes de degré total r lorsque l'on attribue aux générateurs ξ_i et η_i le degré p^i (pour tout $i \in \mathbf{N}$).

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant qui résume les résultats obtenus.

THÉORÈME (12.2). — *Pour tous $n \in \mathbf{N}^*$ et $r \geq 2$, le module $\mathrm{H}_r^n(\mathfrak{A})$ s'identifie canoniquement à la somme directe*

$$\sum_{p \text{ premier}} \mathrm{Z}_r^n(\mathrm{H}(\mathrm{F}_p \otimes \mathfrak{A})) \simeq \mathrm{H}_r^n(\mathfrak{A}).$$

Pour chaque p composante, l'identification est donnée par l'homomorphisme μ^* de (2), et est donc compatible avec la structure multiplicative.

Si maintenant Ω est un anneau commutatif unitaire quelconque, $\mathrm{H}(\Omega \otimes \mathfrak{A})$ se calcule suivant la *formule de Künneth* : on obtient canoniquement les suites

exactes qui se décomposent en sommes directes

$$(11)\qquad 0\to\Omega\otimes \mathrm{H}_r^n(\mathfrak{A})\to \mathrm{H}_r^n(\Omega\otimes\mathfrak{A})\to \mathrm{Tor}_1(\Omega,\ \mathrm{H}_r^{n+1}(\mathfrak{A}))\to 0.$$

Plus simplement, si l'on désigne par ${}_p\Omega$ la p-composante de Ω (qui est un idéal) et par Ω_p l'anneau quotient $\Omega/{}_p\Omega$ (p premier), on a la décomposition valable pour $r\geq 2$

$$(12)\qquad \mathrm{H}_r^n(\Omega\otimes\mathfrak{A})\simeq \sum_{p\text{ premier}} (\Omega_p\otimes {}_p\mathrm{H}_r^n(\mathfrak{A})+{}_p\Omega\otimes {}_p\mathrm{H}_r^{n+1}(\mathfrak{A})).$$

Dans (11) et (12), les produits tensoriels ainsi que le foncteur Tor_1 sont calculés sur l'anneau Z; dans (12) les facteurs $\Omega_p\otimes {}_p\mathrm{H}_r^n(\mathfrak{A})$ sont obtenus *canoniquement* comme sous-groupes de $\mathrm{H}_r^n(\Omega\otimes\mathfrak{A})$.

Les groupes $\mathrm{H}_r^n(\mathfrak{A})$ ne s'explicitent pas d'une manière simple à partir de n et de r : ils dépendent, en effet, des décompositions de l'entier r comme *somme de puissances d'un même nombre premier*.

Aussi est-il plus naturel de se donner un nombre premier p et de chercher pour quelles valeurs de r les p-composantes ${}_p\mathrm{H}_r^n(\mathfrak{A})$ ne sont pas nulles. Les résultats suivants sont une traduction du théorème (12.2) pour $n=2$, 3, 4, où nous conservons les notations (f_i), (g_i) pour les cochaînes définies à partir de p [n° 44, (1) et (2)]

(13) ${}_p\mathrm{H}_r^3(\mathfrak{A})=0$ *si r n'est pas une puissance entière (>1) de p, si $r=p^i$, $i\in\mathbf{N}^*$, ${}_p\mathrm{H}_r^3(\mathfrak{A})\simeq \mathrm{F}_p$ est engendré par la classe du cocycle g_i;*

(14) ${}_p\mathrm{H}_r^3(\mathfrak{A})=0$ *si r n'est pas somme de deux puissances distinctes de p; si $r=p^i+p^j$, $0\leq i<j$, ${}_p\mathrm{H}_r^3(\mathfrak{A})\simeq \mathrm{F}_p$ est engendré par la classe du cocycle $f_ig_j-f_jg_i$;*

(15) ${}_p\mathrm{H}_r^4(\mathfrak{A})=0$ *si r n'est pas somme de deux puissances entières (>1) de p, ou somme de trois puissances entières distinctes; si $r=p^i+p^j$, $1\leq i\leq j$, ${}_p\mathrm{H}_r^4(\mathfrak{A})\simeq \mathrm{F}_p$ est engendré par la classe du cocycle g_ig_j;*

si $r=p^i+p^j+p^k$, $0\leq i<j<k$, ${}_p\mathrm{H}_r^4(\mathfrak{A})\simeq \mathrm{F}_p$ est engendré par la classe du cocycle $g_if_jf_k-f_ig_jf_k+f_if_jg_k$.

CHAPITRE IV.

Applications de la cohomologie à l'étude des lois de groupes.

Dans tout ce chapitre il ne sera question que d'analyseurs complets. Les modules de cohomologie seront définis, conformément au n° 31, pour les analyseurs incomplets associés.

13. — Obstructions.

46. Obstructions des bourgeons. — Soit $\mathfrak{A}$ un analyseur. Pour tout $f(x,y)\in\mathfrak{A}^2$, nous poserons

$$(1)\qquad (\Gamma f)(x,y,z)=f(f(x,y),z)-f(x,f(y,z)),$$

et nous désignerons, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, par $(\Gamma_r f)(x, y, z)$ la composante homogène de degré total r de $(\Gamma f)(x, y, z)$.

DÉFINITION (13.1). — *Soient $\mathfrak{A}$ un analyseur et $f(x, y) \in \mathfrak{A}^2$. Nous dirons que f détermine un r-bourgeon ($r \in \mathbb{N}^*$) si f vérifie les conditions :*

a. $(\Gamma f)(x, y, z) \equiv 0$ [mod. deg. $(r+1)$];

b. $f(x, y) \equiv x + y$ (mod. deg. 2).

Le r-bourgeon déterminé par f est constitué par l'ensemble des fonctions congrues à f [mod. deg. $(r+1)$].

Le r-bourgeon déterminé par f sera dit abélien si $f(x, y) \equiv f(y, x)$ [mod. deg. $(r+1)$].

Autrement dit, un r-bourgeon est une *loi de groupe dans l'analyseur nilpotent obtenu à partir de $\mathfrak{A}$ par passage au quotient*, en annulant toutes les fonctions de degré total $> r$ [*cf.* déf. (3.4) et (5.1)].

On peut choisir un représentant canonique dans chaque classe de fonctions déterminant un même r-bourgeon : il suffit de prendre la fonction dont toutes les composantes homogènes de degré total $> r$ sont nulles.

DÉFINITION (13.2). — *Dans un analyseur $\mathfrak{A}$, nous dirons qu'un r'-bourgeon prolonge un r-bourgeon si $r' \geq r$ et si toute fonction qui détermine le r'-bourgeon détermine le r-bourgeon. Nous dirons de même qu'une loi de groupe prolonge un r-bourgeon si elle le détermine.*

On est conduit naturellement à la notion de bourgeon et au problème du prolongement des bourgeons lorsque l'on cherche à construire une loi de groupe en calculant successivement ses composantes homogènes pour le degré total : la somme des composantes homogènes de degré $\leq r$ doit déterminer un r-bourgeon, qu'il faut prolonger en un $(r+1)$-bourgeon si l'on veut poursuivre la construction de la loi de groupe.

LEMME (13.1). — *Soient $\mathfrak{A}$ un analyseur, $f(x, y) \in \mathfrak{A}^2$ une fonction déterminant un r-bourgeon. Alors $(\Gamma_{r+1} f)(x, y, z)$ est un 3-cocycle.*

Démonstration. — Il faut montrer que $(\partial \Gamma_{r+1} f)(x, y, z, t) = 0$. Comme

$$(\Gamma f)(x, y, z) \equiv (\Gamma_{r+1} f)(x, y, z) \quad [\text{mod. deg. } (r+2)],$$

il revient au même de montrer que

$$(\partial \Gamma f)(x, y, z, t) \equiv 0 \quad [\text{mod. deg. } (r+2)].$$

D'après la définition (8.1) de ∂, cette dernière relation s'écrit

$$(2) \qquad (\Gamma f)(y, z, t) - (\Gamma f)(x+y, z, t) + (\Gamma f)(x, y+z, t) - (\Gamma f)(x, y, z+t) + (\Gamma f)(x, y, z) \equiv 0 \quad [\text{mod. deg. } (r+2)].$$

Comme

$$f(x, y) \equiv x + y \pmod{\text{deg. } 2} \qquad \text{et} \qquad (\Gamma f)(x, y, z) \equiv 0 \ [\text{mod. deg. } r+2)],$$

nous pouvons remplacer (2) par la relation équivalente, d'après la proposition (3.1),

$$(3)\quad (\Gamma f)(y, z, t) - (\Gamma f)(f(x, y), z, t) + (\Gamma f)(x, f(y, z), t) - (\Gamma f)(x, y, f(z, t)) + (\Gamma f)(x, y, z) \equiv 0 \quad [\text{mod. deg. } (r+2)].$$

Développons le premier membre de (3) d'après la définition (1) de Γf : nous obtenons une somme de dix termes, qui se réduisent à huit après suppression de deux termes égaux à $\pm f(f(x, y), f(z, t))$. Après regroupement, le premier membre de (3) s'écrit

$$(4)\quad f(x, f(y, f(z, t))) - f(y, f(z, t)) - f(x, f(f(y, z), t)) + f(f(y, z), t) + f(f(x, f(y, z)), t) - f(x, f(y, z)) - f(f(f(x, y), z), t) + f(f(x, y), z).$$

Posons $g(x, y) = f(x, y) - x - y$; (4) s'écrit alors

$$(5)\quad g(x, f(y, f(z, t))) - g(x, f(f(y, z), t)) + g(f(x, f(y, z)), t) - g(f(f(x, y), z), t).$$

Comme $g(x, y) \equiv 0 \pmod{\text{deg. } 2}$, la proposition (3.1) montre que (5), c'est-à-dire le premier membre de (3), est congru à 0 [mod. deg. $(r+2)$].

Lemme (13.2). — *Soient $\mathfrak{A}$ un analyseur, $f(x, y) \in \mathfrak{A}^2$ une fonction déterminant un r-bourgeon, $h(x, y) \in \mathfrak{A}^2_{r+1}$. Posons $f' = f + h$. Alors*

$$(6)\qquad (\Gamma_{r+1} f')(x, y, z) = (\Gamma_{r+1} f)(x, y, z) - (\delta h)(x, y, z).$$

Démonstration. — Posons, comme précédemment,

$$f(x, y) \equiv x + y + g(x, y), \qquad \text{d'où} \qquad g(x, y) \equiv 0 \pmod{\text{deg. } 2}.$$

Nous avons

$$f'(f'(x, y), z) = f'(x, y) + z + g(f'(x, y), z) + h(f'(x, y), z),$$

d'où, en appliquant la proposition (3.1),

$$(7)\quad f'(f'(x, y), z) \equiv f(f(x, y), z) + h(x, y) + h(x + y, z) \quad [\text{mod. deg. } (r+2)].$$

On établit, de même,

$$(8)\quad f'(x, f'(y, z)) \equiv f(x, f(y, z)) + h(y, z) + h(x, y + z) \quad [\text{mod. deg. } (r+2)].$$

Les relations (7) et (8) impliquent (6).

Grâce aux deux lemmes précédents, nous pouvons énoncer la

Proposition (13.1). — *L'ensemble des fonctions $(\Gamma_{r+1} f)(x, y, z)$, où f parcourt une classe de fonctions déterminant un même r-bourgeon dans un analyseur $\mathfrak{A}$, constitue une classe de cohomologie de $\mathrm{H}^3_{r+1}(\mathfrak{A})$, que nous appellerons*

l'obstruction du r-bourgeon. Pour qu'un r-bourgeon soit prolongeable en un $(r+1)$*-bourgeon, il faut et il suffit que son obstruction soit nulle.*

Voici un *exemple de bourgeon ayant une obstruction non nulle.* Dans l'analyseur classique à coefficients entiers mod 2 (*cf.* n° 44), la fonction

$$f(x, y) = x + y + xy^2$$

détermine un 4-bourgeon, car $(\Gamma f)(x, y, z) = xy^2z^2 - xy^2z^4$, et la classe de cohomologie représentée par xy^2z^2 n'est pas nulle (avec les notations du n° 44, elle est égale à $\xi_0\xi_1^2$).

Proposition (13.2). — *Soit* $\mathfrak{A}$ *un analyseur. Pour qu'une fonction*

$$f(x, y) = x + y + a(x, y),$$

où $a(x, y) \in \mathfrak{A}_2^2$, *détermine un 2-bourgeon, il faut et il suffit que* $a(x, y)$ *soit bilinéaire. Si* $a(x, y)$ *est bilinéaire, une condition nécessaire pour que le 2-bourgeon déterminé par f ait une obstruction nulle est que la fonction* $b(x, y) = a(x, y) - a(y, x)$ *soit un crochet de Lie.*

Démonstration. — Nous avons, d'après le lemme (13.2),

$$(\Gamma_2 f)(x, y, z) = -(\partial a)(x, y, z)$$

d'où la première partie de la proposition. Si $a(x, y)$ est bilinéaire nous obtenons

$$(\Gamma f)(x, y, z) = a(a(x, y), z) - a(x, a(y, z)) = (\Gamma a)(x, y, z). \tag{9}$$

Pour que l'obstruction soit nulle, il est nécessaire, d'après le théorème (9.2), que l'antisymétrisé de Γa soit nul. L'antisymétrisé de Γa apparaît comme une somme de 12 fonctions, à laquelle on peut donner une forme plus simple en posant $b(x, y) = a(x, y) - a(y, x)$; l'antisymétrisé de Γa s'écrit alors

$$b(b(x, y), z) + b(b(y, z), x) + b(b(z, x), y).$$

Nous avons ainsi retrouvé la proposition (5.2) sans utiliser l'identité de P. Hall.

47. Obstructions des transmutations; problèmes de prolongement.

Lemme (13.3). — *Soient* $\mathfrak{A}$ *un analyseur,* $f(x, y) \in \mathfrak{A}^2$ *vérifiant*

$$f(x, y) \equiv x + y \pmod{\text{deg. } 2}, \qquad \varphi(x) \in G_1(\mathfrak{A}), \qquad a_r(x) \in \mathfrak{A}_r^1 \quad (r \geqq 2).$$

Posons

$$\varphi'(x) = \varphi(x) + a_r(x).$$

Alors

$$f^{\varphi'}(x, y) \equiv f^{\varphi}(x, y) - (\partial a_r)(x, y) \quad [\text{mod. deg. } (r+1)]. \tag{1}$$

Démonstration. — Nous avons, par définition (*cf.* n^{os} 23, 24),

$$f^{\varphi}(x, y) = \varphi^{r}(f(\varphi^{r-1}(x), \varphi^{r-1}(y))) = \varphi(f(\varphi^{r-1}(x), \varphi^{r-1}(y))) + a_r(f(\varphi^{r-1}(x), \varphi^{r-1}(y))).$$

Or [*cf.* prop. (5.4)]

$$\varphi^{r-1}(x) \equiv \varphi^{-1}(x) - a_r(x) \qquad [\text{mod. deg. } (r+1)],$$

d'où, puisque $f(x, y) \equiv x + y$ (mod. deg. 2),

$$f(\varphi^{r-1}(x), \varphi^{r-1}(y)) \equiv f(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) - a_r(x) - a_r(y) \qquad [\text{mod. deg. } (r+1)],$$

et

$$(2) \qquad \varphi(f(\varphi^{r-1}(x), \varphi^{r-1}(y))) \equiv f^{\varphi}(x, y) - a_r(x) - a_r(y) \qquad [\text{mod. deg. } (r+1)].$$

De même,

$$(3) \qquad a_r(f(\varphi^{r-1}(x), \varphi^{r-1}(y))) \equiv a_r(x + y) \qquad [\text{mod. deg. } (r+1)].$$

Les relations (2) et (3) impliquent (1).

Nous sommes maintenant en mesure de formuler les *problèmes de prolongement* des transmutations et des bourgeons.

Soient $f(x, y)$ et $g(x, y)$ deux lois de groupes dans un analyseur $\mathfrak{A}$. Pour démontrer que f et g sont équivalentes, il faut construire $\varphi(x) \in G(\mathfrak{A})$ tel que $f^{\varphi} = g$ [déf. (5.4)]. Si nous transmutons d'abord f par une fonction de $GL(\mathfrak{A})$, nous nous ramenons au problème de l'équivalence *restreinte*. Écrivons donc

$$(4) \qquad \varphi(x) = x + \sum_{2 \leq i < \omega} a_i(x), \qquad \text{où} \quad a_i(x) \in \mathfrak{A}_i^1.$$

Cherchons à déterminer successivement les fonctions $a_i(x)$, et posons pour $r \geq 2$

$$(5) \qquad \varphi_r(x) = x + \sum_{2 \leq i < r} a_i(x).$$

Supposons choisie la fonction φ_r; pour que nous puissions prolonger $\varphi_r(x)$ en $\varphi(x)$ tel que $f^{\varphi} = g$, il est nécessaire que

$$(6) \qquad f^{\varphi_r} = g \qquad \text{mod. deg. } (r+1)].$$

Supposons cette condition remplie. Soit $b_{r+1}(x, y)$ la composante homogène de degré total $(r+1)$ de $g - f^{r}$. D'après le lemme (13.2), $b_{r+1}(x, y)$ est un 2-cocycle et représente, par conséquent, une classe de cohomologie de $H^2_{r+1}(\mathfrak{A})$ que nous appellerons l'*obstruction* de φ_r (par rapport aux lois f et g).

Pour que l'on puisse trouver $a_{r+1}(x) \in \mathfrak{A}^1_{r+1}$, tel que $f^{\varphi_{r+1}} \equiv g$ [mod. deg. $(r+2)$], il faut et il suffit que l'obstruction de φ_r soit nulle, d'après le lemme (13.3).

Si l'obstruction de φ_r est nulle, $a_{r+1}(x)$ est déterminé à l'addition près d'une fonction pseudo-linéaire (1-cocycle).

Le prolongement de φ_r en φ_{r+1} *peut donc être impossible* (si l'obstruction n'est

pas nulle) *ou indéterminé* (si l'obstruction est nulle, mais si $H^1_{r-1}(\mathfrak{A}) \neq 0$). Dans ce dernier cas, la nullité des obstructions suivantes peut dépendre du choix de $a_{r+1}(x)$.

Pour construire une loi de groupe

$$f(x, y) = x + y - \sum_{i \geq 1} b_i(x, y), \qquad \text{où} \quad b_i(x, y) \in \mathfrak{A}_i^2, \tag{7}$$

nous chercherons de même à déterminer successivement les fonctions b_i.

Posons, pour $r \geq 2$,

$$f_r(x, y) = x + y - \sum_{2 \leq i \leq r} b_i(x, y). \tag{8}$$

Chaque f_r doit déterminer un r-bourgeon; pour que le prolongement de f_r en f_{r+1} soit possible, il faut et il suffit que l'obstruction du r-bourgeon soit nulle [prop. (13.1)]. Dans ce cas, $b_{r+1}(x, y)$ est déterminé par f_r à l'addition près d'un 2-cocycle. Le problème *peut donc être de nouveau impossible ou indéterminé*. S'il est indéterminé, la nullité des obstructions suivantes peut dépendre du choix de $b_{r+1}(x, y)$, mais elle ne dépend pas de l'addition d'un 2-cobord à $b_{r+1}(x, y)$. En effet, l'addition d'un 2-cobord équivaut à une transmutation par un élément de $G_r(\mathfrak{A})$, d'après le lemme (13.3), et deux bourgeons équivalents sont évidemment tous deux prolongeables ou non prolongeables. Plus précisément, on démontre sans peine le résultat suivant :

LEMME (13.4). — *Soient $\mathfrak{A}$ un analyseur, $f(x, y) \in \mathfrak{A}^2$ déterminant un r-bourgeon, et $\varphi(x) \in G(\mathfrak{A})$. Alors f^φ détermine un r-bourgeon, et l'on a*

$$\Gamma(f^\varphi) = (\Gamma f)^\varphi \qquad [\text{mod. deg. } (r+2)]. \tag{9}$$

En particulier, si $\varphi(x) \in G_1(\mathfrak{A})$, $\Gamma_{r-1}(f^\varphi) = \Gamma_{r-1} f$.

Du point de vue de l'équivalence et du prolongement des bourgeons, le choix de $b_{r+1}(x, y)$ ne dépend pas d'un 2-cocycle mais d'une 2-classe de cohomologie.

Ainsi la cohomologie permet-elle de formuler clairement le problème du *prolongement élémentaire* des bourgeons et des transmutations, c'est-à-dire de la construction d'*une* composante homogène supplémentaire des fonctions cherchées. Mais, comme nous l'avons signalé dans notre introduction, l'étude *globale* du système des obstructions est beaucoup plus complexe; en particulier, ce n'est plus un problème *linéaire* (*cf.* [7], § 4).

14. - Applications aux analyseurs rationnels.

48. THÉORÈMES GÉNÉRAUX; APPLICATIONS A LA LOI DE HAUSDORFF. — L'étude des lois de groupes et de leurs équivalences dans les analyseurs rationnels [déf. (6.2)] va résulter des considérations du paragraphe 13, et du *théorème fondamental*

sur la cohomologie des analyseurs rationnels :

THÉORÈME (14.1). — *Soit $\mathfrak{A}$ un analyseur rationnel. Alors $H_r^n(\mathfrak{A}) = 0$ pour $n \neq r$; $H_n^n(\mathfrak{A})$ s'identifie au module des fonctions n-linéaires antisymétriques de $\mathfrak{A}$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.*

Ce théorème est une conséquence immédiate des théorèmes (9.1), (9.2) et (10.1).

THÉORÈME (14.2). — *Dans un analyseur rationnel $\mathfrak{A}$, tout r-bourgeon est prolongeable en une loi de groupe si $r \geq 3$. Un 2-bourgeon déterminé par $x+y+a(x, y)$, où $a(x, y) \in \mathfrak{A}_2^2$, est prolongeable en une loi de groupe si et seulement si la fonction $a(x, y) - a(y, x)$ est un crochet de Lie.*

En effet, l'obstruction d'un r-bourgeon est un élément de $H_{r-1}^3(\mathfrak{A})$. Elle est donc nulle pour $r \geq 3$. Pour $r = 2$, la condition nécessaire de la proposition (13.2) est suffisante d'après le théorème (9.2).

THÉORÈME (14.3). — *Soient $f(x, y)$ et $g(x, y)$ deux lois de groupes dans un analyseur rationnel $\mathfrak{A}$. Si $f \equiv g$ (mod. deg. r), $r \geq 3$, il existe une fonction $\varphi(x) \in G_{r-1}(\mathfrak{A})$ et une seule telle que $f^\varphi = g$.*

Posons

$$f(x, y) \equiv x + y + a(x, y) \pmod{\text{deg. } 2}, \qquad g(x, y) \equiv x + y + b(x, y) \pmod{\text{deg. } 2},$$

où $a(x, y), b(x, y) \in \mathfrak{A}_2^2$. Pour que f et g soient équivalentes au sens restreint, il faut et il suffit que $a(x, y) - a(y, x) = b(x, y) - b(y, x)$. Pour que f et g soient équivalentes, il faut et il suffit qu'il existe $c(x) \in \mathrm{GL}(\mathfrak{A})$ tel que

$$c(a(x, y)) - c(a(y, x)) = b(c(x), c(y)) - b(c(y), c(x)).$$

Démonstration. — La première partie du théorème résulte de ce que $H_r^2(\mathfrak{A}) = 0$ pour $r > 2$. Une transmutation de f par une fonction de $G_1(\mathfrak{A})$ permet de remplacer $a(x, y)$ par le 2-cocycle canonique qui lui est cohomologue, c'est-à-dire par son antisymétrisé $\frac{1}{2}(a(x, y) - a(y, x))$. Enfin, si a et b sont supposés antisymétriques, les lois f et g sont équivalentes si et seulement si a est transmuté en b par une fonction de $\mathrm{GL}(\mathfrak{A})$, ce qui démontre la dernière partie du théorème.

COROLLAIRE. — *Dans l'analyseur de Lie rationnel, il existe une loi de groupe et une seule prolongeant le 2-bourgeon déterminé par $x + y + \frac{1}{2}[x, y]$. Nous l'appelons la loi de Hausdorff.*

Nous avons ainsi retrouvé les principaux résultats du chapitre II [th. (6.1) et (7.1)]. L'avantage de la méthode cohomologique est d'expliquer pourquoi

l'on obtient des résultats aussi simples dans le cas des analyseurs rationnels : parce que les obstructions sont nulles *a priori*.

49. Lois unilinéaires dans les analyseurs rationnels. — Nous allons étudier dans les analyseurs rationnels des lois de groupes remarquables que nous appellerons *lois unilinéaires* à gauche (resp. à droite). Ces lois ont en commun avec les lois canoniques les deux propriétés suivantes : une loi unilinéaire est contenue dans le sous-analyseur rationnel engendré par sa composante homogène de degré 2 ; une loi unilinéaire à gauche (resp. à droite) s'obtient comme image homomorphe de la loi unilinéaire à gauche (resp. à droite) universelle, qui joue le même rôle que la loi de Hausdorff pour les lois canoniques.

Définition (14.1). — *Nous dirons qu'une loi de groupe $f(x, y)$ dans un analyseur $\mathfrak{A}$ est unilinéaire à gauche (resp. à droite) si la fonction $f(x, y) - y$ [resp. $f(x, y) - x$] est linéaire par rapport à x (resp. y).*

Il nous suffira évidemment d'étudier les lois unilinéaires à gauche.

Lemme (14.1). — *Soient $\mathfrak{A}$ un analyseur, $f(x, y) \in \mathfrak{A}^2$ une loi de groupe unilinéaire à gauche. Désignons par $a(x, y)$ la composante homogène de degré total 2 de $f(x, y)$. Alors $a(x, y)$ vérifie la relation*

$$(\Gamma a)(x, y, z) - (\Gamma a)(x, z, y) = 0. \tag{1}$$

Démonstration. — Soit $b(x, y)$ la composante homogène de degré 3 de f. Si nous considérons le 2-bourgeon déterminé par $x + y + a(x, y)$, nous avons [*cf.* lemme (13.2) et (9), n° 46]

$$(\Gamma a)(x, y, z) = (\delta b)(x, y, z). \tag{2}$$

Or $b(x, y)$ est linéaire en x par hypothèse, et

$$(\delta b)(x, y, z) = (\partial_2 b)(x, y, z) = b(x, y + z) - b(x, y) - b(x, z), \tag{3}$$

d'où évidemment (1).

Définition (14.2). — *Soit Ω un anneau commutatif unitaire. Nous appellerons Ω-algèbre de composition à gauche un Ω-module muni d'une opération bilinéaire notée $x_1 \circ x_2$ vérifiant l'identité*

$$(x_1 \circ x_2) \circ x_3 - x_1 \circ (x_2 \circ x_3) - (x_1 \circ x_3) \circ x_2 + x_1 \circ (x_3 \circ x_2) = 0. \tag{4}$$

Aux Ω-algèbres de composition à gauche correspond un analyseur que nous appellerons l'*analyseur de composition à gauche sur Ω* (*cf.* n° 21).

Nous définissons de même, par le procédé exposé au n° 26, l'*analyseur rationnel de composition à gauche*.

Théorème (14.4). — *Soit $\mathfrak{A}$ l'analyseur rationnel de composition à gauche, engendré par la fonction bilinéaire $x_1 \circ x_2$ vérifiant (4). Il existe dans $\mathfrak{A}$ une loi*

de groupe unilinéaire à gauche $\Psi(x, y)$ et une seule qui prolonge le 2-bourgeon déterminé par $x+y+x\circ y$. Dans un analyseur rationnel $\mathfrak{B}$, toute loi de groupe unilinéaire à gauche s'obtient d'une manière et d'une seule sous la forme $\varphi\Psi(x, y)$, où φ est un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$. Nous appellerons $\Psi(x, y)$ la loi unilinéaire à gauche universelle dans les analyseurs rationnels.

Démonstration. — Cherchons à calculer successivement les composantes $a_i(x, y)$ de $\Psi(x, y)$, de telle sorte que chaque $a_i(x, y)$ soit homogène de degré $(1, i-1)$ par rapport à (x, y), pour $i\geq 2$; nous devons prendre $a_2(x, y) = x\circ y$. Supposons que la fonction

$$f_r(x, y) = x + y + \sum_{2\leq i\leq r} a_i(x, y) \tag{5}$$

détermine un r-bourgeon ($r\geq 2$). Pour calculer $a_{r+1}(x, y)$ il faut résoudre l'équation

$$(\delta a_{r+1})(x, y, z) = (\Gamma_{r+1} f_r)(x, y, z). \tag{6}$$

Il est clair que $(\Gamma_{r+1} f_r)(x, y, z)$ est linéaire par rapport à x. Convenons de considérer, dans (6), x comme une *constante* (*cf.* n° 17) : le problème devient alors de représenter le 2-*cocycle* $(\Gamma_{r+1} f_r)(x, y, z)$ de l'analyseur rationnel $\mathfrak{A}(x)$ comme un 2-*cobord*. L'existence de $a_{r+1}(x)$ pour $r\geq 3$ et son unicité pour $r\geq 2$ résultent du théorème (14.1), ou, plus directement, du n° 35. Pour $r=2$, c'est l'identité (4) vérifiée par $a_2(x, y)$ qui assure l'existence de $a_3(x, y)$.

Nous avons ainsi démontré l'existence et l'unicité de la loi de groupe unilinéaire à gauche $\Psi(x, y)$ dans l'analyseur $\mathfrak{A}$. Indiquons maintenant un procédé de calcul explicite par récurrence des composantes a_r de la loi Ψ. Désignons, pour tout $r\geq 2$, par $b_r(x, y, z)$ la composante de $(\Gamma_{r+1} f_r)(x, y, z)$ qui est homogène de degré $(1, r-1, 1)$ par rapport à (x, y, z). D'après (6) et l'axiome (**A6**), nous avons

$$a_{r+1}(x, y) = -\frac{1}{r} b_r(x, y, y). \tag{7}$$

Pour calculer $b_r(x, y, z)$, nous pouvons négliger dans $(\Gamma f_r)(x, y, z)$ les termes qui sont de degré ≥ 2 par rapport à z, et remplacer ainsi $(\Gamma f_r)(x, y, z)$ par

$$f_r(x, y) + z + f_r(x, y)\circ z - f_r(x, y+z+y\circ z).$$

Nous obtenons, d'après la « formule de Taylor » (n° 11),

$$b_r(x, y, z) = a_r(x, y)\circ z - \mathfrak{D}_{y\to[r-2]y+[1]y\circ z}\, a_r(x, y), \tag{8}$$

où nous convenons de considérer x comme une constante (c'est-à-dire que nous omettons les signes « $x\to[1]x$ » au bas de l'opérateur $\mathfrak{D}$).

D'après (7), nous avons donc

(9) $$a_{r+1}(x, y) = \frac{1}{r}\Big(a_r(x, y)\circ y - \mathfrak{D}_{y\to[r-2]y+[1]y\circ y}\, a_r(x, y)\Big).$$

Pour $r=2$, cette formule donne

$$a_3(x, y) = \frac{1}{2}((x\circ y)\circ y - x\circ(y\circ y));$$

pour $r=3$, nous obtenons après simplification

$$a_4(x, y) = \frac{1}{6}(((x\circ y)\circ y)\circ y - 3(x\circ(y\circ y))\circ y + 2x\circ((y\circ y)\circ y)).$$

Remarquons que nous n'avions pas besoin de supposer l'analyseur $\mathfrak{A}$ rationnel ; il suffisait d'imposer la condition un peu plus faible : chaque groupe additif $\mathfrak{A}^n_r$ est un Q_{r-1}-module.

Achevons la démonstration du théorème (14.4). Soit $f(x, y)$ une loi de groupe unilinéaire à gauche dans un analyseur rationnel $\mathfrak{B}$, et $c(x, y)$ sa composante bilinéaire. La fonction c vérifie l'identité (4), d'après le lemme (14.1) : il existe donc un homomorphisme φ et un seul de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ tel que $\varphi a_2 = c$.

Posons $f' = \varphi\Psi$; nous avons $f = f'$. Sinon, en effet, nous aurions

$$f(x, y) \equiv f'(x, y) + d_r(x, y) \qquad [\text{mod. deg. } (r+1)],$$

où $d_r(x, y)$ serait un 2-cocycle non nul, homogène de degré 1 par rapport à x et de degré $(r-1)$ par rapport à y $(r \geqq 3)$. Or cela est impossible puisque le 2-cocycle d_r devrait être un 2-cobord, et, par conséquent, symétrique en x et y. Le théorème est donc démontré. Remarquons que la formule de récurrence (9) s'applique encore au calcul des composantes de la loi $f(x, y)$ dans l'analyseur $\mathfrak{B}$.

Exemples. — *a.* Soit $\mathfrak{B}$ un *analyseur rationnel*. Désignons par M le sous-module de $\mathfrak{B}^1$ constitué par les fonctions $\varphi(x)$ dont la composante homogène de degré 1 est nulle, et munissons M de sa topologie canonique (n° 13). Nous pouvons mettre M en correspondance biunivoque avec le groupe $G_1(\mathfrak{B})$, en associant à $\varphi(x) \in M$ la fonction $x + \varphi(x) \in G_1(\mathfrak{B})$. Notons par le signe $\star$ l'opération de groupe de M qui correspond ainsi à celle de $G_1(\mathfrak{B})$

(10) $$(\varphi \star \psi)(x) = \psi(x) + \varphi(x + \psi(x)) \quad \text{pour tous } \varphi, \psi \in M.$$

Il est clair que $\varphi\star\psi - \psi$ est une fonction *linéaire* de φ. De plus, la fonction $\varphi\star\psi$ du couple (φ, ψ) se décompose en *composantes homogènes* données par la « formule de Taylor » (n° 11)

(11) $$\varphi\star\psi = \varphi + \psi + \sum_{2\leqq i<\infty} A_i(\varphi, \psi),$$

où nous posons

$$(12) \qquad (\mathrm{A}_i(\varphi, \psi))(x) = \sum_{i \in \mathrm{N}} \mathfrak{D}_{x \succ [1/i] x + [i-1] \psi(x)} \varphi(x) \quad \text{pour } \varphi, \psi \in \mathrm{M},\ i \geq 2.$$

Si l'on munit M de l'opération bilinéaire $\mathrm{A}_2(\varphi, \psi)$, M devient une *algèbre de composition à gauche* (sur Z). L'hypothèse que $\mathfrak{B}$ est *rationnel*, et la *topologie* de M permettent de considérer M comme un $\mathfrak{X}$-*module* au sens du n° 15, où nous désignons toujours par $\mathfrak{X}$ l'analyseur rationnel de composition à gauche.

L'opération de groupe ★ *de* M *peut alors être définie à partir de la loi de groupe unilinéaire à gauche universelle* $\Psi(x, y) \in \mathfrak{X}^2$ (*cf.* n° 22).

Ces affirmations peuvent être vérifiées directement, en utilisant la relation (9). On peut aussi montrer qu'une structure de « groupe analytique » (*cf.* [5]) unilinéaire à gauche sur un module topologique M peut être définie à partir de la loi de groupe unilinéaire à gauche universelle, si l'on impose certaines conditions concernant la multiplication des éléments de M par des nombres rationnels.

b. Nous pouvons appliquer, en particulier, les considérations précédentes à l'*analyseur classique rationnel*. Les formules se simplifient parce que les opérateurs de Sanov sont remplacés par des opérateurs de dérivation du calcul différentiel classique. Nos résultats peuvent être présentés comme suit.

Dans l'*analyseur de Ritt rationnel* (*cf.* n° 21, ex. *e*), on vérifie immédiatement que la fonction bilinéaire $x'_1 x_2$ satisfait à la relation (4). Il existe donc dans cet analyseur une loi de groupe unilinéaire à gauche $f(x, y)$ et une seule qui prolonge le 2-bourgeon déterminé par $x + y + x'y$. La formule (9) conduit très simplement à l'expression explicite de $f(x, y)$:

$$(13) \qquad f(x, y) = y + \sum_{i \in \mathrm{N}} \frac{1}{i!} x^{(i)} y^i,$$

où nous utilisons des notations usuelles du calcul différentiel. La formule (13) n'est autre que la formule de Taylor classique [*cf.* (10)].

Remarquons que l'homomorphisme φ de l'analyseur rationnel de composition à gauche dans l'analyseur de Ritt rationnel [défini par $\varphi(x_1 \circ x_2) = x'_1 x_2$] n'est pas un monomorphisme. En effet, $x_1 \circ (x_2 \circ x_1) \neq x_2 \circ (x_1 \circ x_1)$, mais

$$\varphi(x_1 \circ (x_2 \circ x_1)) = (x_2 \circ (x_1 \circ x_1)) = x'_1 x_1 x'_2.$$

Nous avons vu plus haut (ex. *a*) un exemple d'algèbre de composition topologique sur laquelle la loi unilinéaire définit une structure de groupe. Nous montrerons que la loi unilinéaire permet aussi de construire des *germes de groupes topologiques*, comme la loi de Hausdorff. Pour cela, nous indroduirons une notion générale de « norme » qui précise ce qu'il faut entendre par une

majoration d'une loi de groupe. Nous nous bornerons à étudier le cas du corps de base réel.

Soit $\mathfrak{K}$ l'*analyseur de Kurosch* sur le corps R des nombres réels (n° 21, ex. *a*)t Pour tout $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\in N^n$, une fonction $f_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\in\mathfrak{K}_\alpha^n$ s'écrit univoquement comme une combinaison linéaire à coefficients réels des k_α « monomes » de degré α ([33]); nous appellerons *norme* de $f_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ et noterons $\|f_\alpha\|(x_1, \ldots, x_n)$ le monome $S(f_\alpha)\,x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$, où $S(f_\alpha)$ est la *somme des valeurs absolues des coefficients des k_α monomes dans le développement de f_α*. Soient $f(x_1, \ldots, x_n)\in\mathfrak{K}^n$ et, pour tout $\alpha\in N^n$, $f_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ sa composante homogène de degré α. Nous appellerons norme de f et noterons $\|f\|(x_1, \ldots, x_n)$, ou plus simplement $\|f\|$, la *série formelle à coefficients réels positifs*

$$\|f\|(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{\alpha\in N^n}\|f_\alpha\|(x_1, \ldots, x_n)\in R[[x_1, \ldots, x_n]]. \tag{14}$$

Nous ordonnons l'ensemble des séries formelles à coefficients réels en posant

$$\sum_{\alpha\in N^n}a_\alpha x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\leq\sum_{\alpha\in N^n}b_\alpha x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$$

si et seulement si $a_\alpha\leq b_\alpha$ pour tout $\alpha\in N^n$.

On vérifie alors les propriétés suivantes de la norme dans $\mathfrak{K}$:

$$\|\lambda f\|=|\lambda|.\|f\| \quad \text{pour } \lambda\in R,\ f\in\mathfrak{K}^n, \tag{15}$$

$$\|f+g\|\leq\|f\|+\|g\| \quad \text{pour } f, g\in\mathfrak{K}^n. \tag{16}$$

Si $f(x_1, \ldots, x_m)\in\mathfrak{K}^m$ et $g_i(x_1, \ldots, x_n)\in\mathfrak{K}^n$ pour $1\leq i\leq m$, alors

$$\|f(g_1, \ldots, g_m)\|\leq\|f\|(\|g_1\|, \ldots, \|g_m\|). \tag{17}$$

Si $f\in\mathfrak{K}^n$ et si $\mathfrak{V}$ est le signe d'un opérateur de Sanov simple [déf. (2.4)], alors, en considérant l'opérateur $\mathfrak{D}$ correspondant dans l'analyseur classique sur R

$$\|\mathfrak{D}f\|\leq\mathfrak{D}\|f\|. \tag{18}$$

Soit maintenant $\mathfrak{A}$ un analyseur sur R *engendré par une fonction bilinéaire donnée*. Nous pouvons considérer l'épimorphisme correspondant φ de $\mathfrak{K}$ sur $\mathfrak{A}$. Nous définissons la norme $\|f\|$ d'un élément f de $\mathfrak{A}^n$ en posant

$$\|f\|=\mathrm{Inf}\|g\|, \tag{19}$$

où la borne inférieure est calculée sur l'ensemble des $g\in\mathfrak{K}^n$ tels que $\varphi(g)=f$.

([33]) Les monomes de $\mathfrak{K}^n$ sont définis par récurrence sur leur degré : les x_i sont des monomes ($1\leq i\leq n$), et le produit de deux monomes est un monome. L'entier k_α est donné par la formule

$$k_\alpha=(2\,|\,\alpha\,|-2)!/\alpha_1!\ldots\alpha_n!\,(\,|\,\alpha\,|-1)!.$$

Les relations (15) à (18) sont encore vérifiées dans $\mathfrak{A}$. Remarquons cependant que, dans $\mathfrak{K}$, $|fg| = |f| \cdot |g|$, alors que cette égalité doit être remplacée par une inégalité [cas particulier de (17)] dans un analyseur $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{K}$.

Proposition (14.1). — *La norme de la loi de groupe unilinéaire à gauche* $\Psi(x, y)$ *prolongeant le 2-bourgeon déterminé par* $x+y+x\circ y$ *dans l'analyseur de composition à gauche sur* R *vérifie l'inégalité*

$$\|\Psi(x, y)\| \leq y + \sum_{n\in N} x y^n. \tag{20}$$

Il suffit, en effet, de majorer par récurrence les composantes homogènes de Ψ, en utilisant la relation (9).

Corollaire. — *Soit* M *une algèbre de composition à gauche sur* R *normée et complète* (*c'est-à-dire que* M *est un espace de Banach vérifiant la condition* $\|\xi\circ\eta\| \leq \|\xi\|\cdot\|\eta\|$ *pour* $\xi, \eta \in M$). *Alors la loi de groupe unilinéaire à gauche* $\Psi(x, y)$ *définit dans* M *une série* $\Psi(\xi, \eta)$ *absolument convergente pour* $\xi, \eta \in M$ *et* $\|\eta\| < 1$. *Un voisinage convenable de* 0 *dans* M *est ainsi transformé en un germe de groupe topologique.*

D'après la proposition précédente, la transformation $\xi \mapsto \Psi(\xi, \eta) - \xi - \eta$ est, pour $\|\eta\| < 1$, un endomorphisme linéaire continu de M, dont la norme est majorée par $\|\eta\|(1-\|\eta\|)^{-1}$. Si $\|\xi\| < \frac{1}{2}$, il existe donc un élément η et un seul dans M tel que $\Psi(\eta, \xi) = 0$, et l'on a $\|\eta\| \leq \|\xi\|(1-\|\xi\|)(1-2\|\xi\|)^{-1}$. On peut ainsi calculer les « produits » et les « inverses » des éléments de norme assez petite, et vérifier les axiomes d'un germe de groupe topologique.

En particulier, si M est une algèbre de composition à gauche de dimension finie sur R, la loi unilinéaire permet d'y définir un *germe de groupe de Lie*. A deux algèbres de composition non isomorphes peuvent correspondre deux germes de groupes de Lie isomorphes : par exemple, pour la dimension 1, il suffit de prendre $\xi\circ\eta = 0$ (resp. $\xi\circ\eta = \xi\eta$). Je ne sais pas donner de caractérisation complète des germes de groupes de Lie qu'on peut définir de cette manière.

Remarque. — La majoration de la loi de Hausdorff $\Phi(x, y)$ démontrée par Dynkin [3] peut s'écrire :

$$\|\Phi(x, y)\| \leq \int_0^1 \mathrm{Log}(2 - e^{t(x+y)})^{-1}\frac{dt}{t}.$$

15. — Applications aux lois de groupes de Lie formels.

50. Obstructions; lois et bourgeons universels. — Rappelons [déf. 7.2)] qu'une loi de groupe de Lie formel à q paramètres et à coefficients dans

l'anneau Ω est une loi de groupe dans l'analyseur $\Pi^q(\Omega \otimes_{\mathbf{Z}} \mathfrak{A}) = \Omega \otimes_{\mathbf{Z}} \Pi^q \mathfrak{A}$, où $\mathfrak{A}$ désigne l'analyseur classique sur Z.

Les problèmes de prolongement des bourgeons et des transmutations peuvent conduire à des obstructions non nulles, et la connaissance des groupes de cohomologie est tout à fait insuffisante pour édifier une théorie des lois de groupes de Lie formels.

La détermination de la cohomologie de $\Pi^q(\Omega \otimes \mathfrak{A})$ ne présente aucune difficulté de principe. En effet, un *sous-complexe normal* du complexe réduit normalisé de la puissance cartésienne $\Pi^q(\Omega \otimes \mathfrak{A})$ [*cf.* prop. (11.3)] s'identifie au *produit tensoriel, sur l'anneau* Ω, *de q complexes isomorphes au complexe normalisé de* $\Omega \otimes \mathfrak{A}$ (auquel il faut adjoindre une unité). D'après la formule de Künneth, les groupes de cohomologie de $\Pi^q(\Omega \otimes \mathfrak{A})$ peuvent être calculés complètement à partir de ceux de $\mathfrak{A}$, que nous connaissons [th. (12.2)].

Pour déterminer les obstructions éventuelles des bourgeons ou des transmutations, il est commode d'utiliser le théorème (11.1). Les calculs du n° 45 [*cf.* (13), (14), (15)] conduisent au résultat suivant :

Proposition (15.1). — *Quel que soit l'anneau* Ω *et l'entier* q, $\mathrm{H}^r_p(\Omega \otimes \Pi^q \mathfrak{A}) = 0$ *si* r *n'est pas une puissance entière d'un nombre premier ou une somme de deux puissances entières même d'un nombre premier;* $\mathrm{H}^r_p(\Omega \otimes \Pi^q \mathfrak{A}) = 0$ *si* r *n'est pas une somme de deux ou de trois puissances entières d'un même nombre premier.*

Si nous laissons de côté le cas des analyseurs rationnels, qui entre dans le cadre de la théorie classique de Lie, il est naturel de prendre pour anneau de base Ω un anneau de caractéristique p (nombre premier). Il est même parfois nécessaire de supposer que Ω est un corps de caractéristique p algébriquement clos (*cf.* [7], § 4). Cependant nous démontrerons au numéro suivant des résultats valables pour les lois et bourgeons abéliens sur un anneau de base quelconque.

Nous omettrons parfois de spécifier que les lois de groupes et les bourgeons sont considérés dans une puissance cartésienne finie d'un analyseur classique.

Une fonction $\mathrm{F}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ dans l'analyseur $\Pi^q(\Omega \otimes \mathfrak{A})$ s'identifie à une famille de q séries formelles sans termes constants en nq indéterminées et à coefficients dans Ω. Ces coefficients seront appelés simplement *coefficients de la fonction* F.

Il nous sera commode d'*identifier* un r-bourgeon à la fonction qui le détermine et dont les composantes homogènes de degré $> r$ sont nulles. Nous pourrons ainsi parler sans ambiguïté des coefficients d'un r-bourgeon.

Si Ω et Ω' sont deux anneaux commutatifs unitaires et $\varphi : \Omega \to \Omega'$ un homomorphisme unitaire, nous désignerons par φ^* l'homomorphisme associé de $\Pi^q(\Omega \otimes \mathfrak{A})$ dans $\Pi^q(\Omega' \otimes \mathfrak{A})$; l'image $\varphi^* \mathrm{F}$ d'une fonction F s'obtient en transformant par φ chacun de ses coefficients.

Définition (15.1). — *Une loi universelle de groupe de Lie formel à q paramètres est constituée par la donnée d'un anneau commutatif unitaire* A *et d'une loi* $F(x, y)$ *à q paramètres et à coefficients dans* A, *possédant la propriété suivante : pour tout anneau* Ω *et toute loi* $f(x, y)$ *à q paramètres et à coefficients dans* Ω, *il existe un homomorphisme* φ *et un seul de* A *dans* Ω *tel que* $f = \varphi^* F$. *Nous définissons par la propriété analogue correspondante les r-bourgeons universels, ainsi que les lois de groupes abéliennes universelles et les bourgeons abéliens universels.*

Avant de démontrer l'existence des lois et bourgeons universels, tirons quelques conséquences immédiates de leur définition.

Si nous avons deux lois universelles à q paramètres : F sur l'anneau A et F′ sur l'anneau A′, il existe un *couple d'isomorphismes réciproques* φ, ψ et un seul (resp. de A sur A′ et de A′ sur A) tel que $F' = \varphi^* F$ et $F = \psi^* F'$.

L'anneau de base A d'une loi universelle F est *engendré* par les coefficients de F.

Les mêmes résultats valent pour les bourgeons universels et pour les lois ou bourgeons abéliens universels.

Démontrons, par exemple, l'existence d'un r-bourgeon abélien universel à q paramètres. Soit, dans l'analyseur $H^q(\Omega \otimes \mathfrak{A})$, une fonction $F(x, y)$ dont les composantes homogènes de degré $> r$ sont nulles. Les coefficients de F sont au nombre de $n = q\left(\binom{r+2q}{2q} - 1\right)$. Pour que F soit un r-bourgeon abélien, il faut et il suffit que ses n coefficients annulent une famille de polynomes $(P_t)_{t \in I}$, qu'on obtient en écrivant que les conditions de la définition (13.1) sont satisfaites. Prenons l'anneau de polynomes A_0 en n indéterminées sur l'anneau Z; soit $F_0(x, y) \in H^q(A_0 \otimes \mathfrak{A})$ la fonction dont les n coefficients sont précisément les indéterminées de l'anneau A_0; formons le quotient A de A_0 par l'idéal engendré par les $(P_t)_{t \in I}$, et soit φ l'épimorphisme canonique de A_0 sur A. Il est clair que $\varphi^* F_0 = F$ est un r-bourgeon abélien universel à q paramètres et à coefficients dans A.

Autrement dit, nous pouvons considérer que les r-bourgeons abéliens à q paramètres constituent une « *variété algébrique* » sur l'anneau Z. Un bourgeon universel n'est autre qu'un « *point générique* » de cette variété.

Ces considérations s'étendent aux lois de groupes. Elles ne présentent d'intérêt que dans la mesure où l'on sait élucider la structure des lois et bourgeons universels. Nous ne savons démontrer de résultats valables que dans le cas abélien.

51. Lois et bourgeons abéliens universels. — Nous allons étendre aux lois de groupes et aux bourgeons abéliens à plusieurs paramètres les résultats de [7], § 2. Le lemme suivant remplacera le lemme 3 de [7].

LEMME (15.1). — *Soient $\mathfrak{A}$ l'analyseur classique sur Z, q un entier ≥ 1. Pour tout anneau commutatif unitaire Ω, convenons de noter $S_r(q, \Omega)$ le Ω-module constitué par les 2-cocycles $G(X_1, X_2)$ dans l'analyseur $\Omega \otimes \Pi^q \mathfrak{A}$ qui sont homogènes de degré total r et symétriques par rapport à X_1 et X_2. Alors :*

a. $S_r(q, Z)$ *est un groupe abélien libre de rang* $q\binom{r+q-1}{q-1}$ *pour tout* $r \geq 2$;

b. $S_r(q, \Omega) = \Omega \otimes S_r(q, Z)$ *pour tout* $r \geq 2$ *et tout anneau* Ω.

Démonstration. — Notons $\mathfrak{B}$ (resp. $\Omega \otimes \mathfrak{B}$) le *complexe réduit* (n° 38) de la puissance cartésienne $\Pi^q \mathfrak{A}$ (resp. $\Omega \otimes \Pi^q \mathfrak{A}$). Si nous considérons les q composantes $(g_i(X_1, X_2))_{1 \leq i \leq q}$ d'un 2-cocycle $G(X_1, X_2)$ dans $\Omega \otimes \Pi^q \mathfrak{A}$, nous voyons qu'il faut démontrer l'énoncé équivalent à celui du lemme pour les 2-cocycles symétriques dans les complexes réduits $\mathfrak{B}$ (resp. $\Omega \otimes \mathfrak{B}$). Conformément aux conventions du paragraphe 11, nous remplacerons un « argument vectoriel » X_i par une famille d'arguments $(x_{1,i}, \ldots, x_{q,i})$.

Considérons donc un 2- cocycle

$$g(X_1, X_2) = g(x_{1,1}, \ldots, x_{q,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{q,2}) \in (\Omega \otimes \mathfrak{B})^2_r$$

symétrique par rapport à X_1 et X_2. D'après la proposition (11.3), g est cohomologue à un 2-cocycle g' contenu dans le *sous-complexe normal* de $\Omega \otimes \mathfrak{B}$. Comme tout 2-cobord est symétrique, g' est encore symétrique. D'après la définition du complexe normal, g' est égal à

$$(1) \qquad g'(x_{1,1}, \ldots, x_{q,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{q,2}) = \sum_{1 \leq i \leq q} h_i(x_{i,1}, x_{i,2}) + \sum_{1 \leq i < j \leq q} h_{i,j}(x_{i,1}, x_{j,2}).$$

Puisque g' est *symétrique*, toutes les fonctions $h_{i,j}$ $(1 \leq i < j \leq q)$ sont *nulles*. Quant aux fonctions $h_i(x_{i,1}, x_{i,2})$, elles s'identifient aux 2-cocycles symétriques $h_i(x_1, x_2)$ dans l'analyseur $\Omega \otimes \mathfrak{A}$.

Supposons d'abord $\Omega = Z$. Alors tout 2-cocycle de $\mathfrak{A}^2_r$ est symétrique et est égal à un cobord, ou à un cobord divisé par p si r est une puissance entière du nombre premier p [n° 45, (13)]. Par conséquent, tout 2-cocycle symétrique dans $\mathfrak{B}^2_r$ est égal à un cobord ∂k $(k \in \mathfrak{B}^1_r)$ ou, si $r = p^i$, à la somme d'un cobord ∂k et d'un cobord divisé $\frac{1}{p}\partial k'$, où

$$k' = \sum_{1 \leq i \leq q} n_i x^r_{i,1} \qquad (n_i \in Z).$$

Or $\mathfrak{B}^1_r$ est un groupe abélien libre de rang $\binom{r+q-1}{q-1}$ et n'a pas de 1-cocycles non nuls, ce qui établit la première partie du lemme.

Pour achever la démonstration, remarquons que nous nous sommes déjà ramenés à l'étude des 2-cocycles h_i de (1), c'est-à-dire au cas où $q = 1$. Si nous appliquons les formules (12), (13) et (14) du n° 45, nous voyons que tout

2-cocycle de degré r dans $\Omega\otimes\mathfrak{A}$ peut s'écrire sous la forme

$$\lambda f(x_1, x_2)+\sum_p \lambda_p x_1^{p^i} x_2^{p^j}; \tag{2}$$

dans cette formule, $f(x_1, x_2)$ est un 2-cocycle de $\mathfrak{A}_r^2$, p parcourt l'ensemble des nombres premiers tels que $r=p^i+p^j$ $(0\leq i<j)$, λ, $\lambda_p\in\Omega$, $p\lambda_p=0$. Pour que le cocycle (2) soit symétrique, il faut et il suffit que tous les λ_p soient nuls, ce qui établit la seconde partie du lemme.

Pour simplifier nos énoncés qui feront intervenir des « ensembles d'indices » compliqués, nous poserons la définition suivante.

Définition (15.2). — *Choisissons une base dans chacun des groupes abéliens libres* $S_r(q, Z)$. *Les éléments de la base de* $S_r(q, Z)$ *seront notés* $g_i(x, y)$, *avec* $i\in I_{q,r}$. *L'ensemble d'indices* $I_{q,r}$ *a* $q\binom{r+q-1}{q-1}$ *éléments. Les différents ensembles d'indices* $I_{q,r}$ *seront considérés comme disjoints, et nous poserons*

$$J_q=\bigcup_{2\leq r<\infty} I_{q,r}, \qquad J_{q,r}=\bigcup_{2\leq s\leq r} I_{q,s}.$$

L'ensemble J_q *est infini dénombrable; les sous-ensembles* $(I_{q,r})_{2\leq r<\infty}$ *de* J_q *en constituent une partition. Le nombre d'éléments de l'ensemble* $J_{q,r}$ *est égal à* $q\left(\binom{r+q}{q}-q-1\right)$.

Lemme (15.2). — *Soit* Ω *un anneau commutatif unitaire sans torsion. Alors tout r-bourgeon abélien à q paramètres et à coefficients dans* Ω *peut être prolongé en un* $(r+1)$*-bourgeon abélien à coefficients dans* Ω.

Démonstration. — Soit $f_r(x, y)\in\Pi^q(\Omega\otimes\mathfrak{A})$ un r-bourgeon abélien. Puisque Ω est *sans torsion*, nous pouvons *identifier* Ω à un sous-anneau de $\Omega'=Q\otimes_Z\Omega$, *et identifier* ainsi f_r à un r-bourgeon abélien à coefficients dans Ω'.

D'après le théorème (14.3), le r-bourgeon abélien $f_r(x, y)$ est équivalent, *dans l'analyseur* $\Pi^q(\Omega'\otimes\mathfrak{A})$, à $x+y$; il s'agit d'une équivalence au sens des r-bourgeons, c'est-à-dire [mod deg $(r+1)$]. Le r-bourgeon $f_r(x, y)$ est donc prolongeable en un $(r+1)$-bourgeon abélien $f'(x, y)$ *à coefficients dans* Ω'.

Soit $a'_{r+1}(x, y)$ la composante homogène de degré $(r+1)$ de $f'(x, y)$; $a'_{r+1}(x, y)$ est symétrique en x et y et vérifie la relation

$$(\delta a'_{r+1})(x, y, z)=(\Gamma_{r+1}f_r)(x, y, z). \tag{3}$$

D'après la définition de Ω', il existe un entier $n\in\mathbf{N}^*$ tel que $na'_{r+1}(x, y)$ ait ses coefficients dans Ω. Désignons par Ω'' l'anneau quotient $\Omega/n\Omega$, par φ l'épimorphisme canonique de Ω sur Ω'', et par $a''_{r+1}(x, y)$ la fonction $\varphi^*(na'_{r+1}(x, y))$ à coefficients dans Ω''. D'après (3), $a''_{r+1}(x, y)$ est un 2-cocycle à coefficients dans Ω'', symétrique en x et y. Autrement dit, $a''_{r+1}(x, y)\in S_{r+1}(q, \Omega'')$.

Nous avons donc, d'après le lemme (15.1),

$$(4)\qquad a''_{r+1}(x,y) = \sum_{i\in \mathrm{I}_{q,r+1}} \lambda''_i g_i(x,y), \qquad \text{avec } \lambda''_i \in \Omega'' \text{ pour } i\in \mathrm{I}_{q,r+1}.$$

Choisissons des éléments λ_i dans Ω, tels que $\varphi(\lambda_i)=\lambda''_i$ pour tout $i\in \mathrm{I}_{q,r+1}$. Nous avons, d'après (4),

$$(5)\qquad \varphi^*\left(na'_{r+1}(x,y) - \sum_{i\in \mathrm{I}_{q,r+1}} \lambda_i g_i(x,y)\right) = 0.$$

Autrement dit la fonction

$$(6)\qquad a_{r+1}(x,y) = a'_{r+1}(x,y) - \frac{1}{n}\sum_{i\in \mathrm{I}_{q,r+1}} \lambda_i g_i(x,y)$$

a ses coefficients dans Ω. Comme $g_i(x,y)\in \mathrm{S}_{r+1}(q,\mathrm{Z})$, $a_{r+1}(x,y)$ est symétrique en x et y, et

$$(\partial a_{r+1})(x,y,z) = (\partial a'_{r+1})(x,y,z).$$

Il résulte de (3) que $f_{r+1}(x,y)=f_r(x,y)+a_{r+1}(x,y)$ est un $(r+1)$-bourgeon abélien à coefficients dans Ω.

Théorème (15.1). — *Soit* $\mathrm{F}(x,y)$ *une loi de groupe abélienne universelle à* q *paramètres et* A *son anneau de base. Alors on peut choisir une famille* $(\xi_i)_{i\in \mathfrak{I}_0}$ *d'éléments de* A *tels que :*

a. A *s'identifie à l'anneau des polynomes* $\mathrm{Z}[(\xi_i)_{i\in \mathrm{I}_q}]$;

b. Si l'on désigne par A_r *le sous-anneau de* A *engendré par les coefficients de la somme* $\mathrm{F}_r(x,y)$ *des composantes homogènes de* $\mathrm{F}(x,y)$ *de degré* $\leqq r$, A_r *s'identifie à* $\mathrm{Z}[(\xi_i)_{i\in \mathrm{I}_{q,r}}]$, *et* $\mathrm{F}_r(x,y)$ *est un* r*-bourgeon abélien universel sur l'anneau* A_r *(pour tout* $r\geqq 2$*).*

Démonstration. — Il suffit évidemment de démontrer le théorème pour *une* loi de groupe universelle que nous allons construire.

Formons l'anneau $\mathrm{A}=\mathrm{Z}[(\xi_i)_{i\in \mathrm{I}_q}]$, et désignons, pour tout $r\geqq 2$, par A_r le sous-anneau $\mathrm{Z}[(\xi_i)_{i\in \mathrm{I}_{q,r}}]$.

Prenons

$$\mathrm{F}_2(x,y) = x+y+\sum_{i\in \mathrm{I}_{q,2}} \xi_i g_i(x,y);$$

F_2 est un 2-bourgeon abélien à coefficients dans A_2.

Supposons déjà construit le r-bourgeon abélien $\mathrm{F}_r(x,y)$ à q paramètres et à coefficients dans A_r ($r\geqq 2$). Puisque A_r est sans torsion, nous pouvons, d'après le lemme (15.2), choisir un $(r+1)$-bourgeon abélien $\mathrm{F}_{r+1}(x,y)$ à coefficients

dans A_r qui prolonge $F_r(x, y)$. Posons

$$F_{r+1}(x, y) = F'_{r+1}(x, y) + \sum_{i \in I_{q,r+1}} \xi_i g_i(x, y). \tag{7}$$

Nous obtenons un $(r+1)$-bourgeon abélien F_{r+1} à coefficients dans A_{r+1} qui prolonge F_r.

Poursuivant notre construction par des choix successifs, nous obtenons la loi de groupe $F(x, y)$ qui prolonge tous les bourgeons $F_r(x, y)$.

Soit $f(x, y)$ une loi de groupe (resp. un r-bourgeon) à q paramètres et à coefficients dans un anneau Ω. Montrons que pour tout s (resp. $s \leq r$) il existe un homomorphisme $\varphi_s : A_s \to \Omega$ et un seul tel que

$$\varphi_s^* F_s(x, y) \equiv f(x, y) \qquad [\text{mod. deg. } (s+1)]. \tag{8}$$

Nous procéderons par récurrence sur s; supposons vérifiée la relation (8), et $s < r$ si f est un r-bourgeon. Alors $\varphi_s^* F'_{s+1}(x, y)$ est un $(s+1)$-bourgeon abélien à coefficients dans Ω qui prolonge $\varphi_s^* F_s(x, y)$. Nous avons donc, d'après le lemme (15.1),

$$f(x, y) \equiv \varphi_s^* F'_{s+1}(x, y) + \sum_{i \in I_{q,s+1}} \lambda_i g_i(x, y) \qquad [\text{mod. deg. } (s+2)], \tag{9}$$

où les $\lambda_i \in \Omega$ sont *univoquement déterminés*. L'homomorphisme $\varphi_{s+1} : A_{s+1} \to \Omega$ doit coïncider avec φ_s sur A_s et vérifier $\varphi_{s+1}(\xi_i) = \lambda_i$ pour tout $i \in I_{q,s+1}$, ce qui le détermine univoquement. Si f est une loi de groupe, il existe un homomorphisme $\varphi : A \to \Omega$ et un seul tel que $\varphi^* F = f$, car φ doit prolonger tous les homomorphismes φ_s; si f est un r-bourgeon, il existe un homomorphisme $\varphi_r : A_r \to \Omega$ et un seul tel que $\varphi_r^* F_r = f$.

Remarquons que, si l'on donne la loi universelle $F(x, y)$ et son anneau de base A, les éléments (ξ_i) doivent être effectivement choisis. On peut caractériser aisément le *groupe d'automorphismes* de A qui correspond aux divers choix possibles.

Nous pouvons interpréter le théorème (15.1) de la manière suivante : toute loi de groupe (resp. r-bourgeon) $f(x, y)$ à q paramètres et à coefficients dans un anneau Ω peut être mise en correspondance avec une famille $(\lambda_i)_{i \in I_q}$ [resp. $(\lambda_i)_{i \in I_{q,r}}$] d'éléments de Ω que nous appellerons ses *coordonnées*. Les coordonnées (λ_i) de $f(x, y)$ sont des fonctions polynomes (à coefficients dans Z) des coefficients de $f(x, y)$, et les coefficients de $f(x, y)$ sont des fonctions polynomes (à coefficients dans Z) de ses coordonnées (λ_i). Les polynomes à coefficients entiers en question sont *indépendants* de l'anneau Ω et de la fonction $f(x, y)$. Les coordonnées d'une loi de groupe (resp. d'un r-bourgeon) peuvent être choisies arbitrairement dans un anneau Ω. Autrement dit, la « *variété algébrique sur* Z » des lois de groupes (resp. des r-bourgeons) à q

paramètres est un « *espace affine* » de dimension infinie dénombrable [resp. de dimension $q\left(\binom{r+q}{q}-q-1\right)$].

Les considérations précédentes ne s'étendent pas sans modifications aux lois de groupes et aux bourgeons dans des puissances cartésiennes *infinies* d'analyseurs classiques. En effet, nous ne pouvons plus définir de lois de groupes ni de bourgeons universels (de même que nous ne pouvons pas parler de « point générique » dans un espace affine de dimension infinie où tout point ne peut avoir qu'un nombre fini de coordonnées non nulles).

Cependant, la méthode que nous avons suivie permet encore d'introduire des « *coordonnées* » pour les lois de groupes et les bourgeons à « une infinité de paramètres ». Un certain sous-ensemble de ces coordonnées doit être nul; à cela près, les coordonnées peuvent être choisies arbitrairement dans l'anneau de base considéré. Nous laissons au lecteur le soin de préciser ce point, mais nous énoncerons pour les puissances cartésiennes quelconques d'analyseurs classiques les deux conséquences suivantes du théorème (15.1).

Théorème (15.2). — *Soit $f(x, y)$ un r-bourgeon abélien dans une puissance cartésienne $\Pi^{\mathrm{I}}(\Omega \otimes \mathfrak{A})$ d'un analyseur classique. Alors, quels que soient l'entier r, l'ensemble* I *et l'anneau de base Ω, $f(x, y)$ peut être prolongé en une loi de groupe abélienne*

Dans le cas où I est un ensemble fini, cet énoncé équivaut au suivant : une loi de groupe abélienne universelle à q paramètres détermine, pour tout r, un r-bourgeon abélien universel.

Théorème (15.3). — *Soient Ω, Ω' deux anneaux commutatifs unitaires, φ un épimorphisme de Ω sur Ω', $f'(x, y)$ une loi de groupe abélienne dans une puissance cartésienne $\Pi^{\mathrm{I}}(\Omega' \otimes \mathfrak{A})$ de l'analyseur classique sur Ω'. Alors on peut choisir une loi de groupe abélienne $f(x, y)$ dans l'analyseur $\Pi^{\mathrm{I}}(\Omega \otimes \mathfrak{A})$, telle que $\varphi^* f = f'$.*

Autrement dit, on peut « remonter » les coefficients et les coordonnées de la loi f' dans l'anneau Ω. Ce résultat explique une partie de l'algorithme de Witt [10]; toute loi abélienne de groupe de Lie formel à coefficients entiers mod p s'obtient en réduisant (mod p) les coefficients d'une loi abélienne à coefficients entiers; cette dernière peut toujours être transmutée en $x+y$ par une fonction à coefficients rationnels.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. IV.

[2] H. Cartan et S. Eilenberg, *Homological Algebra* (Princeton)

[3] E. B. Dynkin, *Algèbres de Lie normées et groupes analytiques* (*Uspekhi Mat. Nauk*, t. 5, 1950, p. 134-186).

[4] F. Hausdorff, *Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie* (*Ber. Sächs. Ges.*, t. 58, 1906, p. 19-48).

[5] M. Lazard, *Sur les groupes analytiques dans les modules filtrés* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 1952, p. 1465-1467).

[6] M. Lazard, *Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 71, 1954, p. 101-190).

[7] M. Lazard, *Sur les groupes de Lie formels à un paramètre* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 83, 1955, p. 251-274).

[8] W. Magnus, *A connection between the Baker-Hausdorff formula and a problem of Burnside* (*Ann. Math.*, t. 52, 1950, p. 111-126).

[9] I. N. Sanov, *Sur une liaison entre des groupes périodiques dont la période est un nombre premier et des anneaux de Lie* (*Izv. Akad. Nauk S. S. S. R.*, ser. Math., t. 16, 1952, p. 23-58).

[10] E. Witt, *Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad p^n* (*J. Reine Angew. Math.*, t. 176, 1937, p. 126-140).

LONGUEURS EXTRÉMALES

ET

GÉOMÉTRIE GLOBALE

PAR M. JOSEPH HERSCH.

1. INTRODUCTION. — 1.1. Les résultats qui vont suivre reposent de façon essentielle sur la *représentation conforme*; aussi considérons-nous des *variétés riemanniennes* à deux dimensions, admettant des *paramètres isothermes* locaux.

Nous appelons *triangle* la figure formée par un domaine de Jordan et trois points désignés sur sa frontière; ils la partagent en trois « côtés ». Un *quadrilatère* sera un domaine de Jordan avec quatre points-frontière désignés.

1.2. Dans son travail d'habilitation [7], O. Teichmüller attira l'attention sur une propriété extrémale remarquable du carré : Soit Q un quadrilatère de côtés β', α', β'', α'' et d'aire A; appelons Λ la borne inférieure des longueurs de tous les arcs rectifiables (dans Q) reliant soit β' à β'', soit α' à α'' (c'est-à-dire deux côtés opposés); alors $\Lambda^2 \leqq A$. Pour un carré du plan, on a évidemment l'égalité. Dans un article récent, P. M. Pu [5] a démontré le théorème suivant :

Soient A *l'aire d'une variété riemannienne du type topologique du plan projectif (modèle) et* Λ *la borne inférieure des longueurs des cycles rectifiables non homotopes à zéro; alors* $\Lambda^2 \leqq \frac{\pi A}{2}$.

Dans le présent travail, mon intention est de montrer que ces deux propriétés, ainsi que d'autres, peuvent être obtenues d'une façon simple et unitaire, grâce à la notion de *longueur extrémale d'une famille de courbes* (Ahlfors et Beurling [1]).

2. DÉFINITION DE LA LONGUEUR EXTRÉMALE. QUELQUES PROPRIÉTÉS. EXEMPLES. — 2.1. J'utilise une forme légèrement modifiée [4] de la définition initiale d'Ahlfors et Beurling. Soit $\{c\}$ une famille de courbes données sur une variété

riemannienne G (ou dans un domaine G d'une variété). Pour toute fonction réelle non négative ρ sur G (*répartition*), j'écris

$$C_\rho(c) = \int_c \rho\, ds \quad \text{et} \quad A_\rho = \iint_G \rho^2\, d\tau,$$

où ds = élément linéaire, $d\tau$ = élément de surface, $\underline{\int}$ et $\overline{\int}$ = intégrales inférieure et supérieure de Darboux.

Définition. — $L^{-1}_{\{c\}} = M\{c\} = \inf_\rho A_\rho$ *sous la condition* $C_\rho(c) \geqq 1$ *pour toute* $c \in \{c\}$. $L_{\{c\}}$ est appelée la *longueur extrémale* de la famille $\{c\}$.

Toute répartition ρ avec $C_\rho(c) \geqq 1$ pour toute $c \in \{c\}$ est dite « admissible » pour la famille $\{c\}$.

2.2. On trouvera dans [4] diverses propriétés des longueurs extrémales et leurs démonstrations; voici quelques énoncés dont nous aurons besoin ici :

2.2.1. $L_{\{c\}}$ est invariante par toute transformation conforme (biunivoque) de G et de la famille $\{c\}$.

2.2.2. Si $\{c\} \subset \{\gamma\}$, alors $L_{\{c\}} \geqq L_{\{\gamma\}}$.

2.2.3. Si la *famille* $\{c\}$ dans le plan (ou sur la sphère de Riemann) est *symétrique* par rapport à une droite, que nous prenons comme axe réel (c'est-à-dire $c \in \{c\}$ entraîne $\bar{c} \in \{c\}$), alors il suffit de considérer les *répartitions* $\tilde{\rho}$ également *symétriques* $\tilde{\rho}(z) = \tilde{\rho}(\bar{z})$:

$$M\{c\} = \inf_{\tilde{\rho}} A_{\tilde{\rho}} \quad \text{sous la condition} \quad C_{\tilde{\rho}}(c) \geqq 1 \quad \text{pour toute } c \in \{c\}.$$

2.2.4. Appelons $\Lambda_{\{c\}}$ la borne inférieure des longueurs des courbes $c \in \{c\}$, ou plus précisément (des courbes c non rectifiables étant admises)

$$\Lambda_{\{c\}} = \inf_{c \in \{c\}} \int_c ds;$$

A étant l'aire de G, on a, en vertu de la définition,

$$M\{c\} \leqq A_{\rho = \frac{1}{\Lambda_{\{c\}}}} = \frac{A}{\Lambda^2_{\{c\}}}, \qquad \text{soit} \quad \Lambda^2_{\{c\}} \leqq L_{\{c\}} A.$$

Toute figure pour laquelle on a l'égalité sera dite *figure extrémale* (pour la famille $\{c\}$).

2.3.1. Toute répartition ρ admissible pour une famille $\{c\}$ (dans une figure G) et telle que $A_\rho = M\{c\}$, est dite *répartition extrémale* pour $\{c\}$. *Deux répartitions extrémales* ρ_1 et ρ_2 *pour* $\{c\}$ *dans* G *ne peuvent différer que sur un ensemble de mesure superficielle nulle* (H. Renggli [6]). En effet, on a $A_{\rho_1} = A_{\rho_2} = M\{c\}$, et $A_{\frac{\rho_1+\rho_2}{2}}$ ne peut pas être inférieure à $M\{c\}$. Les figures

extrémales pour une famille $\{c\}$ sont celles dans lesquelles une répartition constante est extrémale pour $\{c\}$.

2.3.2. Soient G et G′ deux figures conformément équivalentes :

$$G' = w(G), \qquad w(z) = \text{application analytique et biunivoque.}$$

Supposons que G soit extrémale pour une famille $\{c\}$ et que G′ soit extrémale pour la famille $\{c'\} = \{w(c)\}$. On a alors deux répartitions constantes : $\rho(z) \equiv C$ extrémale pour $\{c\}$ dans G, et $\rho'(w) \equiv C'$ extrémale pour $\{c'\}$ dans G′; en vertu de 2.2.1,

$$A_\rho = M\{c\} = M\{c'\} = A_{\rho'}.$$

Or, la répartition $\rho^*(z) = \rho'(w)\left|\frac{dw}{dz}\right| = C'\left|\frac{dw}{dz}\right|$ est aussi concurrente pour $\{c\}$, et $A_{\rho'} = A_{\rho^*} = M\{c\}$, donc ρ et ρ^* sont toutes deux extrémales pour $\{c\}$; en vertu de 2.3.1, on a $\rho = \rho^*$, sauf sur un ensemble de mesure superficielle nulle, donc $\left|\frac{dw}{dz}\right| = \frac{C}{C'}$ partout (continuité) : *à un facteur constant près*, G *et* G′ *sont isométriques*.

En ce sens, nous pouvons dire : *Une famille* $\{c\}$ *étant définie dans une configuration conforme* (ensemble de figures conformément équivalentes), *il existe essentiellement au plus une figure extrémale pour* $\{c\}$.

2.4. Le *module* μ *d'un quadrilatère* Q est l'un des rapports des côtés d'un rectangle (plan) qui lui est conformément équivalent. Soient β', α', β'', α'' les « côtés » de Q; $\{c\}$ la famille des arcs de Jordan dans Q joignant β' à β''; et $\{\gamma\}$ la famille de ceux qui joignent α' à α''. Alors $L_{\{c\}} = \mu$ et $L_{\{\gamma\}} = \mu^{-1}$ (ou inversement, selon le choix de μ). Par conséquent, $L_{\{c\}} L_{\{\gamma\}} = 1$; A étant la surface de Q, on a donc

$$A_{\{c\}} A_{\{\gamma\}} \leqq A \quad \text{(Teichmüller)}.$$

On a l'égalité pour les rectangles plans (figures extrémales).

2.5. Considérons dans 2.4 la famille $\{u\} = \{c\} \cup \{\gamma\}$; on voit aisément (représentation conforme sur un rectangle) que

$$L_{\{u\}} = \min(L_{\{c\}}, L_{\{\gamma\}}), \qquad \text{d'où} \qquad L^2_{\{u\}} \leqq 1$$

et

$$A^2_{\{u\}} \leqq A \quad \text{(Teichmüller)}.$$

Figures extrémales : les carrés dans le plan.

2.6. Cas analogue à 2.4. Considérons un domaine doublement connexe de surface A; soient $\{c\}$ la famille des arcs de Jordan reliant les deux contours, et $\{\gamma\}$ celle des courbes (fermées) de Jordan qui les séparent l'un de l'autre. Alors on a de nouveau

$$L_{\{c\}} L_{\{\gamma\}} = 1, \qquad \text{d'où} \qquad A_{\{c\}} A_{\{\gamma\}} \leqq A.$$

Figures extrémales : cylindres.

2.7. Des inégalités analogues à 2.4 et 2.6 sont valables pour *trois dimensions :*

$$\text{Volume} \geqq (\text{borne inférieure de surfaces}) \times (\text{borne inférieure de longueurs}).$$

C'est une conséquence immédiate de [3].

3. Une propriété extrémale du triangle rectangle isocèle. Corollaires. — 3.1. Soient a, b, e les « côtés » d'un triangle (*cf.* 1.1); nous voulons déterminer la longueur extrémale $L_{\{c_1\}}$ de la famille des arcs de Jordan c_1 dans le triangle, à extrémités sur a et e, et ayant un point sur b. Comme tous les triangles sont conformément équivalents, $L_{\{c_1\}}$ est un nombre universel.

3.1.1. Considérons d'abord le triangle défini dans le demi-plan complexe supérieur par les points-frontière $-X$, X et ∞ $(X > 0)$; ses côtés sont

$$a : \ -\infty \leqq x \leqq -X; \qquad b : \ -X \leqq x \leqq X; \qquad e : \ X \leqq x \leqq \infty.$$

La famille $\{c_1\}$ est bien définie.

Considérons maintenant le quadrilatère Q de module $\mu = 1$, obtenu en coupant le plan complexe le long des demi-droites réelles $-\infty \leqq x \leqq -X$ et $X \leqq x \leqq \infty$, les quatre côtés étant

$$\beta' : \ -\infty \leqq x \leqq -X, \ y = +0; \qquad \alpha' : \ -\infty \leqq x \leqq -X, \ y = -0;$$
$$\beta'' : \ X \leqq x \leqq \infty, \ y = -0; \qquad \alpha'' : \ X \leqq x \leqq \infty, \ y = +0.$$

Appelons $\{u\}$ la famille des arcs de Jordan dans Q, reliant soit β' à β'', soit α' à α''; nous savons (2.5) que $L_{\{u\}} = \min(\mu, \mu^{-1}) = 1$.

Soit ρ_1 une répartition dans le demi-plan supérieur, admissible pour $\{c_1\}$; nous la prolongeons dans tout le plan par $\rho(x+iy) = \rho_1(x+i|y|)$; ρ est admissible pour $\{u\}$ (dans Q) et $A_\rho = 2A_{\rho_1}$; d'où

$$M\{u\} \leqq 2M\{c_1\}, \qquad L_{\{c_1\}} \geqq 2L_{\{u\}} = 2.$$

D'autre part, il est permis, en vertu de 2.2.3, de restreindre le problème variationnel définissant $L_{\{u\}}$ aux répartitions symétriques $\tilde{\rho}(z) = \tilde{\rho}(\bar{z})$; la restriction $\tilde{\rho}^+$ d'une telle $\tilde{\rho}$ au demi-plan supérieur est admissible pour $\{c_1\}$, et $A_{\tilde{\rho}^+} = \frac{A_{\tilde{\rho}}}{2}$; d'où

$$M\{c_1\} \leqq \inf_{\tilde{\rho}} \frac{A_{\tilde{\rho}}}{2} = \frac{M\{u\}}{2}, \qquad L_{\{c_1\}} \geqq 2L_{\{u\}} = 2.$$

Nous avons donc

$$L_{\{c_1\}} = 2.$$

3.1.2. Considérons un triangle rectangle isocèle d'hypothénuse b, les

cathètes a et c ayant la longueur 1 ; la répartition constante $\rho \equiv 1$ est admissible pour $\{c_1\}$ et $A_\rho = \frac{1}{3} = M\{c_1\}$, ρ est donc extrémale.

3.1.3. En vertu de 2.2.4 et 2.3.2, nous avons donc le théorème :

Soit donné un triangle T *de surface* A ; *sur chacun de ses côtés, il existe une infinité de points dont la somme des distances* (dans T) *aux deux autres côtés est* $\leq \sqrt{2A}$.

3.2.1. Considérons deux points fixes p, q dans le plan, et la famille $\{c_2\}$ de toutes les courbes « en forme de 8 autour de p et q », c'est-à-dire : chaque c_2 consiste en deux courbes de Jordan avec un point commun, l'une $(p|q, \infty)$ entourant p et non q, l'autre $(q\ p, \infty)$ entourant q et non p. *La longueur extrémale est*

$$L_{\{c_2\}} = 4.$$

Démonstration. — Nous prenons $p = -X$ et $q = X$, et comparons $\{c_2\}$ avec les familles $\{u\}$ et $\{c_1\}$ considérées en 3.1.1. Si ρ est admissible pour $\{u\}$, $\frac{\rho}{2}$ est admissible pour $\{c_2\}$, d'où

$$M\{c_2\} \leq \frac{M\{u\}}{4}, \qquad L_{\{c_2\}} \geq 4 L_{\{u\}} = 4.$$

Si $\tilde{\rho}$ est admissible pour $\{c_2\}$, $2\tilde{\rho}^{+}$ est admissible pour $\{c_1\}$, d'où

$$M\{c_1\} \leq 2M\{c_2\}, \qquad L_{\{c_2\}} \leq 2 L_{\{c_1\}} = 4.$$

3.2.2. Il est évidemment inessentiel que le troisième point désigné sur la sphère soit ∞ ou tout autre (transformation bilinéaire !), la propriété $L_{\{c_2\}} = 4$ reste donc valable pour une sphère avec trois points désignés p, q, z.

Considérons maintenant une *surface fermée de genre zéro*, qui peut être représentée conformément sur une sphère ; soient p, q, z trois points fixes de cette surface ; soit $\{c_2\}$ la famille des courbes connexes consistant en deux courbes de Jordan $(p|q, z)$ et $(q|p, z)$. Alors $L_{\{c_2\}} = 4$.

3.2.3. En vertu de 2.2.4, nous avons le théorème :

Soient p, q, z trois points donnés sur une surface fermée F, *d'aire* A *et de genre zéro : alors il existe un point x par lequel on peut mener deux lacets $(p\ q, z)$ et $(q|p, z)$ sur* F, *de longueur totale* $\leq 2\sqrt{A}$.

Il est clair que l'on admet tacitement la possibilité qu'un lacet passe par un des points donnés (cas limite).

3.2.4. Soit maintenant q le point à l'infini du plan complexe. Soient p et z deux points fixes du plan et $\{c_2\}$ la famille des courbes connexes consistant

chacune en deux courbes de Jordan entourant l'une p et z, l'autre p et non pas z. Alors $L_{\{\gamma_3\}} = 4$.

Les propriétés 3.2.1 et 3.2.4 restent naturellement valables sur toute surface de Riemann simplement connexe du type parabolique.

4. Une autre propriété extrémale du triangle rectangle isocèle. Corollaires. — 4.1. Soient de nouveau a, b, e les côtés d'un triangle; quelle est la longueur extrémale $L_{\{\gamma_1\}}$ de la famille des chemins (arcs de Jordan)

$$\gamma_1 : \quad a \to b \to e \to a ?$$

(Les extrémités, sur a, ne coïncident *pas* nécessairement !)

De la configuration conforme de tous les triangles, il nous suffit de choisir un représentant (figure) T : un triangle rectangle isocèle d'hypothénuse a, les cathètes b et e ayant la longueur 1. La répartition $\rho_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}$ dans T est admissible pour $\{\gamma_1\}$, d'où $L_{\{\gamma_1\}} \geqq 4$. Appelons $\{\tilde{\gamma}_1\}$ la sous-famille de $\{\gamma_1\}$ formée par les courbes $\tilde{\gamma}_1$ symétriques relativement à la hauteur de T perpendiculaire à a. La comparaison avec le paragraphe 3.1 montre que $L_{\{\tilde{\gamma}_1\}} = 2L_{\{\gamma_1\}} = 4$, d'où (par 2.2.2) $L_{\{\gamma_1\}} \leqq 4$. Nous avons donc

$$L_{\{\gamma_1\}} = 4.$$

4.1.1. Grâce à 2.2.4, nous avons le théorème :

Soit donné un triangle T *de surface* A; *pour chaque choix du côté* a, *il existe deux points* $B \in b$ *et* $E \in e$ *sur les deux autres côtés, tels que la somme des distances* $BE + Ba + Ea$ (dans T) *soit* $\leqq 2\sqrt{A}$.

2.3.2 montre que la paire de points (B, E) peut être choisie d'une infinité de manières.

4.2. Soient β', α', β'', α'' (dans cet ordre) les côtés d'un quadrilatère de module 1 (*cf.* 2.4); quelle est la longueur extrémale $L_{\{\gamma_2\}}$ de la famille des courbes (*fermées*) de Jordan

$$\gamma_2 : \quad \beta' \to \alpha' \to \beta'' \to \alpha'' \to \beta' \quad \text{(quadrilatères inscrits) ?}$$

Il suffit de considérer, dans le plan complexe, le carré Q de sommets 1, i, -1, $-i$. La répartition $\rho_2 \equiv \frac{1}{4}$ dans Q est admissible pour $\{\gamma_2\}$, d'où $L_{\{\gamma_2\}} \geqq 8$. La sous-famille $\{\tilde{\gamma}_2\} \subset \{\gamma_2\}$ des courbes $\tilde{\gamma}_2$ symétriques par rapport à l'axe réel a (*cf.* 2.2.3) la longueur extrémale

$$L_{\{\tilde{\gamma}_2\}} = 2L_{\{\gamma_1\}} = 8, \qquad \text{d'où} \qquad L_{\{\gamma_2\}} \leqq 8.$$

Donc

$$L_{\{\gamma_2\}} = 8.$$

4.3.1. Soient p, q deux points fixes du plan complexe. Soit $\{\gamma_3\}$ la famille des courbes γ_3 consistant en trois courbes de Jordan : $(\infty\,|\,p, q)$ entourant p et q, $(q\,|\,p, \infty)$ entourant q et non p, $(p\,|\,q, \infty)$ entourant p et non q, *la seconde ayant un point commun avec chacune des deux autres.* Alors

$$L_{\{\gamma_3\}} = 8.$$

Démonstration. — Prenons $p = -X$, $q = X$ (X réel > 0) dans le plan complexe. Soit $\{\tilde{\gamma}_3\} \subset \{\gamma_3\}$ la sous-famille des courbes $\tilde{\gamma}_3$ symétriques par rapport à l'axe réel; à l'aide de 2.2.3, la comparaison avec 4.1 montre immédiatement que

$$L_{\{\tilde{\gamma}_3\}} = 2L_{\{\gamma_4\}} = 8, \qquad \text{d'où} \qquad L_{\{\gamma_3\}} \leq 8.$$

Appliquons 4.1 au triangle défini par le demi-plan supérieur et les côtés

$$a : \ -\infty \leq x \leq -X; \qquad b : \ -X \leq x \leq X; \qquad e : \ X \leq x \leq +\infty.$$

Soit ρ_1 admissible pour $\{\gamma_1\}$; je définis une répartition ρ_3 dans le plan ouvert par $\rho_3(x+iy) = \frac{\rho_1(x+i|y|)}{2}$. Je dis que ρ_3 est admissible pour $\{\gamma_3\}$. Soit f l'application $f(x+iy) = x+i|y|$ du plan ouvert sur le demi-plan $y \geq 0$; $C_{\rho_3}(\gamma_3) = \frac{C_{\rho_1}(f(\gamma_3))}{2}$; on vérifie facilement que la courbe $f(\gamma_3)$ consiste en deux courbes $\in \{\gamma_1\}$, donc

$$C_{\rho_1}(f(\gamma_3)) \geq 2, \qquad C_{\rho_3}(\gamma_3) \geq 1,$$

ρ_3 est bien admissible pour $\{\gamma_3\}$;

$$M\{\gamma_3\} \leq A_{\rho_3} = \frac{A_{\rho_1}}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad M\{\gamma_3\} \leq \frac{M\{\gamma_1\}}{2} \quad \text{et} \quad L_{\{\gamma_3\}} \geq 2L_{\{\gamma_1\}} = 8.$$

Donc

$$L_{\{\gamma_3\}} = 8.$$

4.3.2. Au lieu du point à l'infini (pôle Nord), nous pouvons désigner (outre p et q) un point quelconque z de la sphère. Il reste $L_{\{\gamma_3\}} = 8$, et cette propriété se généralise (par représentation conforme) aux surfaces de genre zéro avec trois points désignés p, q, z.

En vertu de 2.2.4, nous avons donc le théorème :

Soient p, q, z trois points donnés sur une surface fermée F, *d'aire* A *et de genre zéro; alors il existe sur* F *deux points x et y et trois lacets $(z\,|\,p, q)$ par x, $(q\,|\,p, z)$ par x et y, $(p\,|\,q, z)$ par y, de longueur totale* (somme des trois longueurs) $\leq \sqrt{8A}$.

4.3.3. Soit maintenant q le point à l'infini du plan complexe : Soient p et z deux points fixes du plan; soit $\{\gamma_3\}$ la famille des courbes connexes consistant chacune en trois courbes de Jordan entourant l'une p et z, la seconde p et non z, la troisième z et non p, la *première* ayant un point commun avec chacune des deux autres. Alors $L_{\{\gamma_3\}} = 8$.

De nouveau, les propriétés 4.3.1 et 4.3.3 restent valables sur toute surface de Riemann simplement connexe du type parabolique.

5. Propriétés extrémales du triangle équilatéral plan. Corollaires. — 5.1. Soit T un triangle et $\{\zeta_1\}$ la famille des courbes dont chacune ζ_1 consiste en trois arcs de Jordan, reliant un point (*variable*) de T aux trois côtés. Nous allons montrer que

$$L_{\{\zeta_1\}} = \sqrt{3}.$$

5.1.1. Je choisis comme domaine normal un triangle équilatéral de côté 2. Appelons a, b, c ses côtés. La répartition $\rho \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}$ est admissible pour $\{\zeta_1\}$; en effet, soit $\zeta_1 \in \{\zeta_1\}$ et $p \in \zeta_1$ son « point de bifurcation »; traçons les segments rectilignes reliant p aux trois sommets du triangle; il est ainsi décomposé en trois triangles de surfaces respectivement égales aux distances pa, pb, pc, d'où

$$pa + pb + pc = S = \sqrt{3}, \quad C_\rho(\zeta_1) \geq 1 \qquad \text{donc} \quad L_{\{\zeta_1\}} \geq \frac{1}{A_\rho} = \sqrt{3}.$$

5.2. Dans notre triangle T, soit $\{\zeta_2\} \subset \{\zeta_1\}$ la famille réunion des trois familles $\{c_1\}$ du paragraphe 3.1, relatives à chacun des trois côtés :

$$\{\zeta_2\} = \{c_{1a}\} \cup \{c_{1b}\} \cup \{c_{1c}\},$$

avec $\{c_{1a}\}$ = famille des arcs de Jordan dans T, à extrémités sur b et c, et ayant un point sur a. Nous reprenons comme domaine normal le triangle équilatéral de 5.1.1. En vertu de 2.2.3, on a le droit de restreindre le problème de variation définissant $L_{\{\zeta_2\}}$ aux répartitions $\tilde{\rho}$ symétriques relativement aux trois hauteurs du triangle. Soit $\tilde{\rho}$ une telle répartition, admissible pour $\{\zeta_2\}$. Construisons le rectangle de base b (longueur 2) et de hauteur $= \sqrt{3}$, dans lequel est inscrit notre triangle équilatéral, et prolongeons la répartition $\tilde{\rho}$ dans tout le rectangle par réflexion relativement aux côtés a et c du triangle, soit $\tilde{\rho}^\square$ la répartition $\tilde{\rho}$ prolongée. Soit $\{\lambda\}$ la famille des segments verticaux reliant les côtés horizontaux du rectangle. On voit facilement que $\tilde{\rho}^\square$ est admissible pour $\{\lambda\}$, donc

$$A_{\tilde{\rho}^\square} \geq M\{\lambda\} = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

d'autre part (vu les propriétés de symétrie de $\tilde{\rho}$), $A_{\tilde{\rho}^\square} = 2A_{\tilde{\rho}}$; donc $A_{\tilde{\rho}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où

$$M\{\zeta_2\} = \inf_{\tilde{\rho}} A_{\tilde{\rho}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad L_{\{\zeta_2\}} \leq \sqrt{3}.$$

Nous avons ainsi, en tenant compte de 5.1.1,

$$\sqrt{3} \leq L_{\{\zeta_1\}} \leq L_{\{\zeta_2\}} \leq \sqrt{3},$$

d'où finalement

$$L_{\{\zeta_3\}} = L_{\{\zeta_3\}} = \sqrt{3}.$$

Figures extrémales pour les deux familles : les triangles équilatéraux plans.

5.2.1 En vertu de 2.2.4 et 2.3.2, nous avons le théorème :

Sur le contour d'un triangle T *de surface* A, *il existe une infinité de points dont la somme des distances* (dans T) *aux deux côtés autres que le leur, est* $\leq \sqrt{\sqrt{3}\,A}$.

Ce résultat est à rapprocher de 3.1.3.

5.3.1. Soient p, q deux points fixes du plan complexe; $\{\zeta_3\}$ la famille des courbes connexes dont chacune est composée de deux courbes de Jordan appartenant à deux des trois catégories $(p|q,\infty)$, $(q|p,\infty)$, $(\infty|p,q)$. En d'autres termes, $\{\zeta_3\}$ est, sur la sphère de Riemann, la famille des « courbes en 8 » autour de *deux* des trois points p, q, ∞. Alors

$$L_{\{\zeta_3\}} = 2\sqrt{3}.$$

Démonstration. — Prenons $p = X$, $q = -X$ (X réel > 0); nous comparons notre problème avec celui du paragraphe 5.2 pour le triangle défini par le demi-plan supérieur et les points-frontière $-X$, X et ∞. En vertu de 2.2.3, on trouve facilement que $L_{\{\zeta_3\}} \leq 2L_{\{\zeta_3\}} = 2\sqrt{3}$. Pour démontrer l'inégalité contraire, je pose de nouveau (*cf.* 4.3.1) $f(x+iy) = x + i|y|$; soit ρ_2 (définie pour $y \geq 0$) admissible pour $\{\zeta_2\}$; je définis $\rho_3(x+iy) = \frac{\rho_2(x+i|y|)}{2}$; $A_{\rho_3} = \frac{A_{\rho_2}}{2}$; il faut montrer que ρ_3 est admissible pour $\{\zeta_3\}$; $C_{\rho_3}(\zeta_3) = \frac{C_{\rho_2}(f(\zeta_3))}{2}$; or on vérifie (et c'est un point essentiel) que $f(\zeta_3)$ consiste en deux arcs $\in \{\zeta_2\}$, donc $C_{\rho_2}(f(\zeta_3)) \geq 2$, ρ_3 est bien admissible pour $\{\zeta_3\}$; donc

$$M_{\{\zeta_3\}} \leq \frac{M_{\{\zeta_2\}}}{2}, \qquad L_{\{\zeta_3\}} \geq 2L_{\{\zeta_3\}} = 2\sqrt{3}.$$

Donc

$$L_{\{\zeta_3\}} = 2\sqrt{3}.$$

5.3.2. De nouveau (*cf.* 3.2.2 et 4.3.2), on peut remplacer le pôle Nord par tout autre point sur la sphère de Riemann, et généraliser le résultat, par représentation conforme, à une surface fermée de genre zéro. En vertu de 2.2.4, nous avons donc :

Soient p, q, z *trois points donnés sur une surface fermée* F, *d'aire* A *et de genre zéro; alors il existe sur* F *un point* x *par lequel on peut mener deux lacets, de deux des trois types* $(p|q,z)$, $(q|z,p)$, $(z|p,q)$, *et de longueur totale* $\leq \sqrt{2\sqrt{3}\,A}$.

6. Plan projectif et propriétés extrémales de domaines sphériques. — 6.1. Soit $\{\gamma_{11}\}$ la famille des grands cercles sur une sphère de rayon R. Considérons deux points quelconques p, q sur la sphère; la famille étant symétrique relativement au grand cercle médiateur de p et q, il suffit (en vertu de 2.2.3) de considérer les répartitions ϱ telles que $\varrho(p)=\varrho(q)$; donc on peut se restreindre aux répartitions constantes admissibles; la plus petite est

$$\varrho_1 \equiv \frac{1}{2\pi R}, \qquad \text{d'où} \qquad M\{\gamma_{11}\} = A_{\varrho_1} = \frac{1}{\pi};$$
$$L_{\{\gamma_{11}\}} = \pi.$$

6.2. Coupons la sphère par son équateur; et soit $\{\gamma_{12}\}$ la famille des demi-grands cercles dans l'hémisphère Nord. La répartition constante $\varrho_2 \equiv \frac{1}{\pi R}$ est admissible pour $\{\gamma_{12}\}$, donc $M\{\gamma_{12}\} \leqq \frac{2}{\pi}$. Soit ϱ admissible, alors le prolongement par symétrie (par rapport au plan de l'équateur) de la répartition $\frac{\varrho}{2}$ est une répartition $\tilde{\varrho}$ admissible pour $\{\gamma_{11}\}$, et $A_{\tilde{\varrho}} = \frac{A_\varrho}{2}$, d'où

$$\frac{1}{\pi} = M\{\gamma_{11}\} \leqq \frac{M\{\gamma_{12}\}}{2}, \quad \text{donc} \quad M\{\gamma_{12}\} = \frac{2}{\pi},$$
$$L_{\{\gamma_{12}\}} = \frac{\pi}{2}.$$

6.3. Sur notre hémisphère, soit $\{\gamma_{13}\} \supset \{\gamma_{12}\}$ la famille des arcs de Jordan joignant deux points diamétralement opposés quelconques (de l'équateur). $L_{\{\gamma_{13}\}} \leqq L_{\{\gamma_{12}\}} = \frac{\pi}{2}$; mais $\varrho \equiv \frac{1}{\pi R}$ est admissible pour $\{\gamma_{13}\}$, donc $L_{\{\gamma_{13}\}} \geqq \frac{\pi}{2}$; donc

$$L_{\{\gamma_{13}\}} = \frac{\pi}{2}.$$

6.4. Par projection stéréographique, on voit que $\frac{\pi}{2}$ est aussi la longueur extrémale de la famille des arcs de Jordan dans $|z| \leqq 1$ joignant deux points diamétralement opposés (variables) de la circonférence $|z| = 1$. La représentation conforme permet de passer à un domaine de Jordan quelconque.

Interprétation. — *Soit* P *un modèle du plan projectif; la famille* $\{\gamma_{14}\}$ *des cycles non homotopes à zéro a une longueur extrémale égale à* $\frac{\pi}{2}$. (Conditions imposées au modèle, *cf.* 1.1.)

En effet : le revêtement universel $\hat{P}$ de P est une variété riemannienne à deux feuillets, homéomorphe à la sphère; appliquons-le conformément sur une sphère en sorte que deux points « superposés » de $\hat{P}$ (c'est-à-dire ayant même projection sur P) aient pour images deux points antipodes de la sphère. En vertu de 6.3, $L_{\{\gamma_{14}\}} = \frac{\pi}{2}$.

6.4.1 En vertu de 2.2.4, nous retrouvons ici un théorème de Pu[5] : *Si* A *est l'aire d'un modèle* (*cf.* 1.1) *du plan projectif et* Λ *la borne inférieure des longueurs de ses cycles non homotopes à zéro, alors*

$$\Lambda^2 \leqq \frac{\pi A}{2}.$$

Grâce à 2.3.2, nous avons même : il existe une infinité de cycles de longueur $\leqq \sqrt{\frac{\pi A}{2}}$.

La figure extrémale est celle du paragraphe 6.3, les points diamétralement opposés de l'équateur étant identifiés.

6.4.2 *Application aux surfaces de révolution.* — Je considère une surface de révolution (domaine de Jordan) d'aire A, ayant pour frontière un parallèle Γ, et coupant l'axe de rotation en un point. Soient q et t deux points diamétralement opposés sur Γ; *leur distance sur la surface est* $\Lambda_{qt} \leqq \sqrt{\frac{\pi A}{2}}$. Domaine extrémal : hémisphère.

Exemple : Cône de révolution, $r =$ rayon de la base, $R =$ longueur des génératrices. Le raisonnement est applicable (approximation par des surfaces régulières).

$$A = \pi r R, \qquad \text{d'où} \qquad A \leqq \pi \sqrt{\frac{rR}{2}}.$$

Le calcul exact (développement du cône) donne $A = 2R \sin \frac{\pi r}{2R}$; posons $\frac{\pi r}{2R} = x$, notre inégalité donne $\frac{\sin^2 x}{x} \leqq \frac{\pi}{4}$; si $x = \frac{\pi}{3}$, cela donne $\pi \geqq 3$. La précision est satisfaisante.

6.4.3. L'inégalité de 6.4.1 se laisse appliquer au problème des surfaces (d'aire A) dont les points conjugués ont une distance géodésique fixe D (*cf.* Blaschke [2], p. 224). On sait que chaque point p a alors un seul conjugué p', et que l'identification des paires (p, p') fournit un modèle du plan projectif, d'aire $\frac{A}{2}$. En vertu de 6.4.1, on en déduit que $D^2 \leqq \frac{\pi A}{4}$, soit $A \geqq \frac{4D^2}{\pi}$. *La surface considérée a une aire au moins égale à celle de la sphère de diamètre géodésique* D $\left(\text{c'est-à-dire de rayon } \frac{D}{\pi}\right)$.

6.5. Reprenons le cercle-unité $|z| < 1$; on a vu (6.4) que la famille $\{\eta_\lambda\}$ des arcs de Jordan reliant deux points diamétralement opposés (variables) de $|z| = 1$, a la longueur extrémale $L_{\{\eta_\lambda\}} = \frac{\pi}{2}$. La transformation $w = z^2$ applique le cercle-unité sur un revêtement G′ à deux feuillets au-dessus de lui, et $\{\eta_\lambda\}$ sur la famille $\{\eta'_\lambda\}$ des arcs de Jordan à extrémités (sur $|w| = 1$) superposées,

dont la projection entoure le point de ramification $w = 0$. Comme $w(z)$ est conforme partout sauf à l'origine, on a encore $L_{\{\gamma'_4\}} = L_{\{\gamma_3\}} = \frac{\pi}{2}$.

Considérons maintenant le cercle-unité $|w| \leq 1$ et la famille $\{\gamma_3\}$ des courbes (fermées) de Jordan ayant un point sur $|w| = 1$ et entourant l'origine $w = 0$. Soit ρ admissible pour $\{\gamma_3\}$, alors je construis, en calquant ρ sur les deux feuillets de G', une répartition ρ' admissible pour $\{\gamma'_4\}$; car $C_{\rho'}(\gamma'_4) = C_\rho(\gamma_3) \geq 1$; et $A_{\rho'} = 2A_\rho$; d'où $M\{\gamma'_4\} \leq 2M\{\gamma_3\}$. D'autre part, désignons par w_1 et w_2 les deux points de G' de projection w; soit ρ' sur G', admissible pour $\{\gamma'_4\}$; alors $\rho(w) = \frac{\rho'(w_1) + \rho'(w_2)}{2}$ est admissible pour $\{\gamma_3\}$, car $C_\rho(\gamma_3) = \frac{C_{\rho'}(\gamma'_{4,1}) + C_{\rho'}(\gamma'_{4,2})}{2} \geq 1$; et $A_\rho \leq \frac{A_{\rho'}}{2}$ (principe de symétrie analogue à 2.2.3, *cf.* [4]), d'où $M\{\gamma_3\} \leq \frac{M\{\gamma'_4\}}{2}$. Donc

$$L_{\{\gamma_3\}} = 2L_{\{\gamma'_4\}} = \pi.$$

La représentation conforme donne :

Soient G *un domaine de Jordan,* Γ *sa frontière, et p un point fixe dans* G. *La famille* $\{\gamma_3\}$ *des courbes de Jordan dans* $G \cup \Gamma$, *entourant p et ayant un point sur* Γ, *a la longueur extrémale*

$$L_{\{\gamma_3\}} = \pi.$$

6.5.1. En vertu de 2.2.4, nous avons le corollaire :

Dans un domaine de Jordan d'aire A, *chaque point possède un lacet partant du bord, l'entourant (ou le contenant), de longueur* $\leq \sqrt{\pi A}$.

Ces lacets et leur intérieur *recouvrent* donc tout le domaine.

6.5.2. *Application aux surfaces de révolution.* — Je considère de nouveau (*cf.* 6.4.2) une surface de révolution (domaine de Jordan) d'aire A, ayant pour frontière un parallèle Γ et coupant l'axe de rotation en un point *p*. *Prenons un point* $q \in \Gamma$; *il existe par q un lacet sur la surface, contournant ou coupant l'axe et de longueur* $\leq \sqrt{\pi A}$.

Exemple : Cône de révolution, r = rayon de la base, R = longueur des génératrices. $A = \pi r R$; soit λ la longueur du plus petit lacet. Si $R \leq 2r$, $\lambda = 2R$ et notre inégalité donne $2R \leq \pi\sqrt{rR}$, soit $R \leq \frac{\pi^2 r}{4}$, $\pi^2 \geq 8$; si $R > 2r$, $\lambda = 2R \sin\frac{\pi r}{R}$, notre inégalité donne $2R \sin\frac{\pi r}{R} \leq \pi\sqrt{rR}$; posons $x = \frac{\pi r}{R}$, nous avons de nouveau $\sin^2 x \leq \frac{\pi x}{4}$ (*cf.* 6.4.2) : précision satisfaisante.

6.5.3. *Domaine extrémal.* — En tant que surface de Riemann, c'est une moitié de l'hémisphère supérieur, les points-frontière d'égale cote étant deux

à deux identifiés; $p =$ pôle Nord. On a, en effet, $A = \pi R^2$ et $\Lambda = \pi R$. On peut aussi le construire en superposant deux exemplaires identiques d'un triangle sphérique trirectangle, et en identifiant point par point deux des trois paires de côtés superposés; p est alors le point de rencontre de ces deux « coutures ». C'est dans l'espace (isométrie !) une surface de révolution donnée par l'intégrale elliptique

$$z(r) = \int_0^r \frac{\sqrt{3R^2 + 4t^2}}{\sqrt{R^2 - 4t^2}}\, dt,$$

avec $r^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq r \leq \frac{R}{2}$; $p = 0$ point singulier.

6.6. *La famille* $\{\eta_{16}\}$ *des triangles inscrits dans un triangle donné* T *a la longueur extrémale* 2π.

Démonstration. — Il suffit de considérer le cas où T est le demi-cercle-unité supérieur, avec les points-frontière désignés -1, 0, 1. Soit de nouveau $\{\eta_{15}\}$ la famille des courbes de Jordan dans $|z| \leq 1$, entourant l'origine et avec un point (au moins) sur $|z| = 1$. Posons $f(x+iy) = x + i|y|$; soit ρ (définie dans le demi-cercle supérieur fermé) admissible pour $\{\eta_{16}\}$; je prolonge ρ par $\tilde{\rho} = f^*(\rho)$:

$$\tilde{\rho}(x+iy) = \rho(x + i|y|), \qquad C_{\tilde{\rho}}(\eta_{15}) = C_{f^*(\rho)}(\eta_{15}) = C_\rho(f(\eta_{15}));$$

or $f(\eta_{15}) \in \{\eta_{16}\}$, donc $\tilde{\rho}$ est admissible pour $\{\eta_{15}\}$; comme $A_{\tilde{\rho}} = 2A_\rho$, on a

$$\pi^{-1} = M\{\eta_{15}\} \leq 2M\{\eta_{16}\}.$$

D'autre part, en vertu de 2.2.3, on peut se restreindre, pour déterminer $L_{\{\eta_{15}\}}$, aux répartitions $\tilde{\rho}(z) = \tilde{\rho}(\bar{z})$; soit $\tilde{\rho}$ admissible pour $\{\eta_{15}\}$, et $\tilde{\rho}^+$ sa restriction au demi-cercle supérieur; alors $C_{\tilde{\rho}^+}(\eta_{16}) = \dfrac{C_{\tilde{\rho}}(\eta_{16} + \bar{\eta}_{16})}{2}$; $\eta_{16} + \bar{\eta}_{16}$ est composée de deux courbes $\in \{\eta_{15}\}$, donc $C_{\tilde{\rho}^+}(\eta_{16}) \geq 1$, $\tilde{\rho}^+$ est admissible pour $\{\eta_{16}\}$, et

$$A_{\tilde{\rho}^+} = \frac{A_{\tilde{\rho}}}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad M\{\eta_{16}\} \leq \frac{M\{\eta_{15}\}}{2} = \frac{1}{2\pi}.$$

Donc

$$L_{\{\eta_{16}\}} = 2\pi.$$

6.6.1. En vertu de 2.2.4, on a le corollaire :

Dans tout triangle T *d'aire* A, *il existe un triangle inscrit de périmètre* $\leq \sqrt{2\pi A}$.

Il y en a même une *infinité* (*cf.* 2.3.2 et 6.6.2).

6.6.2. *Domaine extrémal : c'est un triangle sphérique trirectangle* T.

Démonstration. — Soit R le rayon de la sphère; l'aire de T est $\frac{\pi R^2}{2}$, le

corollaire donne donc $\Lambda \leqq \pi R$. Nous pouvons supposer que le côté e de T soit sur l'équateur, les côtés a et b se coupant au pôle Nord. Soit E un point de e; construisons ses images E_a et E_b relativement aux côtés (grands cercles) a et b; E_a et E_b (tous deux sur l'équateur) sont antipodes. Tous les triangles inscrits dans T passent par un point E de e, ils ont donc un périmètre égal à la longueur d'un arc reliant E_a à E_b sur la sphère, donc $\geqq \pi R$. Par chaque paire de points $E \in e$, $A \in a$, il existe un triangle inscrit EAB de périmètre $\Lambda = \pi R$, facile à construire : B est l'intersection du grand cercle $E_a A E_b$ avec b.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] L. Ahlfors et A. Beurling, *Conformal invariants and function theoretic null-sets* (*Acta Math.*, t. 83, 1950, p. 101-129).

[2] W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie I*, 3. Auflage, Springer, 1929; Dover, 1945.

[3] J. Hersch, « *Longueurs extrémales* » *dans l'espace, résistance électrique et capacité* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 1639).

[4] J. Hersch, *Longueurs extrémales et théorie des fonctions* (*Comm. Math. Helv.*, t. 29, 1955, fasc. 4).

[5] P. M. Pu, *Some inequalities in certain non orientable Riemannian manifolds* (*Pacific J. Math.*, t. 2, 1952, p. 55-71).

[6] H. Renggli, *Un théorème de représentation conforme* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 1952, p. 1593).

[7] O. Teichmüller, *Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung* (*Deutsche Math.*, t. 3, 1938, p. 621-678).

Remarque. — Pendant la correction des épreuves, j'apprends par un cours polycopié de l'Oklahoma College (sur la représentation conforme) que L. Ahlfors avait déja calculé $L_{\{c_1\}}$ et $L_{\{\zeta_3\}}$ en 1951 (*cf.* 3.1 et 5.2).